
Une double émergence

En considérant différents exemples relatifs à la physique et aux mathématiques enseignées au lycée, nous illustrons en quoi le terme de modélisation recouvre une double démarche : celle de la modélisation physique et celle de la modélisation mathématique qui en découle. La mise en oeuvre de cette démarche permet d'une part de contextualiser des concepts mathématiques nouveaux à partir de l'analyse d'une situation physique, d'autre part de montrer comment un modèle physique peut être validé par l'analyse du modèle mathématique auquel il donne naissance, enfin de faire apparaître des éléments de réalité insoupçonnés.

1. Introduction

Nous voulons illustrer ici l'idée que les rapports entre mathématiques et physique ne sont pas des rapports d'*application*, mais de *constitution*. Cette relation est spécifique à la physique et à l'informatique. Les mathématiques sont certainement utiles dans d'autres domaines de la connaissance, y compris dans les humanités (par exemple en linguistique), et des idées mathématiques nouvelles émergent de l'économie ou de la biologie. Mais elles n'y jouent pas ce rôle constitutif qu'elles jouent en physique. En biologie, le concept de « cellule » joue un rôle central, pourtant il n'a pas de traduction en mathématique ; en revanche, il est difficile d'imaginer un concept de physique qui n'ait pas immédiatement une transcription mathématique. Ceci a des conséquences dans le développement des deux disciplines et aussi dans leurs « transpositions didactiques » pour l'enseignement.

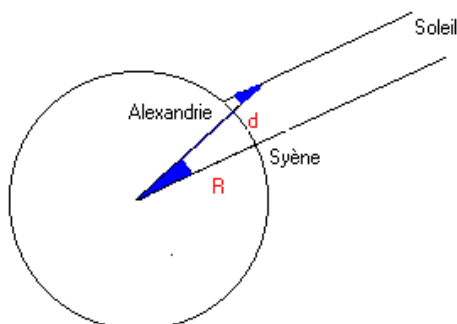
La double émergence dont il est question ici, c'est :

- d'une part, l'émergence de concepts mathématiques, à partir de la modélisation physique de situations variées ; il s'agit donc, en quelques sorte, d'*applications de la physique aux mathématiques*,
- d'autre part, l'émergence d'aspects nouveaux et inconnus de la « réalité » comme produit de la modélisation mathématique d'une situation physique donnée ; il s'agit là de ce que l'on a l'habitude d'appeler *application des mathématiques à la physique*.

Au lieu d'aborder ces questions d'un point de vue général, nous allons considérer des exemples pris dans l'enseignement de la physique et des mathématiques au lycée.

2. Quelques exemples

Premier exemple : la mesure du rayon de la Terre par Eratosthène.



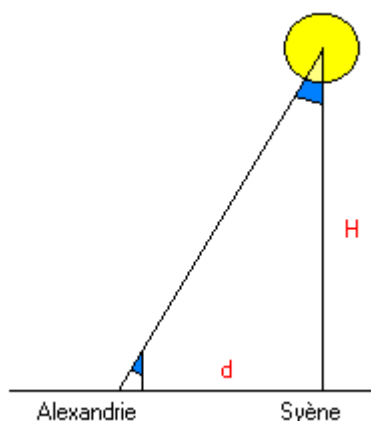
Cette première détermination précise du rayon de la Terre est racontée dans la plupart des livres d'histoire de l'astronomie, et on la trouve dans beaucoup de livres de géométrie. Rappelons brièvement de quoi il s'agit. La scène se passe environ 250 ans avant notre ère. Eratosthène apprend que le jour du solstice d'été, à Syène (près de l'actuel Assouan), le Soleil passe à la verticale du lieu : un objet vertical n'a pas d'ombre, les rayons du Soleil éclairent le fond d'un puits. Or il constate qu'au même jour et à la même heure, à Alexandrie, distante d'environ 800 kilomètres, un bâton placé verticalement possède une ombre. Il attribue ce qui est observé au fait que les verticales des deux lieux ne sont pas parallèles. Le modèle physique sous-jacent est défini par les deux propositions suivantes :

1. la Terre est ronde,
2. le Soleil est à l'infini, et la lumière se propage en ligne droite.

Ce modèle conduit donc à la construction semblable à celle de la figure 1. Il suffit alors d'en « appeler » à la géométrie élémentaire (angles alternes internes), pour obtenir l'égalité : (longueur de l'ombre)/(taille du bâton) = (distance Alexandrie-Syène)/(rayon de la Terre), d'où l'on déduit le rayon de la Terre. Il trouve 6500 km : superbe ! Penser que le rayon de la Terre se cache derrière une relation mathématique aussi simple...

L'histoire ainsi racontée est à vrai dire incomplète, car le modèle physique n'est pas justifié. Or, il est possible d'en concevoir un autre, qui conduit à une interprétation totalement différente. C'est ce que fait Gamow dans son petit livre intitulé « Une étoile nommée Soleil », et il attribue ce second modèle à Anaxagore, qui vivait environ 200 ans avant Eratosthène (à notre connaissance, rien ne justifie cette attribution...mais l'histoire est suffisamment jolie pour être reprise ici).

Pourquoi, donc, ne pas supposer que le Soleil est proche de la Terre, et que la rotondité éventuelle de celle-ci ne joue qu'un rôle négligeable ? On est alors conduit à tracer la figure qui suit.



Les rayons du Soleil ne sont plus parallèles, d'où une ombre ici et pas d'ombre là-bas ! On trouve alors que $(\text{taille du bâton})/(\text{longueur de l'ombre}) = (\text{hauteur du Soleil au dessus de la Terre})/(\text{distance Syène-Alexandrie})$. Le Soleil se trouve par conséquent...à 6500 km de la Terre ! Comme le diamètre apparent du Soleil est d'environ 0,01 radian, le diamètre absolu du Soleil est à peu près égal à 65 km. Raisonnement non moins superbe que le premier...mais conclusions singulièrement différentes.

L'observation faite conduit par conséquent aux deux énoncés possibles suivants :

1. Si le Soleil est à l'infini et la Terre est ronde, alors le rayon de cette dernière est de 6500 km.
2. Si la rotondité de la Terre, entre Syène et Alexandrie, est négligeable, et si le Soleil est proche, alors c'est une boule de 65 km de diamètre située à 6500 km de la Terre.

La situation intermédiaire, où les deux effets sont présents, est aussi possible.

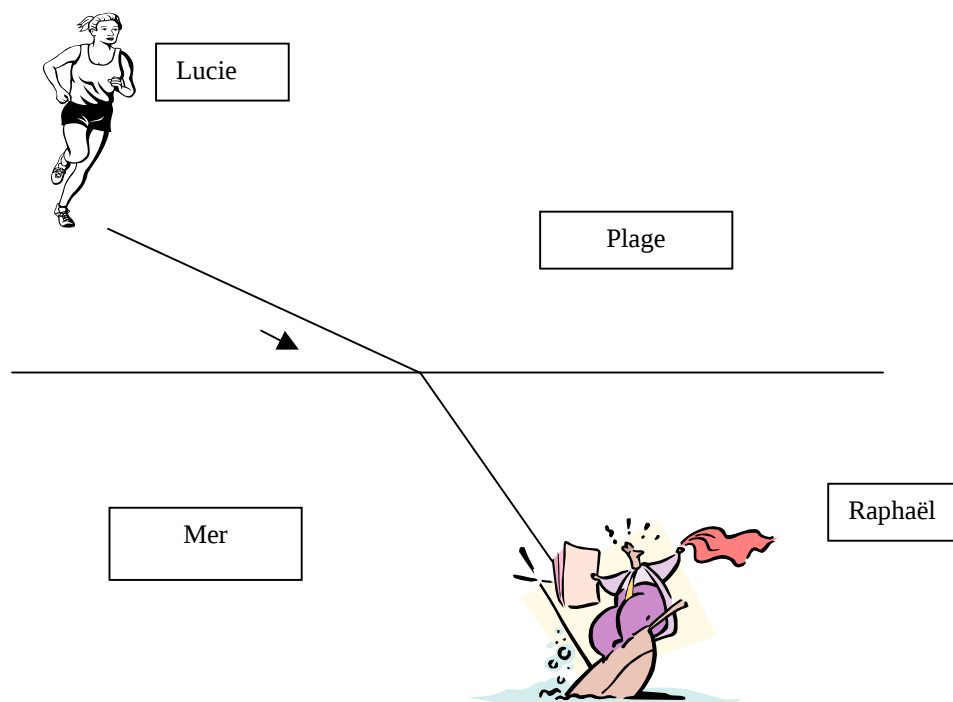
Pour admettre que le calcul proposé en général dans les livres est le bon, il faut avoir des informations supplémentaires, notamment concernant la distance Terre-Soleil. Par exemple, lorsqu'on observe la Lune à son premier quartier, les directions observateur-Lune et observateur-Soleil font un angle droit : cette observation implique que le Soleil n'est pas proche de la Terre. Là encore, des notions de géométrie simple sont impliquées.

La morale de cette petite histoire est claire : une observation ne parle pas d'elle-même. Lui *donner du sens* passe par une *reconstruction du réel par la pensée*, ici, un schéma, et cette reconstruction requiert à la fois un modèle physique et un modèle mathématique.

Note : Anaxagore est connu pour avoir fourni la première explication correcte des éclipses de Lune, comme étant dues au passage de celle-ci dans l'ombre de la Terre. La forme de cette ombre implique que la Terre est ronde. Mais cela n'invalide pas le raisonnement ci-dessus : si le Soleil est suffisamment proche, la rotondité de la Terre est négligeable.

Deuxième exemple : Au secours !

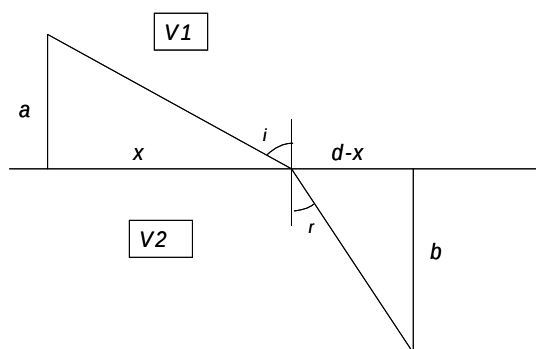
Cet exemple, emprunté à Richard Feynman, met en scène Raphaël et Lucie (les noms sont différents dans la version originale). Ils sont au bord de la mer. Lucie se repose sur la plage, Raphaël est parti se baigner. Levant la tête au bout de quelques instants, Lucie comprend que Raphaël a des difficultés et qu'il faut aller le secourir.



Où faut-il entrer dans l'eau ? C'est l'intuition qui la guide, elle court, nage, rejoint son ami, et l'aide à atteindre le rivage, ouf ! plus de peur que de mal. L'émotion passée, Lucie et Raphaël se

demandent quel était le meilleur endroit pour pénétrer dans l'eau. « Meilleur » ? En quel sens ? Au sens d'une minimisation du temps mis pour aller rejoindre son ami, bien sûr.

Ils élaborent donc un modèle : sa trajectoire sera deux segments de droite parcourus à vitesse constante. Elle court sur le sable à la vitesse v_1 , elle nage à la vitesse v_2 . L'interface entre les deux milieux est une ligne droite et la vitesse de Lucie passe brusquement de la première valeur à la seconde. Il faut calculer, pour un point d'entrée dans l'eau repéré par une abscisse x le long d'une ligne modélisant la position de la mer, la durée t_1 de la course sur le sable, la durée t_2 de nage, le total $t_1 + t_2$, qui est une fonction de x , et déterminer le point où la dérivée de cette fonction s'annule.



On a $t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1}$, $t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$, d'où le résultat : il ne faut pas chercher à extraire

une expression analytique de x , mais remarquer simplement que l'équation obtenue par annulation de la dérivée peut se mettre sous la forme : $\sin i = v_1/v_2 \sin r$, où i désigne l'angle que fait la trajectoire de Lucie sur la plage avec la normale à la mer, et r désigne l'angle de la trajectoire dans l'eau avec cette même normale.

Notions nécessaires pour répondre à la question posée : théorème de Pythagore, fonction d'une variable, dérivée, fonctions trigonométriques.

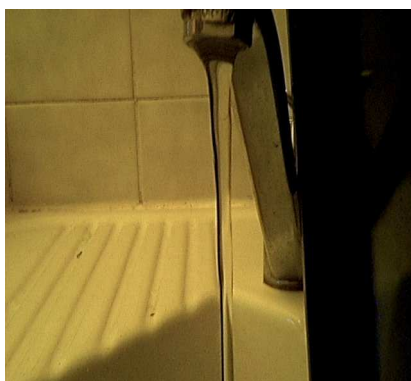
Question subsidiaire : la loi obtenue est celle de la réfraction. Lorsque la lumière passe d'un milieu à un autre, qui s'agit-il de sauver¹ ?

Morale de l'histoire : le sens, ici, est donné par l'urgence d'aller sauver Lucie. Il est des situations où déterminer le point optimum peut être important. Comment faire si l'on ne sait pas calculer une dérivée ?

Remarque : la même histoire peut se raconter en permutant les rôles de Raphaël et de Lucie.

Troisième exemple : un problème de robinet.

De l'eau s'écoule d'un robinet (cf. photo). Quelle forme a ce jet ? On remarque qu'il se rétrécit. Pourquoi ?



¹ Nous faisons allusion ici au principe de Fermat : toute l'optique géométrique découle du principe selon lequel le temps mis par la lumière pour aller d'un point à un autre est stationnaire.

La réponse *qualitative* s'obtient en remarquant que l'eau est en chute libre : elle accélère. Le débit, produit de l'aire de la section droite par la vitesse, est constant le long de l'écoulement car l'eau est incompressible. Comme la vitesse augmente, la section doit diminuer.

Bien, mais quelle est l'équation *exacte* du profil de l'eau ?

Intuition et compréhension qualitatives, là, ne suffisent plus. Il faut formaliser.

Un modèle *physique* simple pour la partie laminaire de l'écoulement consiste en trois approximations :

1. l'eau est incompressible,
2. les lignes de courant sont strictement verticales
3. les effets de viscosité sont négligeables.

Négliger la viscosité permet de dire que la vitesse de l'eau est la même en tout point d'une section droite, elle ne dépend que de l'altitude². Si l'on néglige cet effet, la vitesse $v(z)$ s'obtient en combinant l'équation de la chute libre : $z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ (origine à la sortie du robinet, axe dirigé vers le bas) avec celle de la vitesse $v = gt + v_0$. D'autre part, la conservation du débit s'écrit (en considérant que le flot est cylindrique de rayon $r(z)$) : $\pi r(z)^2 v(z) = \pi r_0^2 v_0$, où r_0 désigne le rayon de sortie du robinet et v_0 la

vitesse de sortie de l'eau. On trouve finalement :
$$r(z) = \frac{r_0}{\left(1 + 2gz / v_0^2\right)^{1/4}}.$$

Sous les approximations faites, voilà une fonction que chacun peut observer tous les matins dans sa cuisine...

Quatrième exemple : une question de mathématique ou de physique ?

On demande s'il existe un polyèdre convexe tel qu'il existe un point intérieur qui ne se « voie » dans aucune des faces ? « Se voir » dans une face signifie que la perpendiculaire au plan de la face passant par le point considéré rencontre ce plan à l'intérieur de la face.

Il existe une « solution » physique à ce problème, qui repose sur le fait qu'un point intérieur au polyèdre peut être considéré comme barycentre des sommets affectés de coefficients positifs (ceci constitue même une définition de l'intérieur du polyèdre). On peut donc imaginer une réalisation physique de ce polyèdre par des masses « ponctuelles » reliées par des segments « sans masse ». Si l'on pose ce polyèdre sur une face quelconque, il va basculer, car la verticale passant par le centre de gravité coupe le plan de la face à l'extérieur du polygone de sustentation, qui n'est autre que la face sur laquelle le polyèdre repose. On a donc un mouvement perpétuel. Un tel mouvement étant interdit par les lois de la physique, le polyèdre cherché est une chimère.

Un tel raisonnement dégage une élégance stupéfiante et qui convainc d'emblée. Mais avons-nous là une démonstration ?

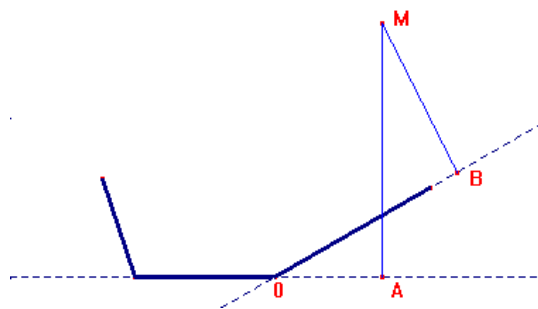
- Non, dira-t-on, ce n'est pas une démonstration dans le champ des mathématiques, elle n'est donc pas recevable comme telle.

- Mais, pourra-t-on répliquer, les lois de la physique ont le statut de théorèmes, une fois posés les cadres théoriques. L'interdiction par les lois de la physique est une interdiction par les mathématiques.

- Peut-être, concédera-t-on, mais il s'agit alors d'une démonstration lourde : il doit en exister une autre dans le champ de la géométrie.

Et on a raison de le croire. Reprenons donc la question, et considérons la face dont le point supposé exister, M, est le plus proche. Plaçons-nous dans le plan vertical passant par M. Cette face se termine en O, et une autre face a sa trace selon la droite OB. Le polyèdre étant convexe, l'angle en O est plus petit que 180 degrés.

² En réalité, au sortir du robinet, la vitesse de l'eau au contact avec le métal est nulle (condition de non-glissement à la paroi), et le profil de vitesse est parabolique (écoulement de Poiseuille).



L'angle (MOB) est donc plus petit que l'angle (MOA), d'où il résulte que MB est plus petit que MA, ce qui est contraire à l'hypothèse initiale. CQFD.

Cinquième exemple : la désintégration radioactive comme objet de connaissance³

Le sujet est abordé en terminale scientifique. Rappelons brièvement en quoi consiste la partie expérimentale. Il s'agit de mesurer une radioactivité *naturelle*. Celle du corps humain ne peut être mesurée dans le laboratoire d'un lycée, car les quelque 10 000 désintégrations par seconde dues au K-40 et au C-14 contenu dans le corps produisent des radiations qui sont réabsorbées par les tissus. En revanche la radioactivité du radon-222 contenu dans le sol peut être mesurée.

Le radon peut être extrait du sol en pompant un petit volume d'air à une profondeur d'environ 30 cm (une pompe à main est suffisante pour cela). Cet air, qui contient du radon en quantité variable selon le lieu, est transféré dans une fiole dont la surface intérieure est garnie de sulfure de zinc, sauf dans sa paroi inférieure. Les particules alpha émises par le radon produisent une fluorescence du revêtement, la lumière émise s'échappe par le fond de la fiole et pénètre dans un photomultiplicateur relié à un compteur⁴. En relevant le nombre d'événements produits pendant des intervalles de temps de l'ordre de la minute, on obtient un ensemble de données qui permet de suivre la décroissance temporelle de l'activité des noyaux de radon, dont la demi-vie est de 3,8 jours.

Tournons-nous à présent vers l'analyse des données. Elle prend ici la forme d'un dialogue entre physique et mathématique.

Physique : L'expérience suggère⁵ que le nombre moyen de noyaux ΔN qui se désintègrent dans l'intervalle de temps Δt est proportionnel à cet intervalle et au nombre moyen de noyaux existant à l'instant t : $\Delta N \cong -\lambda N \Delta t$. La grandeur λ , homogène à l'inverse d'un temps, ne dépend pas de t , et elle caractérise le noyau. Par passage à la limite, on est conduit à écrire l'équation d'évolution de N : $dN/dt = -\lambda N$.

Mathématiques : Les élèves connaissent la dérivée, mais c'est la première fois qu'ils rencontrent une équation différentielle. Est-ce que cela définit bien une fonction ? Prenons l'équation $dy/dt = y$. Aucune des fonctions qu'ils connaissent⁶ ne satisfait l'équation. La méthode d'Euler, introduite en classe de première S, peut-être utilisée pour avoir une idée de la solution, si elle existe. La fonction exponentielle e^x est introduite comme solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$. On étend ensuite l'approche à l'équation $dy/dt = ay + b$ (existence et unicité compte tenu de la condition initiale).

³ On pourra se reporter aux documents d'accompagnement des programmes de terminale scientifique, disponibles en ligne sur le site du CNDP : (<http://www.cndp.fr/seconde/maths/maths/>) ou (<http://www.cndp.fr/seconde/physchim/>).

⁴ L'appareil a été adapté pour un usage scolaire à partir de ceux utilisés par l'Institut de radioprotection et de sûreté nucléaire.

⁵ C'est tout l'art de l'expérimentateur, de faire que la nature lui « suggère » quoi que ce soit.

⁶ Construite à partir de fonctions trigonométriques ou de fonctions de la forme $x^{p/q}$.

Physique : Quel type de modèle microscopique peut-on envisager ? Que se passe-t-il à l'échelle d'un noyau ? Un noyau se désintègre-t-il parce qu'il s'use, parce qu'il devient vieux ? Pourtant la durée de vie d'un individu moyen, par exemple, ne suit pas une loi exponentielle : c'est une courbe assez compliquée qui possède une bosse autour de 75 ans pour les hommes et 83 ans pour les femmes. Mais il existe des processus de mort sans usure : le claquage de lampes neuves, par exemple. On est ainsi conduit à envisager un *modèle physique* défini par les trois points suivants :

- 1) tous les noyaux d'une même espèce ont les mêmes propriétés,
- 2) l'émission d'une particule alpha par un noyau n'influence pas les noyaux voisins (si c'était le cas, la loi de désintégration ferait intervenir au moins *deux* paramètres : l'un pour caractériser le processus de désintégration propre, l'autre pour caractériser l'influence mutuelle),
- 3) le processus de désintégration appartient aux processus de « mort sans vieillissement ».

Peut-on lier les points de vues microscopique et macroscopique à partir de ces trois hypothèses ? Autrement dit, le modèle microscopique est-il capable de rendre compte des données ? Il est important à ce point de noter que les éléments du modèle mis en place n'obéissent à aucune nécessité mathématique.

Mathématiques : Commençons par associer un modèle *mathématique* au modèle *physique*.

Compte tenu du caractère aléatoire de la désintégration, observé expérimentalement, les deux premières propositions du modèle se traduisent par :

- 1'. La durée de vie d'un noyau k est une variable aléatoire X_k et les lois de probabilité des variables $(X_k)_{k=1, \dots, N(0)}$ associées aux noyaux considérés sont identiques.
- 2'. Les variables $(X_k)_{k=1, \dots, N(0)}$ sont indépendantes.

La troisième proposition 3 est interprétée comme suit :

- 3'. Si un noyau ne s'est pas désintégré à l'instant t , sa probabilité de désintégration dans l'intervalle de temps suivant s est indépendante de t .

Soit $F(t)$ la probabilité qu'un noyau se désintègre dans l'intervalle $[0, t]$ (ce qui peut aussi s'énoncer : sa durée de vie est plus petite ou égale à t). La probabilité que la durée de vie soit dans l'intervalle $[t, t+s]$ peut être écrite sous les deux formes : $F(t+s) - F(t)$, et $[1 - F(t)]F(s)$. En égalisant ces deux expressions et en utilisant la propriété caractéristique fonctionnelle selon laquelle l'exponentielle d'une somme est égale au produit des exponentielles de chaque argument, on trouve : $F(t) = 1 - \exp(-\alpha t)$, où α est une constante positive.

Ensuite, en utilisant 2' et la distribution binomiale, on peut déduire que, partant d'une population de noyaux $N(0)$, le nombre moyen de noyaux restant à l'instant t est donné par $N(t) = N(0) \exp(-\alpha t)$. On retrouve donc la loi empirique, ce qui conduit à identifier α et λ^7 . Cet accord valide le modèle physique dont nous sommes partis. Cela ne prouve pas qu'il soit *vrai*, mais cela indique qu'il est sûrement intéressant d'approfondir les trois propositions qui le définissent.

Si l'explication d'une loi empirique consiste à élaborer un schéma théorique dans lequel cette loi est associée à une proposition démontrée mathématiquement, alors on peut considérer que l'on tient ici une explication solide⁸. De façon analogue, les lois de Kepler sont des lois empiriques. Lorsqu'elles sont déduites des équations de Newton, elles acquièrent le statut de théorèmes, et la confiance qu'on leur accorde s'accroît.

3. Enjeux communautaires

Le dialogue mathématiques-physique concernant la radioactivité, on le voit, peut être particulièrement riche. Il n'est cependant pas spécifique à ce sujet. Essayons d'en dégager quelques éléments forts et généralisables.

⁷ Le niveau microscopique relève d'un modèle stochastique. Au niveau macroscopique, la loi du nombre $Z(t)$ d'atomes existant à l'instant t est, d'après le théorème central limite, approximativement gaussienne ; de plus la variance de $Z(t)$ est en $\sqrt{N(t)}$, donc négligeable devant la moyenne $N(t)$: ainsi, le niveau macroscopique apparaît-il souvent comme déterministe.

⁸ A ce stade, expliquer pourquoi les noyaux « meurent sans vieillir » est une question ouverte.

1. La fonction exponentielle est introduite ici dans le contexte de la radioactivité, mais dans le courant de l'année de terminale S, elle est utile pour décrire l'évolution temporelle d'autres systèmes physiques : un courant électrique dans un circuit comprenant un condensateur et une résistance, une inductance et une résistance, la vitesse d'un mobile tombant sous l'effet de la gravité et soumis à une force visqueuse etc. Ces contextes enrichissent la signification de la fonction. Dans un contexte mathématique, elle est seulement définie par le fait que sa dérivée est égale à elle-même, puis la propriété $e^{x+y} = e^x e^y$ est démontrée. Dans un contexte physique, elle décrit l'évolution temporelle d'une grandeur dont le taux de variation est proportionnel à la grandeur. Elle peut aussi être utile en biologie, lorsque l'on étudie la croissance de populations bactériennes. Constaté que la même équation et la même fonction *émergent* de situations différentes constitue une forte motivation pour l'acquisition de la notion, car cela représente à l'évidence une économie de pensée. Cette *émergence* est à opposer à la notion d'application.

2. Lorsque physiciens et mathématiciens *se rencontrent*, l'expérience montrent qu'ils ont en tête des préoccupations fort différentes – et ce n'est pas le moindre intérêt de la rencontre que de le constater : ces différences ne sont pas anodines. Elles sont à la fois inévitables et fructueuses. Elles expriment la barrière d'attitudes mentales à surmonter entre les deux communautés. Par exemple :

- la fonction exponentielle peut être introduite comme fonction réciproque du logarithme; cette introduction, ou celle qui étend la notion de fonction puissance définie pour des entiers, semble incontournable à certains enseignants de mathématique, ne serait-ce que pour des raisons historiques. Pourtant la présentation par l'équation différentielle est tout aussi rigoureuse.

- pour les physiciens, poser la question de l'existence de la solution de l'équation différentielle $y' = y$ semble incongru, voire futile. Cette attitude s'explique de deux façons : d'une part, ils ont d'une certaine façon « oublié » que d'autres travaillent à produire des concepts qui fonctionnent correctement; d'autre part, ils sont *sûrs* que la solution existe, car ils ont confiance dans la modélisation *physique* qu'ils ont faite (l'idée que le taux de désintégration est proportionnel au nombre de noyaux présents) : une solution mathématique *doit exister*, parce que les noyaux *se désintègrent* ! Ils voient la fonction dans le « monde réel », devant leurs yeux. En un certain sens, ils ont raison, c'est leur façon d'avancer. En faisant cela, ils identifient le « monde réel » et sa « représentation », ce qui n'est pas sans danger : on peut tomber sur des pièges. Pensons à la théorie des transitions de phase et la façon d'aborder la « limite thermodynamique ». Les mathématiciens veulent être sûrs que le palais qu'ils élaborent est correctement construit, et qu'un mur ou une fenêtre ne vont pas subitement s'effondrer. Il est *très* intéressant que chaque communauté soit exposée aux préoccupations les plus profondes de l'autre.

3. Le physicien dit volontiers, à partir de ce qu'il observe : la désintégration d'un noyau est un phénomène aléatoire. Mais que signifie exactement cette phrase ? S'agit-il seulement d'une vague irrégularité ? Ou plutôt de la proposition précise selon laquelle à la durée de vie d'un noyau peut être associée une variable aléatoire et une distribution de probabilité satisfaisant un certain nombre de conditions mathématiques ? En réalité, il n'existe *pas d'autre* moyen de valider les trois hypothèses du modèle microscopique que de mettre en place le traitement probabiliste, et de montrer qu'il conduit, pour un grand nombre de noyaux, à une décroissance exponentielle qui s'accorde avec les observations empiriques. Si un tel accord n'avait pas été obtenu, il aurait fallu modifier de modèle physique.

4. Ceci conduit à bien distinguer le modèle physique du modèle mathématique qui en dérive. Le modèle physique, exprimé dans la langue naturelle, revient à choisir les variables pertinentes et le cadre théorique (les deux vont souvent ensemble : le cadre théorique aide souvent à choisir les bonnes variables !). Jusqu'à ce point, les mathématiques ne fournissent pas de fortes contraintes, bien que le cadre théorique soit souvent exprimé en termes mathématiques. Prenons les lois de la mécanique, par exemple. Elles relient l'interaction d'un mobile avec son environnement et l'accélération qu'il acquiert. Cette loi peut-elle être considérée comme le premier terme d'un développement faisant intervenir des dérivées d'ordre plus élevé ? Il n'y a aucune nécessité mathématique à ce que le second ordre (l'accélération) suffise. La présence de dérivées impaires entraînerait la non conservation de l'énergie. Mais la conservation de l'énergie est un fait *expérimental*, testé à une certaine précision, puis posé en principe, et des physiciens comme P.A.M. Dirac (et d'autres plus récemment) ont joué avec l'idée que les « constantes » de la physique évolueraient avec le temps (cosmologique).

4. Les cadeaux de la formalisation

L'enjeu, toujours, c'est l'intelligibilité du monde, et la jubilation qui l'accompagne.

Sciences et humanités, sur ce point, ne se distinguent pas. La spécificité des sciences tient à la recherche forcée de lois universelles ; la jubilation, c'est d'en trouver. A l'issue du processus, il y a la possibilité (étonnante) d'anticiper l'évolution d'un système, et par conséquent de fabriquer des objets prévisibles - jusqu'à la panne, tout au moins...

Comprendre nécessite toujours d'effectuer une reconstruction du monde par la pensée : c'est la leçon du conte de Georges Gamow et des autres exemples que nous avons discuté. Percevoir que le rayon de la Terre est caché derrière la géométrie élémentaire, quelle fulgurance⁹ ! L'étymologie nous le disait, du reste : la géo-métrie, n'est-ce pas la mesure de la Terre ? Encore fallait-il trouver comment procéder : par l'établissement d'un dialogue entre modèle physique et modèle mathématique. Les deux démarches constituent ce qu'on appelle la formalisation, laquelle ne se réduit donc pas à la formalisation mathématique.

Les relations entre mathématiques et physique s'éclairent si l'on perçoit que, à un certain point de l'analyse d'une situation physique, les mathématiques deviennent un passage obligé de la reconstruction mentale du monde, donc de sa compréhension. En ce sens, elles ne sont pas un outil pour la physique, elles en sont constitutives.

Cette relation de constitution acquiert toute sa force dans la constatation suivante, fondamentale : *les équations de la physique contiennent plus que les connaissances utilisées pour les écrire*. Elles ne sont pas qu'une simple représentation commode de ce que l'on sait déjà. Elles sont une des façons par lesquelles de *nouveaux* éléments de la réalité se manifestent à nous. Il y a donc des cadeaux à récolter.

Les exemples historiques sont légion.

Lorsque Maxwell écrit en 1864 les équations qui portent son nom, on ne connaît rien des ondes électromagnétiques. Manipulant ces équations, Maxwell les met sous une forme identique à des équations de propagation d'ondes. Il calcule la vitesse de ces « ondes », et trouve la valeur de la vitesse de la lumière : il interprétera donc la lumière comme une « onde électromagnétique ». Mais ces ondes ne seront découvertes expérimentalement par Hertz que 20 ans plus tard ! Voilà donc du réel, bien réel, dont personne ne soupçonnait l'existence, qui jaillit de la feuille de papier.

De façon analogue, lorsque Dirac écrit en 1928 l'équation d'onde relativiste qui doit décrire le mouvement des électrons, il obtient une solution non prévue : une particule de même masse que l'électron, mais de charge positive. Une telle particule est inconnue à l'époque. Dirac envisage qu'il s'agisse du proton, mais sa masse 2000 fois plus lourde que celle de l'électron ne convient pas¹⁰. Le positron ne sera découvert qu'en 1932 par Carl Anderson et Patrick Blackett. L'antimatière naît d'abord, elle aussi, sur le papier.

L'hypothèse des neutrinos, formulée par Pauli dès 1930 procède de la même démarche. Les lois de conservation de la mécanique ne semblaient pas expliquer le spectre d'énergie des électrons émis lors de désintégrations β^- . Bohr semblait pour sa part prêt à abandonner la loi de conservation de l'énergie dans les processus nucléaires. Pauli, au contraire, utilise la loi de conservation de l'énergie comme un principe heuristique : s'il s'agit d'une loi fondamentale, alors les données expérimentales qui indiquent une énergie manquante doivent être interprétées comme une indication que quelque chose, une particule, qu'on appellera neutrino en 1931, n'a pas été détectée. Il faudra attendre 1953 pour qu'elle le soit !

Quant au chaos déterministe, il est bel et bien contenu dans les équations de Newton, mais il a fallu attendre Poincaré pour le débusquer. Newton en avait bien eu une première forme d'intuition, lorsqu'il confiait à Dieu le soin de remettre périodiquement en ordre ce que la planète Jupiter devait troubler dans les trajectoires coniques, déterminées pour le cas d'une planète unique.

Ces exemples montrent combien la notion d'outil, s'agissant des rapports avec la physique, manque l'essentiel. Un outil, aussi sophistiqué soit-il, ne produit pas l'objet auquel il s'applique : un

⁹ La passion d'enseigner ne se nourrit-elle pas de transmettre ces traits du génie humain ?

¹⁰ Murray Gell-Mann raconte dans « Le quark et le Jaguar » que lorsqu'il demanda à Dirac, dans les années cinquante, pourquoi il n'avait pas prédit l'existence du positron, celui-ci lui répondit : « Pure lâcheté » ! Gell-Mann, pour sa part, propose les « quarks » plus de dix ans avant leur mise en évidence expérimentale.

marteau ne produit pas le clou qu'il va frapper. Mais les équations de la physique sont capables de *faire émerger* un réel encore inconnu !

Cette émergence se double d'un mouvement réciproque, celui de l'émergence d'objets mathématiques *venus d'ailleurs*, c'est-à-dire d'autres champs que le champ strict de la discipline mathématique. Là encore, les exemples historiques sont nombreux, qui n'entrent pas dans la catégorie des mathématiques que l'on applique, mais des mathématiques que l'on crée.

Ainsi, les sources d'inspiration de Newton lorsqu'il invente le calcul différentiel sont nombreuses, mais il est indéniable que l'une d'entre elles réside dans une image physique du mouvement : image d'emblée discrétisée dans le temps, impulsionnelle, dans laquelle le mouvement d'un mobile résulte de la composition d'un mouvement inertiel et de l'action instantanée de l'environnement qui imprime des changements brusques de la vitesse. Il résulte de cette vision une « géométrie du mouvement », à l'œuvre dans les Principia, en partie oubliée dans l'enseignement, mais que l'étude des systèmes dynamiques suggère de raviver en la développant¹¹.

Citons, pour terminer, et sans entrer dans chaque sujet, l'analyse de Fourier en relation avec la propagation de la chaleur, la théorie des équations aux dérivées partielles en relation avec la propagation des ondes, la théorie des distributions et la mécanique quantique, certains aspects de théorie des nombres et le « chaos quantique », sans oublier les travaux d'Edgar Witten et d'Alain Connes...

Cette double émergence est si forte qu'elle invite en réalité à reprendre, en la renversant, l'interrogation d'Eugène Wigner sur « la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles », et à s'interroger sur « la déraisonnable efficacité des sciences naturelles pour les mathématiques ». Rendue accessible dans le cadre scolaire et universitaire par des exemples pertinents, et qui ne s'improvisent pas, elle devrait favoriser l'intérêt à la fois pour les mathématiques et pour la physique.

Claudine Robert
Présidente du GEPS de mathématiques
qui a rédigé les programmes de l'an 2000
Université Joseph Fourier
Grenoble, France
claudine.robert@inrialpes.fr

Jacques Treiner
Président du GEPS de physique-chimie
qui a rédigé les programmes de l'an 2000
LPTMS, Université Paris-Sud
91406, Orsay Cedex, France
treiner@ccr.jussieu.fr

¹¹ P. Couillet, M. Monticelli et J. Treiner dans le bulletin de l'APMEP et dans celui de l'Union des Physiciens, février 2004.