Les croquis outils d'analyse et de communication

CII Université

C. Menini[1]   P. Sénéchaud[2]   F. Vandebrouck[3]

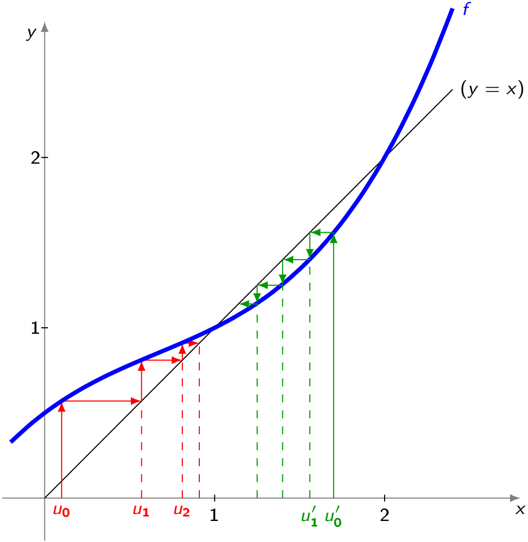
[1]IREM d'Aquitaine

[2]IREM de Limoges

[3]IREM de Paris

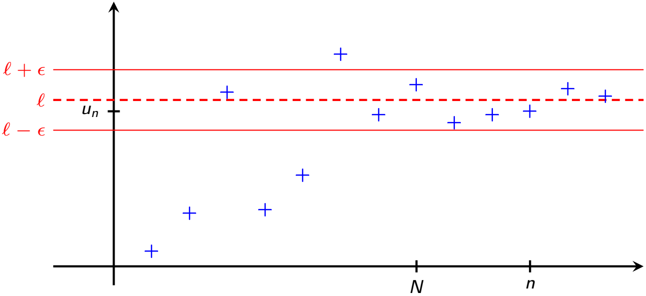
Jonzac, Octobre 2022

Un exemple de représentation en début d'université



source : Exo7

Un appui à la compréhension d'une définition en début d'université



source : Exo7

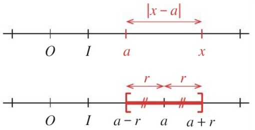
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon)$$

Deux ouvrages de seconde - cours

Définition et propriété

Soient a, x et r des nombres réels avec $r \geqslant 0$.

- On appelle **distance entre les nombres a et x** le nombre $|x - a|$. Cette distance est aussi égale à $|a - x|$.
- $x \in [a - r\,;a + r]$ si et seulement si $|x - a| \leqslant r$.



Exemples

- La distance entre les nombres –5 et 4 est égale à $|4 - (-5)| = |9| = 9$.
- En prenant $a = 5$ et $r = 0{,}1$: $x \in [4{,}9\,;5{,}1]$ si et seulement si $|x - 5| \leqslant 0{,}1$, ce qui revient à dire que la distance entre les nombres x et 5 est inférieure ou égale à 0,1.

source : Barbazo

C Valeur absolue

Soient A et B deux points de la droite des réels d'abscisses respectives a et b. La **distance entre les réels** a **et** b est la distance AB, elle se calcule à l'aide de la fonction valeur absolue. On a $AB = |b - a|$.

Si M est un point quelconque d'abscisse x et si O est l'origine (c'est-à-dire le point d'abscisse 0), alors $OM = |x - 0| = |x|$.

Définition Soit un nombre réel x et M le point d'abscisse x de la droite des réels. La **valeur absolue de** x, notée $|x|$, est égale à la distance OM.

- Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$.
- Si $x < 0$, alors $|x| = -x$.

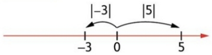
Remarque

Si r est un réel strictement positif, alors pour tout réel x :

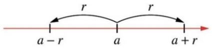
$$|x - a| \leqslant r \text{ signifie que } a - r \leqslant x \leqslant a + r.$$

La distance entre le point M d'abscisse x et le point A d'abscisse a est inférieure ou égale à r.

Exemple



$|-3| = 3$ et $|5| = 5$



source : Declic

Deux ouvrages de seconde - exercice

47 Reproduire et compléter le tableau en suivant l'exemple de la première ligne.

Intervalle	Inégalité	Schéma	Valeur absolue
$x \in [2;6]$	$-2 \leqslant x \leqslant 6$		$\lvert x-4\rvert \leqslant 2$
	$0 < x < 10$		
$x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$			
			$\lvert x+0{,}52\rvert \leqslant 10^{-2}$
			

source : Barbazo

Représenter sur un axe gradué les inégalités

73 1. $-3{,}4 < x < 10{,}3$ 2. $10^2 < x \leqslant 10^3$ 3. $y > \sqrt{5}$

74 1. $3 > x$ 2. $87{,}6 \leqslant x \leqslant 87{,}7$ 3. $4{,}56 \leqslant t$

75 1. $\lvert x-12\rvert < 3{,}5$ 2. $\lvert x-\pi\rvert < 0{,}5$ 3. $\lvert y-\sqrt{2}\rvert \leqslant \frac{1}{5}$

76 1. $\left\lvert x-\frac{6}{7}\right\rvert < \frac{1}{10}$ 2. $\lvert x+3\rvert < 0{,}5$ 3. $\lvert t-2{,}5\rvert \leqslant \frac{2}{5}$

77 1. $\lvert x+5\rvert < 2$ 2. $\left\lvert x+\frac{2}{3}\right\rvert \leqslant 0{,}3$ 3. $\lvert y+\sqrt{3}\rvert < 0{,}1$

source : Declic

Exercice 1 : copie étudiant.e de L2

Exercice 1. Dans chaque colonne du tableau ci-dessous est proposée une écriture ou une représentation d'un ensemble de réels. Compléter toutes les cases du tableau afin d'en donner une représentation équivalente.

ensemble fini de réels ou intervalle(s)	égalités ou inégalités	croquis ou schéma de l'ensemble des x considérés	valeur absolue	distance
$x \in]6, 15[$	$6 < x < 15$ 1	$-4{,}5$ $+4{,}5$; 6 $10{,}5$ 15 5	$\lvert x-10{,}5\rvert < 4{,}5$	$d(x;10{,}5) < 4{,}5$ 15
$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 2	$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ $+\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$ 0 $\sqrt{2}$ 6	$\lvert x\rvert \leq \sqrt{2}$	$d(x;0) \leq \sqrt{2}$ 16
$x \in]-11, 0[$ 3	$-11 < x < 0$ 4	$-\frac{11}{2}$ $+\frac{11}{2}$; -11 $-\frac{11}{2}$ 0	$\lvert x+\frac{11}{2}\rvert < \frac{11}{2}$	$d(x;-5{,}5) < 5{,}5$ 17
$x \in \{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$ 9	ou $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$ 10	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ 11		$d\left(x; \frac{3}{2}\right) = 1$
$x \in \{-\pi-5, \pi-5\}$ 18	$x = -\pi-5 \cup x = \pi-5$ 19		$\lvert x+5\rvert = \pi$	
$x \in [-9; 1]$ 12	$-9 \leq x \leq 1$ 13	-5 $+5$; -9 -4 1 14		$d(x; -4) \leq 5$
$x \in [\frac{5}{2}; \frac{7}{2}]$ 15	$\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$ 16	$-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$ 3 $\frac{7}{2}$	$\lvert x-3\rvert \leq \frac{1}{2}$	
$x \in]-\infty; -\frac{5}{3}] \cup [\frac{7}{3}; +\infty[$ 7	ou $\begin{cases} x \leq -\frac{5}{3} \\ x \geq \frac{7}{3} \end{cases}$ 8	-2 $+2$; $-\frac{5}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{7}{3}$		

Exercice 1 : brouillon étudiant.e de L2

Cercle 1 :

$$|x+5| = \pi$$

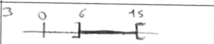
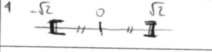
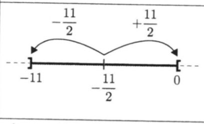
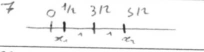
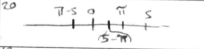
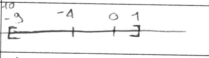
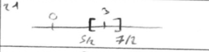
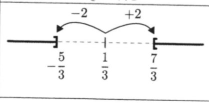
$$x = \pi - 5 \qquad x = -\pi - 5$$

$$|x-3| \leq \frac{1}{2}$$

$$x \leq \frac{7}{2} \qquad x \geq \frac{5}{2}$$

Exercice 1 : copie étudiant.e de L2

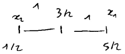
Exercice 1. Dans chaque colonne du tableau ci-dessous est proposée une écriture ou une représentation d'un ensemble de réels. Compléter toutes les cases du tableau afin d'en donner une représentation équivalente.

ensemble fini de réels ou intervalle(s)	égalités ou inégalités	croquis ou schéma de l'ensemble des x considérés	valeur absolue	distance
$x \in]6, 15[$	2 $6 < x < 15$	3 		18 $d(x, 10{,}5) \leq 4{,}5$
1 $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$	$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$	4 		17 $d(x, 0) \leq \sqrt{2}$
5 $x \in]-11, 0[$	6 $-11 < x < 0$			16 $d(x, \frac{-11}{2}) < \frac{11}{2}$
8 $x = \{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$	9 $x =$  JSP	7 		$d\left(x; \frac{3}{2}\right) = 1$
19 $x = \{\pi - 5, 5 - \pi\}$	*	20 	$\|x + 5\| = \pi$	
11 $x \in [-9, 1]$	12 $-9 \leq x \leq 1$	10 		$d(x; -4) \leq 5$
22 $x \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$	23 $\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$	21 	$\|x - 3\| \leq \frac{1}{2}$	24 $d(x, 3) \leq \frac{1}{2}$
14 $x \in]-\infty, \frac{-5}{3}] \cup [\frac{7}{3}, +\infty[$	15 $x \leq \frac{-5}{3}$ ou $x \geq \frac{7}{3}$			13 $d(x, \frac{1}{3}) \geq 2$

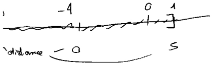
Pseudo : Portefeuille 3

$d(x; \frac{3}{2}) = 1$

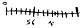
je ne sais plus si on peut faire des inégalité avec des ensembles finis.



$d(x, -4) \leq 5$

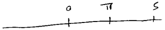


$\frac{15+6}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5$ | $+4{,}5 = 15$; $-4{,}5 = 6$



$|x+5| = \pi$

$\begin{cases} x+5 = \pi \\ -x+5 = \pi \end{cases}$



i) $x = \pi - 5$

ii) $-x = \pi - 5$

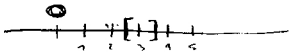
$x = 5 - \pi$

$|x-3| \leq \frac{1}{2}$

si $x = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

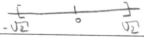
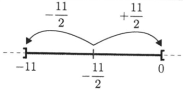
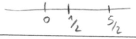
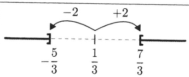
$x = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

ça marche



Exercice 1 : copie étudiant.e de L2

Exercice 1. Dans chaque colonne du tableau ci-dessous est proposée une écriture ou une représentation d'un ensemble de réels. Compléter toutes les cases du tableau afin d'en donner une représentation équivalente.

ensemble fini de réels ou intervalle(s)	égalités ou inégalités	croquis ou schéma de l'ensemble des x considérés	valeur absolue	distance
$x \in]6, 15[$	$6 < x < 15$			
$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$	$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$			
$x \in]-11, 0[$	$-11 < x < 0$			
$x \in \{1/2, 5/2\}$	$x = 1/2$ $x = 5/2$		$\lvert x - \frac{3}{2} \rvert = 1$	$d\left(x; \frac{3}{2}\right) = 1$
$x \in \{\pi - 5, -\pi - 5\}$	$x = \pi - 5$ ou $x = -\pi - 5$		$\lvert x + 5 \rvert = \pi$	$d(x, -5) = \pi$
$x \in [-9; 1]$	$-9 \leq x \leq 1$		$\lvert x + 4 \rvert \leq 5$	$d(x; -4) \leq 5$
$x \in [\frac{5}{2}; 7/2]$	$\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$		$\lvert x - 3 \rvert \leq \frac{1}{2}$	$d(x, 3) \leq \frac{1}{2}$
$x \in]-\infty; -\frac{5}{3}]$ $\cap [7/3; +\infty[$	$x \leq -5/3$ et $x \geq \frac{7}{3}$			

Indiquer l'ordre de ...

Exercice 1 : brouillon étudiant.e de L2

$d(x; \frac{3}{2}) = 1$

$|x-3| \leq \frac{1}{2}$

$x-3 \leq \frac{1}{2} \iff x \leq \frac{1}{2}+3 = \frac{7}{2}$

$-x+3 \leq \frac{1}{2} \iff x \geqslant 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$|x+5| = \pi$

$x+5 = \pi \iff x = \pi - 5$

$-x-5 = \pi \iff -x = \pi + 5$

$x = -\pi - 5$

$x - \frac{3}{2} = 1 \iff x = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$-x + \frac{3}{2} = 1 \iff x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$|x+4| \leq 5$

$x+4 \leq 5 \iff x \leq 5-4 = 1$

$-x-4 \leq 5 \iff -x \leq 5+4$

$x \geqslant -9$

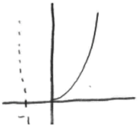
Injectif - Surjectif : le plus dur c'est la surjectivité

Confusion image et antécédent lors de la formalisation

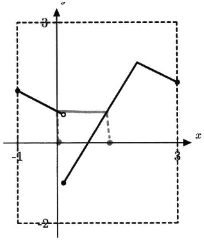
2. $g : x \mapsto x^2, E = \mathbb{R}, F = [0, +\infty[$;

- Pas injective pour la même raison qu'au 1
- Surjective. $\forall x \in F \quad \exists m$ tq $f(x) = m$
- Pas bijective car non injective

$x^2 = y \iff y = \pm\sqrt{x}$



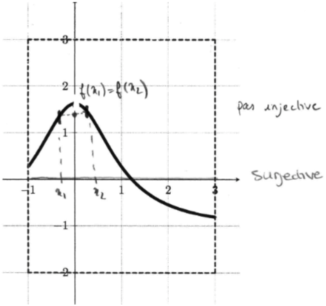
Mauvaise interprétation des exemples génériques donnés dans l'énoncé



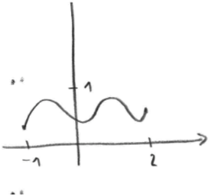
Surjective

2 antécédents pour une même image

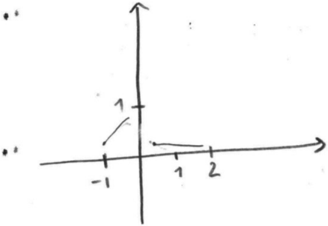
Surjectif vu comme « pas de trou dans l'ensemble de départ »

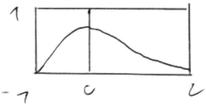


1. injective et non surjective de $[-1, 2]$ dans $[0, 1]$;



2. surjective et non injective de $[-1, 2]$ dans $[0, 1]$;





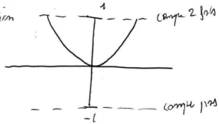
Un exemple de visualisation des ensembles de départ et d'arrivée

En s'inspirant de ce qui est proposé dans le tableau précédent, justifier si les applications ci-dessous sont ou non injective/surjective/bijective **en argumentant dans deux registres, dont l'un graphique.**

1. $f : x \mapsto x^2$, $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$;

non injective : → $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

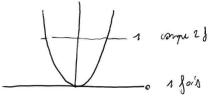
non surjective : → $x^2 = -1$ n'a pas de solution



2. $g : x \mapsto x^2$, $E = \mathbb{R}$, $F = [0, +\infty[$;

non inj $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ $x = -1$

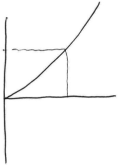
Surjective $x^2 \mapsto x$
$\mathbb{R} \to R^+$ a une image ≥ 0



3. $h : x \mapsto x^2$, $E = [0, +\infty[$, $F = \mathbb{R}$;

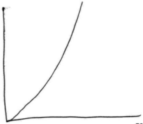
injective → croissante monotone sur E

non surjective ↳ $x^2 = -1$ pas de solution



4. $l : x \mapsto x^2$, $E = [0, +\infty[$, $F = [0, +\infty[$.

Bijective → croissante monotone ds E
→ positive ou nul



Test «croquis» v1 – printemps 2022

page 4/6