

Du pgcd aux nombres irrationnels. Approche géométrique.

Maryvonne le Berre, IREM de Lyon

Introduction

L'arithmétique fait un retour modeste dans les programmes de collège, avec, en troisième, les notions de fraction irréductible et de nombres premiers entre eux, ainsi que la notion de pgcd.

Cette réintroduction se fait dans une logique tout à fait différente de celle des anciens programmes, puisque, en fait, tout s'articule autour de la mise en place d'un algorithme de calcul du pgcd, sans recours à la factorisation en produit de nombres premiers.

Les élèves doivent savoir reconnaître si une fraction est irréductible, ou, ce qui est équivalent, si deux nombres sont premiers entre eux.

Comparons par rapport à cela deux caractérisations des nombre premiers entre eux :

1° Deux nombres sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1.

Avec cette définition, la seule méthode de reconnaissance possible est de déterminer en extension les diviseurs des deux nombres.

Sans la notion de nombre premier, cette recherche est vite fastidieuse et peu praticable pour les grands nombres. Cette première définition est donc peu opératoire.

2° Deux nombres sont premiers entre eux si leur pgcd est 1.

Si l'on dispose d'un algorithme de détermination du pgcd, on a là une caractérisation tout à fait opératoire.

Ce constat étant fait, il reste à choisir un ou plusieurs algorithmes de recherche du pgcd. Je voudrais, dans ce qui suit, défendre l'intérêt d'un point de vue géométrique pour l'introduction de ces algorithmes.

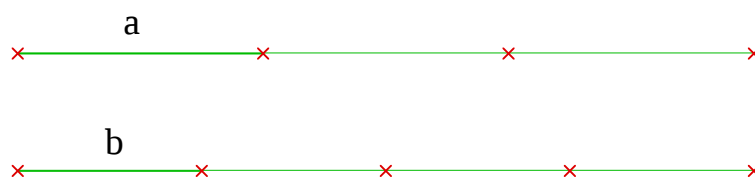
I Approche théorique

I-1 La notion de commune mesure

Cette notion nous vient des grecs de l'Antiquité, qui ne disposaient, comme on le sait, que des entiers naturels. Dans ces conditions, mesurer une longueur c'est compter combien d'unités permettent de reconstituer cette longueur. Pour définir le rapport de deux longueurs comme rapport de deux entiers, deux techniques sont possibles.

Première technique : reporter parallèlement chacune des deux longueurs jusqu'à obtenir deux segments de même longueur.

Exemple :

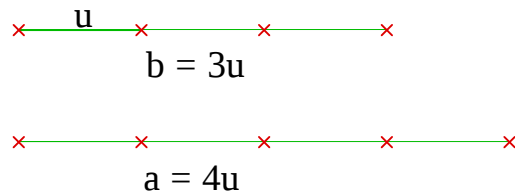


$3a = 4b$, on dira que les longueurs a et b sont dans le rapport de 4 à 3.

Deuxième technique : trouver une unité de longueur qui puisse être reportée un nombre entier de fois dans chaque longueur a et b .

S'il existe une telle unité, on dira que u est une commune mesure pour a et b .

Exemple :



Mais comment déterminer effectivement une commune mesure ? Un principe essentiel est le suivant : en supposant $a > b$, si u est une commune mesure pour a et b , elle l'est aussi pour b et $a - b$ et réciproquement.

Démonstration :

De $a = mu$ et $b = nu$ on déduit $a - b = (m - n)u$, autrement dit toute commune mesure pour a et b l'est aussi pour b et $a - b$.

De $b = nu$ et $a - b = ku$ on tire $a = (n + k)u$, autrement dit toute commune mesure pour b et $a - b$ l'est aussi pour a et b .

Ce principe permet de construire un algorithme de détermination de la plus grande commune mesure de deux longueurs. C'est l'algorithme d'Euclide, connu aussi sous le nom d'anthyphérèse.

Voyons-le fonctionner géométriquement sur l'exemple précédent (où la plus grande commune mesure de a et b est $a - b$):

$\frac{b}{a}$ 1	$\frac{b}{a - b \quad \text{---} \quad b \quad \text{---} \quad \text{---}}$ 2
3 $\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$ ---	4 $\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$ ---

Dire qu'il existe une commune mesure pour a et b c'est dire que a et b ont un rapport rationnel. Dans ce cas, il existe une unité dans laquelle les mesures de a et b s'expriment en nombres entiers, et la recherche de la plus grande commune mesure de a et b équivaut à une recherche de pgcd.

I-2 Du pgcd aux nombres irrationnels : un problème.

Etant donné un rectangle, peut-on toujours le paver avec des carrés identiques ?

Si l'on pose cette question à "l'homme de la rue", il y a toutes les chances qu'il réponde : oui, évidemment. En effet, dans la pratique, les mesures des côtés d'un rectangle s'expriment en nombres décimaux, un changement d'unité permet de se ramener à des mesures entières, la recherche d'un pgcd fournit tous les carrés possibles et le problème est donc vite "résolu".

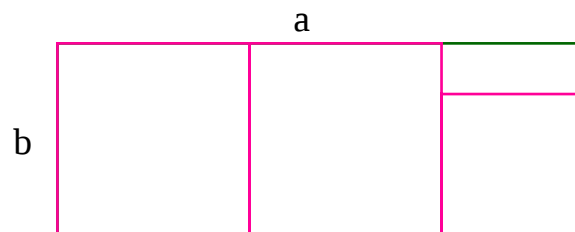
Un raisonnement numérique montre facilement qu'un pavage est possible si et seulement si les dimensions du rectangle ont un rapport rationnel. Si le rapport des mesures a et b des côtés du rectangle est un nombre rationnel, il est clair qu'un pavage est possible. Par exemple, si, en prenant un côté comme unité, l'autre mesure $\frac{13}{9}$, le rectangle peut être pavé par des carrés de côté $\frac{1}{9}$. Cette condition est nécessaire. Pour que l'on puisse paver le rectangle (a,b) avec des carrés de côté u , il faut que $a=mu$ et $b=nu$, avec m et n entiers, donc que le rapport a/b soit égal au rapport de deux entiers.

Ce raisonnement entamera-t-il la certitude de l'homme de la rue ?

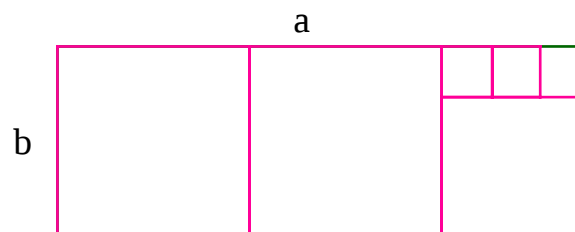
C'est dans le cadre géométrique que l'on peut montrer la nécessité d'autres nombres que les rationnels. Dans ce cadre, l'algorithme d'Euclide fournit un moyen de construire le plus grand carré qui pave un rectangle. La question de l'existence d'une solution, qui amène, comme on vient de le voir, à celle de l'existence de nombres irrationnels, va se poser sous la forme : existe-t-il des rectangles pour lesquels l'algorithme n'aboutit pas, mais tourne indéfiniment ?

Rappelons le principe sur lequel repose l'algorithme : toute commune mesure de a et b est aussi une commune mesure pour b et $a-b$, et réciproquement, et donc tout carré qui pave le rectangle $(a ; b)$ pave aussi le rectangle $(b ; a-b)$ et réciproquement.

Soit un rectangle de dimensions a et b , avec $a > b$. On peut commencer par essayer le carré de côté b , en reportant la longueur b sur l'autre côté. Si a est un multiple de b , le rectangle est pavé par des carrés de côté b et b est la plus grande commune mesure de a et b . Sinon, il reste un rectangle de dimensions b et $a-b$ sur lequel on peut recommencer l'opération..



et ainsi de suite....



L'algorithme s'arrête lorsqu'il aboutit à un carré. Ce carré est le plus grand qui pave tous les rectangles successivement construits.

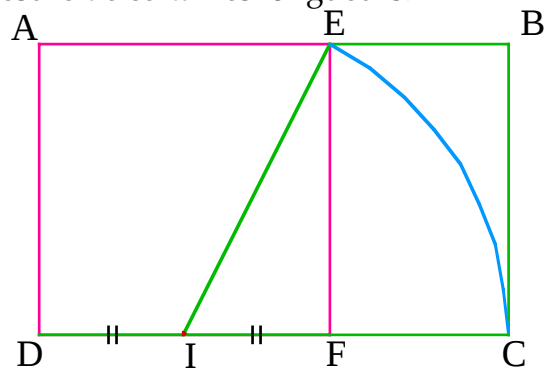
Il y a là plus qu'une approche visuelle d'un algorithme de recherche de pgcd. En effet, si en découpant un carré dans un rectangle, on obtient un deuxième rectangle semblable au premier, il est vain de continuer : le problème n'a pas de solution.

I - 3 Le rectangle d'or

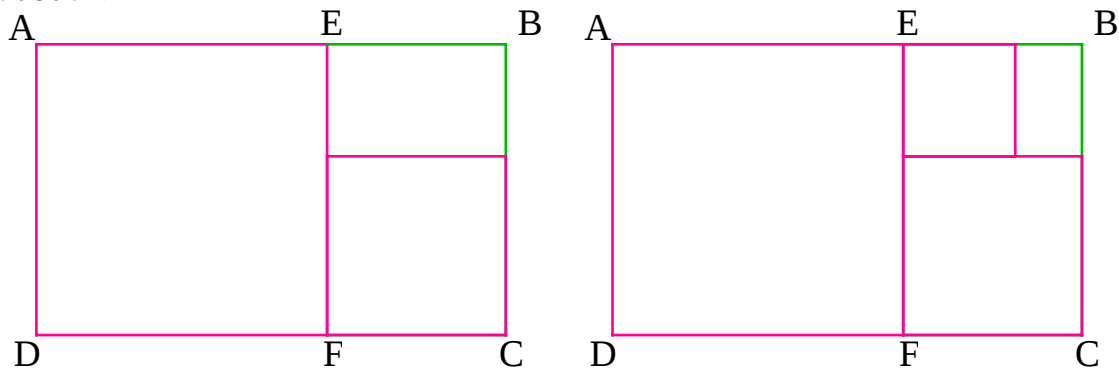
C'est sans doute une des situations les plus simples qui montre la nécessité des nombres irrationnels pour exprimer la mesure de certaines longueurs.

On peut définir le rectangle d'or par sa construction à partir d'un carré (ici AEFD)

Le cercle de centre I (milieu de [DF]) passant par E coupe (DC) en C.
[AD] et [DC] sont les côtés d'un rectangle d'or.



Tout carré qui pave le rectangle ABCD pave le rectangle EBCF, et réciproquement. Or les deux rectangles sont semblables : le rectangle EBCF est une réduction du rectangle ABCD. Si l'on recommence l'opération "découpage d'un carré" sur le rectangle EBCF, on obtient un troisième rectangle plus petit, mais semblable aux deux premiers, et ainsi de suite... L'algorithme ne peut donc aboutir.



En conséquence, AB et AD ne peuvent s'exprimer simultanément en nombres entiers. Si on prend AD comme unité de longueur, aucune fraction ne peut exprimer la mesure de AB.

La démonstration de la similitude des rectangles ABCD et EBCF ne nécessite que le théorème de Pythagore et un peu de calcul algébrique. Elle peut donc être accessible à de bons élèves de troisième. En voici une version simple :

On veut démontrer que : $\frac{FC}{BC} = \frac{BC}{DC}$, ou encore, en choisissant $BC=1$

$$\frac{FC}{1} = \frac{1}{DC}, \text{ ce qui équivaut à } FC \times DC = 1.$$

Or, l'application du théorème de Pythagore au triangle IEF, donne :

$$IE^2 = EF^2 + IF^2$$

$$IE^2 = 1 + IF^2$$

$$IE^2 - IF^2 = 1$$

D'où, comme $IC = IE$

$$IC^2 - IF^2 = 1$$

$$(IC - IF)(IC + IF) = 1$$

$$\text{soit : } FC \times DC = 1.$$

II-4 Démonstrations de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

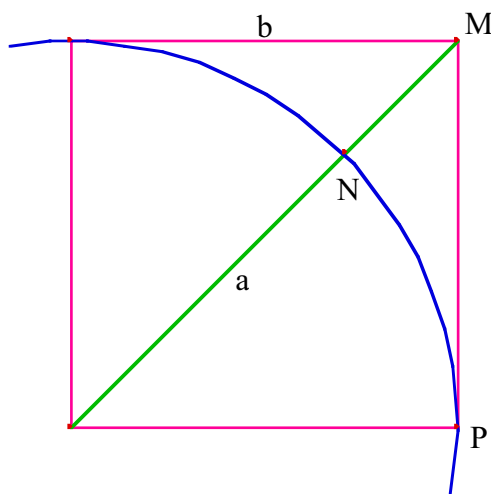
Les commentaires du programme de troisième suggèrent de tenter cette démonstration, mais on peut remarquer que c'est un des thèmes d'étude proposés en seconde.

Quelle que soit la démonstration choisie, il y a deux difficultés : la compréhension de la question posée, la compréhension de la structure du raisonnement.

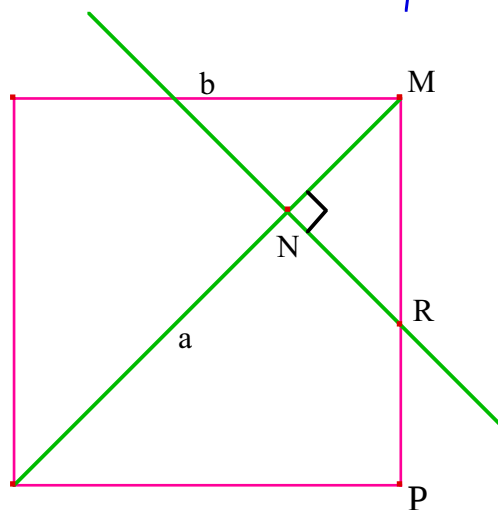
Commençons par une **démonstration géométrique**.

Comme pour le rectangle d'or, l'idée est de montrer que l'algorithme de soustraction, appliqué cette fois à la diagonale et au côté d'un carré, va tourner indéfiniment.

Soit b la mesure du côté et a la mesure de la diagonale d'un carré. On cherche à écrire le quotient de a par b sous la forme d'une fraction irréductible. Cela suppose qu'il existe un nombre u , que l'on va appeler une commune mesure entre a et b , et deux entiers m et n , premiers entre eux tels que $a = mu$ et $b = nu$. Chercher une commune mesure entre a et b équivaut à chercher une commune mesure entre a et $a - b$.



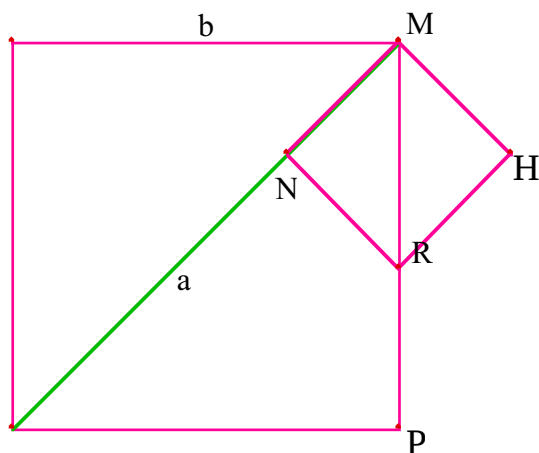
Par construction $MN = a - b$, donc chercher une commune mesure entre la diagonale a et le côté b revient à chercher une commune mesure entre MN et MP .



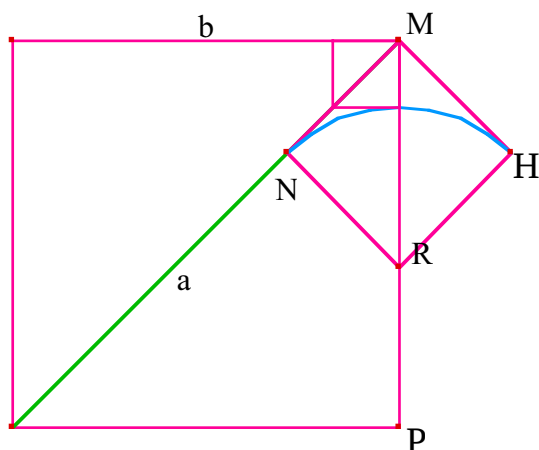
La perpendiculaire en N à la diagonale coupe $[MP]$ en R .

On démontre (par des considérations d'angles) que $MN = NR = RP$, d'où $MR = b - (a - b)$.

Notre problème se simplifie donc en : chercher une commune mesure entre MN et MR .



Autrement dit, il s'agit de trouver une commune mesure entre la diagonale et le côté du carré MNRH, ce qui est notre problème initial.



Un pas de plus et l'algorithme aboutit à un carré homothétique du premier.

Cette démonstration est bien dans l'esprit des nouveaux programmes, mais repose sur un raisonnement d'un type tout à fait nouveau pour les élèves.

Comparons à deux autres démonstrations :

La plus connue des démonstrations est la **démonstration par l'absurde** basée sur des considérations de parité.

Soient a et b deux entiers premiers entre eux tels que $a^2 = 2b^2$. On en déduit que a^2 est pair donc a également et a^2 multiple de 4, donc $2b^2$ multiple de 4, ce qui entraîne que b^2 et b sont pairs. D'où contradiction avec l'hypothèse a et b premiers entre eux.

On peut faire la même objection que pour la démonstration précédente. Les élèves peuvent suivre toutes les étapes, mais comprendront-ils la structure du raisonnement ?

Enfin, voici une **démonstration synthétique**, qui repose sur le résultat simple suivant :

Un entier est un carré parfait si et seulement si, dans sa décomposition en produit de facteurs premiers, tous les exposants sont pairs.

Le raisonnement tient en deux lignes :

Quel que soit l'entier b , dans la décomposition de $2b^2$, le facteur 2 a un exposant impair, donc $2b^2$ n'est pas un carré parfait. Il n'existe donc pas d'entier a tel que $a^2 = 2b^2$.

Cette dernière démonstration est certainement plus accessible, mais elle ne peut être proposée en troisième, puisqu'elle suppose connue la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.

La difficulté des deux démonstrations possibles semble supérieure à celle proposée plus haut pour l'irrationalité du nombre d'or. Il semble plus raisonnable, dans les conditions actuelles, d'abandonner le sujet aux collègues de seconde.

Signalons cependant une démonstration moins générale de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, analogue à celle que l'on peut utiliser pour démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal, et qui peut être accessible aux élèves de troisième. Elle repose sur l'examen des chiffres des unités

Chiffre des unités de b^2	0	1	4	9	6	5
Chiffre des unités de $2b^2$	0	2	8	8	2	0

Si l'on suppose a et b premiers entre eux, la première et la dernière colonnes sont à éliminer. Dans les quatre autres cas, le chiffre des unités de $2b^2$ montre qu'il ne s'agit pas d'un carré parfait.

II Dans la classe

La compréhension de l'algorithme d'Euclide sous sa forme géométrique ouvre, on le voit, des portes sur de nouveaux univers. C'est pour cela que j'ai fait le choix d'introduire l'algorithme de détermination du pgcd par soustractions successives en prenant appui sur le problème du pavage d'un rectangle.

Le principe de l'algorithme par soustraction peut être justifié en troisième, et s'il est bien compris, on peut envisager la démonstration de l'irrationalité du nombre d'or ... Il peut au moins y préparer pour la suite.

L'algorithme par divisions successives est nettement plus performant, du moins dans le calcul "à la main", mais il se déduit assez facilement du premier. C'est l'occasion de revoir avec les élèves l'algorithme de la division euclidienne tel qu'ils l'ont appris à l'école.

Préalables :

Au travers de petits problèmes, les élèves ont déjà rencontré le lien entre le pavage d'un rectangle et la recherche d'un pgcd. Ils savent déterminer un pgcd par deux méthodes, la recherche exhaustive des diviseurs et la recherche par approximations successives à partir d'un diviseur commun. Cette dernière méthode suppose que les deux nombres aient un diviseur commun évident, et utilise la propriété : les quotients de deux nombres par leur pgcd sont premiers entre eux. Elle amène donc assez naturellement la question : comment savoir si deux nombres sont premiers entre eux ?

Découverte de l'algorithme :

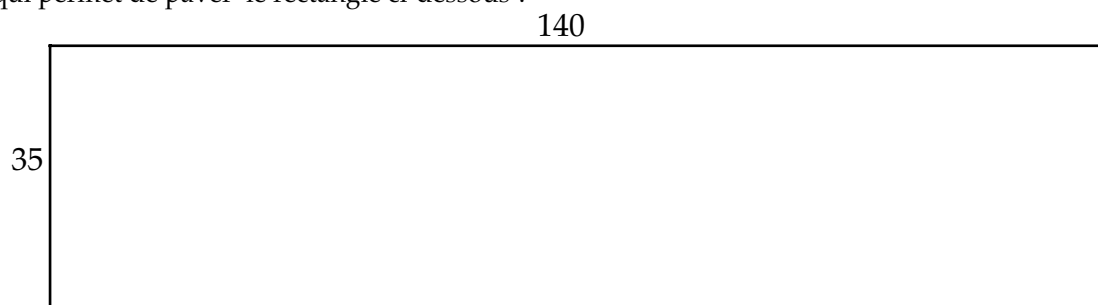
Elle s'est faite en deux étapes.

Première étape : Construction du plus grand carré qui pave des rectangles de dimensions données (voir fiche suivante.)

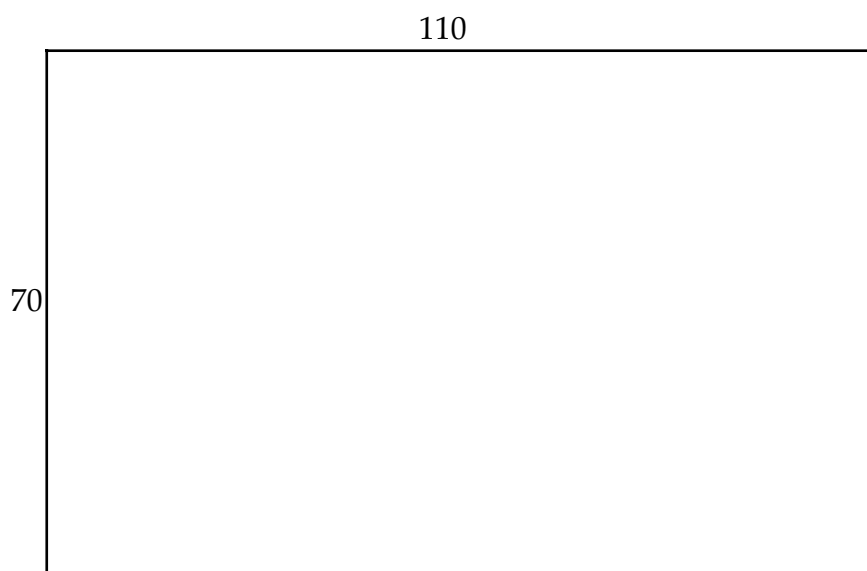
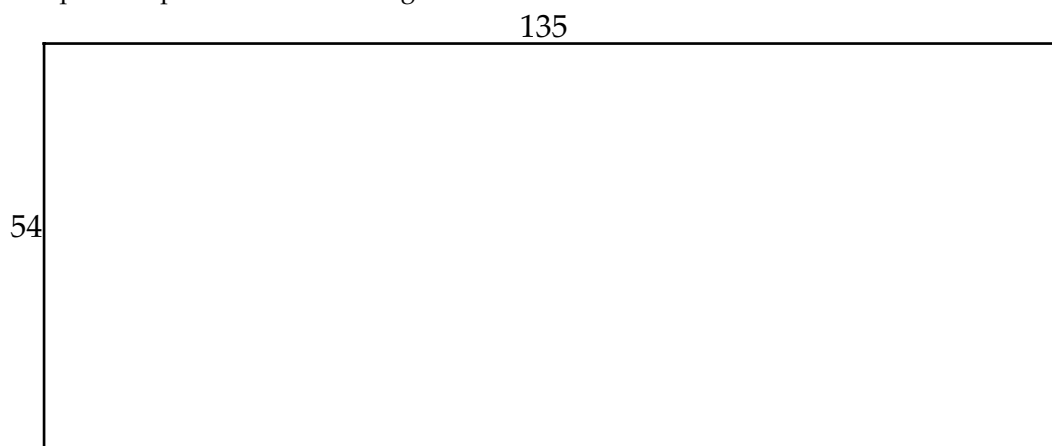
Deuxième étape Elle suit l'explicitation du principe de base, on cherche des rectangles de plus en plus petits dont les dimensions ont le même pgcd que a et b . Les élèves travaillent à l'aide de schémas pour mettre en place et contrôler l'algorithme.

A la recherche d'une méthode de calcul du pgcd

1° Comment peut-on, avec une règle non graduée et un compas, construire le plus grand carré qui permet de paver le rectangle ci-dessous ?



Même question pour les deux rectangles suivants :



2° Les tracés effectués montrent des rectangles qui peuvent être pavés par les mêmes carrés que le rectangle initial. Indiquer leurs dimensions dans les tableaux ci-dessous.

140			
35			

135				
54				

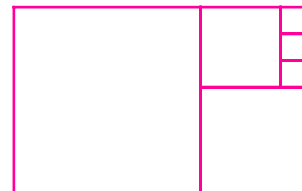
110				
70				

Remarques sur cette fiche :

Il est indispensable de bien préciser au départ l'objectif de l'activité : il s'agit de mettre en place une méthode de calcul du pgcd (on risque autrement une débauche de créativité géométrique)

Quelle que soit la précision du compas, aucun tracé ne peut évidemment être considéré comme fiable. Ce sont les relations entre les nombres qui permettent de valider les tracés.

Les solutions pour les trois rectangles sont données par les schémas ci-dessous.



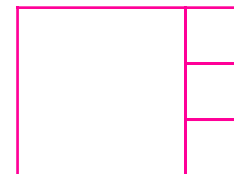
Les élèves ont relativement peiné sur le troisième rectangle. En effet, les deux premiers cas peuvent être résolus par construction de milieux, mais pour le troisième, il y a un saut à opérer : il faut abandonner le rectangle d'origine et travailler sur des rectangles successifs plus petits. Pour aider les élèves à percevoir ce principe, il vaut mieux donner un peu plus de rectangles à traiter géométriquement, par exemple :



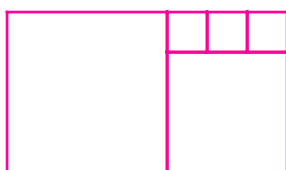
(105,35)



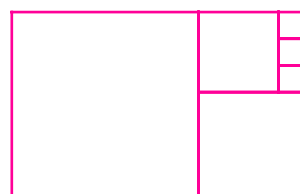
(135,54)



(88,66)



(105,60)



(110,70)

Pour montrer que le dernier carré trouvé pave bien tout le rectangle, certains élèves éprouvent le besoin de réaliser le quadrillage complet, détruisant ainsi la vision des essais successifs. Il est prudent de prévoir des fiches supplémentaires.

Remarques sur la deuxième étape.

Le passage à l'algorithme numérique peut être facilité par un exercice sur des schémas préparés :

(91,52)

(121,77)

Indiquer, par simple lecture du schéma correspondant, la dimension du plus grand carré qui peut paver chaque rectangle.

Il reste alors à mettre en place la disposition pratique des calculs...

Le choix des rectangles ci-dessus oriente vers l'algorithme de soustraction. Si celui-ci devient rapidement fastidieux en calcul à la main, il a l'avantage d'être facile à programmer avec un tableur. On peut proposer par la suite des cas où le recours à la division est vraiment économique par rapport à la soustraction comme (833,91).

Conclusion

Outre son aspect historique et l'ouverture sur des problèmes ultérieurs, l'approche géométrique a son intérêt dans le seul cadre de l'apprentissage d'un algorithme de calcul du pgcd. Elle fournit une représentation des égalités $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a-b, b)$ et $\text{pgcd}(bq+r, b) = \text{pgcd}(b, r)$ qui justifient les algorithmes par soustraction et division. C'est aussi une illustration, accessible à la plupart des élèves, d'un point de méthode très général, remplacer un problème par un problème équivalent plus simple. Même si le principe de l'algorithme est souvent rapidement écrasé par sa mise en application, quelques graines sont semées ...

Bibliographie

Galion thèmes, *Autour du nombre d'or*, Lyon, 1997

Galion thèmes, *Radical de 2*, Lyon, 1998

Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques, Ellipses, Paris, 1993