Quelques remarques à propos du domaine grandeurs et mesures dans le projet de programme

Christine Chambris, LDAR, UCP
CS des IREM, 29 mai 2015

Le domaine grandeurs et mesures

- Deux axes didactiques pour le domaine au cycle 2 :
  - Articulation de l'enseignement des grandeurs et des nombres. Plus précisément, la possibilité de construire les nombres à l'école à partir des grandeurs, incluant les opérations et la proportionnalité.
  - Apprentissage des différentes espèces de grandeurs « usuelles » afin de développer le rapport « quantitatif » au monde : longueur, masse, durée, contenance, prix, taille des collections.
- Un choix qui passe par un « rapprochement » des domaines « grandeurs et mesures » et « nombres et calculs »
  - Déplacement du domaine « grandeurs et mesures »
  - Plusieurs mentions de grandeurs continues dans « nombres et calculs » : longueur, masse, mesure, unité, association droite graduée-unité…
- Un choix qui revèle des besoins

Des besoins mathématiques « théoriques » fondamentaux pour les institutions d’enseignement élémentaire

- Une définition des grandeurs, adaptée
- Articuler repérage et mesurage
- Des mots pour parler des grandeurs

Une définition des grandeurs, adaptée

- Il existe plusieurs cadres de référence :
  - Métrologie, physique. Propriété d'un phénomène qu'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence (il faut les nombres)
  - Mathématiques (« base » : comparaison, addition qui agrandit : $\mathrm{a} < \mathrm{b} \Leftrightarrow \exists c \; b = a + c$, « suppléments » : division par un entier, axiomes d'Archimède, borne sup ou IE)
- Quel cadre mathématique pour les grandeurs pour l'école (et le début du collège) ? Une définition des grandeurs :
  - Qui permet de construire les nombres à partir des grandeurs : nécessité de relier ordre et addition sans passer par les nombres.
  - Qui permet une approche de la proportionnalité sans utiliser le coefficient et de prendre en compte les objets. Par exemple, pour :
    - représenter des grandeurs sur un axe : deux objets de même grandeur sont représentés par des segments de même longueur
    - interpréter les distances sur une carte : 5 km est représenté par 1 cm, considérer les mélanges comme actions sur des objets, etc.
  - Qui prépare l'avenir… : extensions possibles vers de la pré-algèbre dès le CP (Davydov 1975, Dougherty & al., 2007, Gerhard), modélisation par les grandeurs

- Pour préparer l'avenir… (enseignement des probabilités) :
  - Treiner 2011 Variabilité, incertitude, erreur, BUP, vol 105, n°930, pp.9-14. Une approche des variables aléatoires par la mesure des grandeurs. (voir aussi actes de la CORFEM)

Articuler repérage et mesurage

- Grandeur repérable / grandeur mesurable ? Instant / durée ?
- Il est nécessaire de pouvoir parler des éléments suivants et de les indiquer aux enseignants :
- Instant et durée
  - Il est 2 heures : indique qu'il s'est écoulé une durée de 2h depuis un instant pris comme origine (midi ou minuit). C'est une mesure de durée qui permet de repérer un instant. De même pour une date, « nous sommes le 29 mai 2015 » indique qu'il s'est écoulé 2014 années et quelques jours depuis « l'instant 0 ».
  - Il semble essentiel que les élèves l'apprennent.
  - Il semble essentiel que les enseignants sachent que :
    - les instants sont constitutifs de la notion de durée,
    - un instant est repéré par une durée écoulée à partir d'un instant pris comme origine
    - les instruments de repérage dans le temps sont des instruments de mesure des durées
- Longueur et position
  - Une abscisse est une mesure de longueur sur une demi-droite (ou une droite), l'unité est la distance entre les points d'abscisse 0 et 1.

Des mots pour parler des grandeurs

- Espèce de grandeur (Grandeurs de même espèce) :
  - Curieusement mise en débat dans les instructions de 1945
  - Devenue rare en français, après une présence continue pendant plusieurs siècles
  - Expression utilisée incidemment dans de nombreux textes sur les grandeurs, même si des auteurs indiquent que ce n'est pas vraiment simple de définir « physiquement » une espèce de grandeur
  - Présente dans le document accompagnement « grandeurs et mesures » (2007) pour le collège
  - Très présente en anglais, encore actuellement : « kind of quantity »
  - « kind of quantity » / « **nature** de grandeur » (VIM : aspect commun à des grandeurs mutuellement comparables), voire « catégorie de grandeur » (GUM) / la COPIRELEM – CFEM proposent « type de grandeur ». Faut-il vraiment inventer un nouveau nom ?
- Deux expressions nécessaires dans les programmes pour dire des choses aux enseignants par exemple :
  - Pour parler du « lexique spécifique à chaque espèce de grandeur » (→socle)
  - Pour indiquer qu'on compare, additionne deux grandeurs de même espèce
  - Pour décrire les grandeurs en proportion et les problèmes différents qui se posent : si elles sont de même espèce (agrandissement) ou pas (vitesse), dans le premier cas exprimées dans la même unité (recette en g) ou non (carte), problèmes relatifs notamment au « coefficient », relations de linéarité...
  - Pour indiquer qu'on étudie 3 nouvelles espèces de grandeur (aire, angle, volume) au cycle 3

Quelques évolutions souhaitables pour le projet de programme C2 ?

- Etre plus explicite, supprimer ce qui trouble la lecture et qui n'est pas indispensable, alléger les formulations du texte du programme de façon à faciliter la compréhension, supprimer le point sur grandeurs discrètes, continues
- mais ne pas supprimer le mot « espèce » (de même espèce, espèce de grandeur).
- Créer un hypertexte
  - qui contient une définition mathématique des grandeurs et
  - qui dit quelque chose sur le repérage (instant, abscisse),
  - qui dit quelque chose sur la proportionnalité (au niveau des objets).
- Un hypertexte :
  - sur l'étude du système métrique en lien avec la numération
  - sur contenance à préférer à capacité
- Faut-il indiquer l'insuffisance des expressions « grandeurs mesurable / repérable », faut-il supprimer l'expression grandeur mesurable (présente dans le domaine calcul au cycle 2 et aussi au cycle 3 dans deux domaines) ?
- … Besoin d'articuler les hypertextes, aussi, entre les deux cycles.

Articulation cycle 2 / cycle 3 pour les grandeurs : des différences entre cycle 2 et cycle 3

- Places du domaine GM dans les projets de programme.
- Modélisation, problèmes : liés aux grandeurs au C2 pas (clairement) au C3
- Opérations sur les grandeurs au C3 :
  - opérations sur les grandeurs : absentes à part une phrase dans le chapeau de GM « les opérations sur les grandeurs permettent également d'aborder les opérations sur leurs mesures »
  - additivité des grandeurs, quantième d'une grandeur, fractions de grandeur : absents
  - écart pour relier ordre et l'addition : absent
- D'autres points spécifiques au C3 :
  - Proportionnalité : abordée comme relation entre objets dans GM au C2, mentionnée comme relevant du numérique (sans mention du coeff.) avec des connaissances venues d'autres champs
  - Sur la droite graduée au C3, absence d'éléments explicites sur :
    - graduation et mesure d'une longueur, unité sur la droite graduée
    - graduation et proportionnalité.
  - « notion de durée », « repérage dans le temps »… relation entre durée et repérage dans le temps ?
  - « Enrichir la notion de grandeur »… apprendre trois nouvelles espèces de grandeur ?
  - Horloges à aiguilles ? Représentation « directe » du temps par une longueur ou un angle. Situation fondamentale de proportionnalité.
  - « adapter le choix de l'unité en fonction de l'objet (ordre de grandeur) ou en fonction de la précision souhaitée. » Entoure la bonne réponse : une table est haute de 70 cm / 70 m.

Annexe : Exemple d'une axiomatique pour les grandeurs, adaptée (et à transposer)

- Kolmogorov (Quantity. Grande encyclopédie soviétique. 1951)
- (1) for any *a* and *b*, one and only one of three relationships exists: either $a = b$, or $a < b$, or $b < a$;
- (2) if $a < b$ and $b < c$, then $a < c$ (transitivity of the relationships "less than" and "greater than");
- (3) for any two quantities *a* and *b* there exists a uniquely defined quantity $c = a + b$;
- (4) $a + b = b + a$ (commutativity of addition);
- (5) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (associativity of addition);
- **(6) $a + b > a$ (monotonicity of addition);**
- **(7) if $a > b$, then there exists one and only one quantity *c* for which $b + c = a$ (possibility of subtraction);**
- (8) for any quantity *a* and natural number *n* there exists a quantity *b* such that $nb = a$ (possibility of division);
- (9) for any quantities *a* and *b* there exists a natural number *n* such that $a < nb$. This property is called Eudoxius' axiom or Archimedes' axiom. **The theory of measurement of quantities as developed by the ancient Greek mathematicians is based on this property, as are the more elementary properties (l)-(8).**
- In we take any length *l* as a standard unit, then the system *s'* of all lengths within a rational relationship to / satisfies the requirements of properties (l)-(9). The existence of incommensurable segments (the discovery of which has been ascribed to Pythagoras, sixth century B.C.) indicates that the system *s'* still does not encompass the system *s* of all lengths in general.
- In order to obtain an entirely complete theory of quantities, one or another supplementary axiom of continuity must be added to the requirements of (l)-(9)—for example:
- (10) if the sequences of quantities $a_1 < a_2 < \ldots < \ldots < b_2 < b_1$ have the property that $b_n - a_n < c$ for any quantity *c* at a sufficiently large number *n*, there exists a unique quantity *x*, which is greater than all a_n and less than all b_n.
- Rouche (1994) : retient exactement les mêmes axiomes que Kolmogorov, dans le même ordre… mais **il définit auparavant la relation "avoir même grandeur que" sur les objets, un pré-ordre et une addition sur les objets**. Il s'arrête après (7). (un peu plus d'axiomes dans Bourbaki, à vérifier)