Actes du colloque
CORFEM 2021

XXVIIe Colloque CORFEM pour les professeurs et les formateurs de mathématiques

La CORFEM, COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques du second degré est une commission inter-IREM qui répond à des besoins, voire à des nécessités :

- Echanger sur la formation initiale des enseignants de mathématiques (réformes successives, dispositifs « hétérogènes »)
- Capitaliser, valoriser et diffuser des ressources et des outils pour la formation des enseignants de mathématiques

Cette commission regroupe des formateurs – PFA, PRCE, PRAG ou enseignants-chercheurs – formateurs en ESPE, qui souhaitent réfléchir sur les stratégies de formation, produire des documents et mutualiser des ressources sur la formation et l'enseignement des mathématiques, afin d'améliorer leur action auprès des étudiants se destinant au métier de professeur de mathématiques (masters MEEF, DU…)

La CORFEM se donne pour buts d'accompagner la formation des formateurs d'enseignants ou de futurs enseignants de mathématiques, ainsi que d'échanger, de mutualiser et d'élaborer un ensemble de ressources pour la formation.

Le présent document constitue les actes du 27ème colloque de la CORFEM, qui s'est déroulé les 10 et 11 juin 2021 en visioconférence.

Les thèmes abordés dans ces actes :

- Thème 1 : Raisonner, prouver, démontrer… en classe et en formation
- Thème 2 : Décrire et comprendre les pratiques enseignantes – impact sur la formation

Table des matières

Thème n°1 : Raisonner, prouver, démontrer… en classe et en formation

Thème n°2 : Décrire et comprendre les pratiques enseignantes – impact sur la formation

POUVOIR GENERIQUE D'UNE PREUVE

Véronique BATTIE[1]

Résumé. Les nouveaux programmes du Lycée mettent l'accent sur l'exploitation en classe de plusieurs preuves d'un même résultat, avec mention de plusieurs niveaux de détail. Dans cette présentation, nous tentons d'apporter un éclairage épistémologique et didactique propre aux preuves arithmétiques. Cela nous amène à introduire l'idée de pouvoir générique d'une preuve dans le prolongement de travaux internationaux en philosophie et didactique de la preuve en mathématiques.

Introduction

Avec les nouveaux programmes du Lycée, apparaît une claire invitation à exploiter en classe plusieurs preuves d'un même résultat mathématique. Sur la plateforme EDUSCOL du Ministère de la l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports, deux ressources ont été éditées avec le même intitulé « Raisonnement et démonstration » pour la classe de Seconde voie générale et technologique d'une part, et pour la classe de Première voie générale d'autre part. Dans ces deux ressources, dans une perspective de pistes à donner pour différencier l'enseignement, on peut lire :

> « Pour prendre en compte la diversité des publics et des fonctionnements intellectuels, il est profitable lorsque c'est possible d'envisager plusieurs démonstrations d'un même résultat. Cela peut être mis en pratique avec des raisonnements différents, en choisissant des registres variés (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel), en recourant à des outils logiciels diversifiés. L'élève peut alors se voir proposer de choisir celle des démonstrations qu'il notera dans son cahier de cours. » (Eduscol, 2019)[2]

La ressource pour la classe de Seconde est un document de 23 pages dont 16 sont dédiées à des problèmes et plusieurs preuves associées à chacun d'entre eux. La ressource pour la classe de Première comporte quant à elle 29 pages dont 19 sont dédiées à cela.
Dans le cadre de cette invitation, la proposition de travailler les démonstrations suivant « plusieurs niveaux de détail » est à souligner :

> « Il peut être intéressant également de donner les démonstrations en plusieurs niveaux de détail :
>
> - Niveau 1 : seulement le plan et les idées générales ;
> - Niveau 2 : démontrer chaque étape du plan (avec un partage des tâches différencié au sein de la classe, suivi d'une mise en commun) ;
> - Niveau 3 : démonstration complète, en évitant une longueur excessive. » (Eduscol, 2019)

De plus, en écho à la conférence de N.Balacheff lors du précédent colloque CORFEM (Balacheff, 2019), il est remarquable que « l'exemple générique » soit mentionné :

> « Une autre piste consiste à démontrer un résultat sur un exemple générique. Il s'agit d'un exemple numérique ou d'un cas particulier dont le traitement n'entache pas une démonstration générale, en ce sens que les outils mobilisés et les modes de raisonnement sont assez facilement transférables au cas général. Dans certains cas, on peut s'en tenir à cet exemple en précisant qu'on admet le cas général. » (EDUSCOL, 2019)

---

[1] Université de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, S2HEP (EA 4148), Département de mathématiques.

[2] EDUSCOL. (2019). Raisonnement et démonstration. Ressources d'accompagnement du programme de Seconde voies technologique et générale et du programme de Première voie générale.

Avec cette actualité des programmes du Lycée, des questions épistémologiques[3] et didactiques émergent :

- Comment mener une analyse comparative de preuves d'un même résultat ? quels critères adopter ?
- Quel sens épistémologique donner à « plan », « étape du plan », « idées générales » (Eduscol, 2019) ?
- Dans la perspective d'aller vers le « général » (Eduscol 2019) : "Not all proofs are equally amenable to a genuine generic version. Can we characterize the proofs (or parts thereof) that are so amenable?" (Leron, Zaslavsky, 2013)
- Pourquoi et comment mettre en scène en classe ou TD une activité mettant en scène plusieurs preuves d'un même résultat (activité multipreuves) ?

L'enjeu de cette présentation est d'essayer d'apporter des éléments de réponse dans le cas de l'arithmétique.
Dans une première partie, nous proposerons une analyse de plusieurs preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Cela nous amènera à introduire l'idée de pouvoir générique d'une preuve en écho aux travaux du philosophe M. Steiner (1978). Dans un second temps, nous présenterons un exemple d'activité multi-preuves à la transition Secondaire-Supérieur. En guise de conclusion, nous reviendrons sur les ressources EDUSCOL mentionnées dans cette introduction.

Vers une définition du pouvoir générique d'une preuve

Dans le raisonnement en arithmétique, nous distinguons deux dimensions épistémologiques : la dimension organisatrice et la dimension opératoire (Battie, 2009). La première s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée. Cette dimension organise et structure les différentes étapes du raisonnement. Outre les figures usuelles du raisonnement mathématique, en particulier le raisonnement par l'absurde, on identifie au niveau de cette dimension le raisonnement par récurrence (et autres formes d'exploitation de la propriété de bon ordre de l'ensemble $\mathbb{N}$), la réduction à l'étude d'un nombre fini de cas (telle la disjonction de cas) et le jeu d'extension-réduction (propre aux anneaux factoriels). La dimension opératoire quant à elle est relative à tout ce qui relève des manipulations de calcul (au sens le plus large) opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice). Nous identifions par exemple les formes de représentation choisies pour les objets (telle la décomposition unique en produit de nombres premiers en appui sur le théorème fondamental de l'arithmétique, les congruences), l'utilisation de théorèmes, les manipulations algébriques et l'ensemble des traitements relatifs à l'articulation entre l'ordre divisibilité (anneau $\mathbb{Z}$) et l'ordre naturel (ensemble bien ordonné $\mathbb{N}$).

Ces deux dimensions sont complémentaires et en interaction, et permettent d'analyser l'objet preuve à la fois en tant que produit et en tant que processus ((Battie, 2007) et (Gardes, 2013)).

Au sein du vaste champ des recherches en didactique des mathématiques dédiées à la preuve ((Hanna, Knipping, 2020) et (Stylianides, Harel (Eds) 2018)), ce sont les travaux de U.Leron (1983) sur la structuration des preuves qui font le plus écho à notre outil épistémologique. Néanmoins, l'analogie se limite aux preuves ayant un seul niveau en termes de dimension organisatrice (Battie, 2007). Et, selon nous, sa structuration ne donne pas accès à ce que donne à voir une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire, à savoir la différence de

[3] Au sens de M. Artigue (1989)

nature du travail mathématique selon qu'il s'agisse d'une dimension ou l'autre et les interactions entre ces deux dimensions.

Analyse de preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Nous avons sélectionné quatre preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et nous allons les analyser en termes de dimensions organisatrice et opératoire dans une perspective comparative. Puis nous prolongerons cette étude en l'inscrivant dans une problématique de généralisation ; ce sera l'occasion de préciser en préalable le sens avec lequel nous allons vers le « général » (EDUSCOL, 2019).

Analyse comparative de preuves en termes de dimensions organisatrice et opératoire

Nous envisageons quatre preuves arithmétiques qui ont même dimension organisatrice principale, à savoir un raisonnement par l'absurde, et même traitement opératoire premier, à savoir élever au carré pour rendre disponibles les outils du champ mathématique concerné. A partir de là, les preuves vont différer en termes de dimensions organisatrice et opératoire.

Nous proposons les deux premières preuves suivantes :

> **Preuve 1.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$; on suppose de plus que la fraction est irréductible. Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a $2b^2 = a^2$ donc a^2 est pair ; par contraposée on montre que a l'est aussi: si a n'est pas pair alors il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$ et donc a^2 est impair car égal à $2 \times 2(k^2 + k) + 1$. Il existe donc un entier a' non nul tel que $a = 2a'$; d'où $2b^2 = 4(a')^2$ ou encore $b^2 = 2(a')^2$. Comme précédemment, on en conclut que b est pair. Ceci contredit le caractère irréductible de la fraction. En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.
>
> **Preuve 2.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a $2b^2 = a^2$ donc a^2 est pair ; par contraposée on montre que a l'est aussi: si a n'est pas pair alors il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$ et donc a^2 est impair car égal à $2 \times 2(k^2 + k) + 1$. Il existe donc un entier a' non nul tel que $a = 2a'$; d'où $2b^2 = 4(a')^2$ ou encore $b^2 = 2(a')^2$. Comme précédemment, on en conclut que b est pair. Ainsi, à partir des entiers a et b, on obtient des entiers naturels a' et b' tels que $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$, $a' < a$ et $b' < b$. On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est en contradiction avec « toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie ». En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Ces deux preuves ont en commun, mot/symbole pour mot/symbole, l'étape opératoire au sein de laquelle le caractère pair des entiers a et b est démontré (partie en italique). Et ainsi, la dimension organisatrice de ces deux preuves se complexifie avec l'apparition d'un raisonnement contraposée pour démontrer l'implication énonçant que si le carré d'un entier est pair alors l'entier lui-même l'est aussi. Elles diffèrent néanmoins dans le choix opératoire de travailler ou non sur la fraction $\frac{a}{b}$ via son représentant irréductible : la preuve 1 spécifie l'objet fraction, la preuve 2 ne le fait pas. Dans le cadre des interactions entre dimensions organisatrice et opératoire, la dimension organisatrice principale de la preuve 2 est spécifiée : c'est un raisonnement par l'absurde de type descente infinie qui est suivi. Et ainsi, la nature de la contradiction à laquelle on aboutit n'est pas la même pour chacune de ces preuves. Dans le cas de la preuve 2, « toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie » est contredit. Dans le cas de la preuve 1, on arrive à une proposition et sa négation : « la fraction est irréductible » et « la fraction est réductible (en divisant par 2 numérateur et dénominateur) ».

Pour commencer à expliciter le lien avec les travaux de M.Steiner (1978), nous donnons ci-après l'une des preuves qu'il donne pour la non rationalité de $\sqrt{2}$:

> Consider the Pythagorean proof that the square root of 2 is not rational: if $a^2 = 2b^2$, with $\frac{a}{b}$reduced to lowest terms, then a^2 and thus a itself have to be even; thus a^2 must be a multiple of 4, and b^2 - and thus b - mutilples of 2. Since therefore $a^2 = 2b^2$ implies that both a and b must be even, contradicting our (allowable) stipulation that $\frac{a}{b}$ be reduced to lowest terms, it can be true, q.e.d. The key point here is the proposition that if a^2 is even so is a. This can be verified by squaring an arbitrary odd number $2q + 1$and showing that the result must be odd. » (Steiner, 1978)

En termes de dimensions organisatrice et opératoire, il s'agit d'une preuve équivalente à la preuve 1, l'accent étant mis sur l'implication énonçant que si le carré d'un entier est pair alors l'entier lui-même l'est aussi. Nous reviendrons sur ce point dans la suite de notre présentation.

Nous poursuivons avec la preuve suivante :

> **Preuve 3.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$; on suppose de plus que la fraction est irréductible. Avec l'égalité précédente on $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et, $\frac{a}{b}$ étant irréductible, $\frac{a^2}{b^2}$ l'est aussi (on admet que si a et b n'ont pas de facteur commun alors a^2 et b^2 n'en ont pas non plus). L'égalité $2 = \frac{a^2}{b^2}$ impose $b^2 = 1$ donc $a^2 = 2$, ce qui est en contradiction avec « 2 n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$ ». En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

De même que la preuve 1, l'objet fraction est spécifié via son représentant irréductible mais le raisonnement ensuite sur la fraction $\frac{a^2}{b^2}$ et non sur les entiers en jeu. Cette différence du côté de la dimension opératoire conduit à une contradiction inédite par rapport aux preuves 1 et 2 dans la mise en œuvre du raisonnement par l'absurde. De plus, contrairement aux preuves 1 et 2, la dimension organisatrice ne se complexifie pas. Et cela s'inscrit dans les interactions entre dimensions organisatrice et opératoire car la non-complexification de la dimension organisatrice a pour origine une encapsulation[4] au niveau de la dimension opératoire : une « boîte noire » apparaît en admettant l'implication « si a et b n'ont pas de facteur commun alors a^2 et b^2 n'en ont pas non plus ».

Pour finir, nous donnons ci-après une quatrième preuve :

> **Preuve 4.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ d'où $2b^2 = a^2$. On appelle α l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de a et β celui de b. D'après l'égalité précédente on a $1 + 2\beta = 2\alpha$, ce qui est en contraction avec « un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair ». En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.
>
> **Preuve 4 écrite avec la notation propre à la valuation p-adique.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ d'où $2b^2 = a^2$. Ainsi $1 + 2v_p(b) = 2v_p(a)$, ce qui est en contraction avec « un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair ». En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Dans cette preuve, ni l'objet n'est spécifié (on ne travaille pas sur le représentant irréductible de la fraction comme dans les preuves 1 et 3), ni le raisonnement par l'absurde ne l'est (comme cela est fait dans la preuve 2). Contrairement aux preuves 1 et 2, la dimension organisatrice ne

[4] Nous empruntons ce mot à l'informatique sans qu'ici l'information soit intentionnellement cachée.

se complexifie pas et, contrairement à la preuve 3, cela ne renvoie pas à une encapsulation de la dimension opératoire (aucun résultat n'est admis en cours de route). Une spécificité apparaît du côté de la dimension opératoire : on travaille sur les entiers via leur décomposition unique entre produit de nombres premiers.

Pour continuer à faire le lien avec les preuves mises en scène dans les travaux de M.Steiner, nous reproduisons l'extrait suivant :

> « By using the Fundamental Theorem of Arithmetic - that each number has a unique prime power expansion - we can argue for the irrationality of the square root of two swiftly and decisively. For in the prime power expansion of a^2 the prime 2 will necessarily appear with an even exponent (double exponent it has in the expansion of a), while in $2b^2$ its exponent must needs be odd. So a^2 never equals $2b^2$, q.e.d. » (Steiner, 1978)

Cette preuve est équivalente à la preuve 4 en termes de dimensions organisatrice et opératoire.

Analyse comparative de preuves dans une perspective de généralisation

Un résultat général en jeu est le suivant : Soit n un entier naturel, une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{n}$ soit rationnel est que n soit un carré d'entier. L'enjeu est de prouver que la condition est nécessaire. Et nous posons la problématique épistémologique suivante : quelle(s) preuve(s) parmi les quatre preuves étudiées donne(nt) l'accès le plus aisé à une preuve du caractère nécessaire de la condition mentionnée ? C'est en ce sens que nous prolongeons dans une perspective de généralisation l'analyse comparative précédemment menée.

Revenons sur l'étape opératoire des preuves 1 et 2 :

> Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a $2b^2 = a^2$ donc a^2 est pair ; par contraposée on montre que a l'est aussi : si a n'est pas pair alors il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$ et donc a^2 est impair car égal à $2 \times 2(k^2 + k) + 1$. Il existe donc un entier a' non nul tel que $a = 2a'$; d'où $2b^2 = 4(a')^2$ ou encore $b^2 = 2(a')^2$. Comme précédemment, on en conclut que b est pair.

On peut l'exploiter dans le cas d'un autre entier non carré parfait mais la dimension organisatrice se complexifie. Illustrons cela avec 3 dans le cadre de l'écriture d'une preuve arithmétique de l'irrationalité de $\sqrt{3}$: il s'agit de démontrer par contraposée que pour tout entier a, si a^2 est divisible par 3 alors a est divisible par 3. Ainsi, une disjonction de cas apparaît pour considérer la non-divisibilité par 3 et une nouvelle dimension organisatrice s'imbrique dans le raisonnement par contraposée, ce dernier s'inscrivant dans un raisonnement par l'absurde. C'est ce qu'exprime à sa façon M.Steiner :

> « Consider the Pythagorean proof [preuve 1] that the square root of 2 is not rational […] The key point here is the proposition that if a² is even so is a. […] Indeed for each prime p, one can separately verify that if p divides a² it must divide a also, though the proofs become more and more complex […] » (Steiner, 1978)

On comprend alors en quoi il est problématique de généraliser à partir des preuves 1 et 2. Et pour mettre en relief les interactions susceptibles d'exister entre les dimensions organisatrice et opératoire, soulignons que si l'implication en jeu dans l'étape opératoire commune aux preuves 1 et 2 est démontrée en utilisant le premier théorème d'Euclide[5], d'une part aucune complexification de la dimension organisatrice n'apparaît pour traiter le cas d'un autre entier non carré parfait, et d'autre part on peut accéder à une preuve du résultat général.

[5] Appellation en référence à (Hardy, Wright, 2007) : Si p est un nombre premier et p divise ab alors p divise a ou p divise b.

Quant aux preuves 3 et 4, nous accédons respectivement aux preuves suivantes du résultat général :

> Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, on suppose de plus que la fraction est irréductible. Avec l'égalité précédente on $n = \frac{a^2}{b^2}$ et, $\frac{a}{b}$ étant irréductible, $\frac{a^2}{b^2}$ l'est aussi (on admet que si a et b n'ont pas de facteur commun alors a^2 et b^2n'en ont pas non plus). L'égalité $n = \frac{a^2}{b^2}$ impose $b^2 = 1$ donc $a^2 = n$.
>
> Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ d'où $nb^2 = a^2$. Supposons par l'absurde que n ne soit pas un carré : il existe alors p premier tel que $v_p(n)$ impair. Et d'après l'égalité précédente on a $v_p(n) + 2v_p(b) = 2v_p(a)$, ce qui est en contradiction avec « un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair ». En conclusion, n est un carré.

La dimension organisatrice de la preuve obtenue à partir de la preuve 4 est plus complexe que celle obtenue à partir de la preuve 3. En effet, un raisonnement par l'absurde apparaît. Néanmoins, on rappelle que du côté de la dimension opératoire de la preuve 3, un résultat est admis et on retrouve cette caractéristique dans la preuve générale. Si on s'impose de ne pas admettre de résultat au cours de la preuve (mis à part les théorèmes fondamentaux tel le théorème fondamental de l'arithmétique en jeu dans la dimension opératoire de la preuve 4), la dimension organisatrice de la preuve obtenue à partir de la preuve 3 est susceptible de se complexifier suivant comment on démontre le résultat admis. Par exemple, on peut suivre un raisonnement par contraposée en démontrant que « si a^2 et b^2 ont un facteur en commun alors a et b aussi ». Du côté de la dimension opératoire, on pourra utiliser le premier théorème d'Euclide dont le lien avec le théorème fondamental de l'arithmétique est fort.

Avec l'exploitation aisée de la preuve 4 par rapport aux preuves 1 et 2 pour une généralisation, nous reprenons et complétons la citation précédente de M. Steiner :

> « Consider the Pythagorean proof [preuve 1] that the square root of 2 is not rational […] The key point here is the proposition that if a² is even so is a. […] Indeed for each prime p, one can separately verify that if p divides a² it must divide a also, though the proofs become more and more complex […]. But by using the Fundamental Theorem of Arithmetic [preuve 4] […] we can argue for the irrationality of the square root of two swiftly and decisively.[…] Generally, the same proof shows that a² can never equals nb², unless n is a perfect square (so that all exponents in its prime power expansion will be even). » (Steiner, 1978)

Et c'est en ce sens que M.Steiner qualifie l'équivalent (en termes de dimensions organisatrice et opératoire) de la preuve 4 de « generalizable proof ». C'est D.Tall (1979) qui introduira en didactique des mathématiques cette idée sous la nouvelle appellation « generic proof ». Dans l'Histoire de la didactique des mathématiques, l'idée de preuve générique est antérieure à celle d'exemple générique ((Mason, Pimm, 1984), (Balacheff, 1988)).

Pouvoir générique d'une preuve

L'analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire des preuves 1 à 4 faite dans une perspective de généralisation, nous amène à introduire l'idée de pouvoir générique d'une preuve. Ici, il s'identifie au sein de la dimension opératoire de la preuve 4 : la forme de représentation choisie pour travailler sur les entiers, à savoir leur écriture unique en produit de nombre premiers. Et une hiérarchie des preuves en termes de pouvoir générique apparaît. Par ordre croissant on a ex-æquo les preuves 1 et 2, puis la preuve 3, et ensuite la preuve 4.

Le mode d'emploi est le suivant :

1. On procède à une « dé-encapsulation » : on prouve les résultats admis dans la dimension opératoire de chaque preuve.
2. On évalue ensuite le niveau de complexité en termes de dimensions organisatrice et opératoire de la preuve résultat de ce procédé ; comme on l'a montré ici, un des critères essentiels pour jauger ce niveau de complexité est le nombre d'imbrications au sein de la dimension organisatrice.
3. On suit la règle suivante : moins la preuve obtenue par dé-encapsulation est complexe, plus cette preuve est susceptible d'avoir un pouvoir générique élevé.

Pour tenter de définir de façon décontextualisée l'idée de pouvoir générique, nous pouvons faire parler l'écho avec les travaux de M. Steiner :

> « Our proof that $a^2 = 2b^2$, which uses the prime power expansions of a and b (and 2) [preuve 4], conforms to our description, since the prime power expansion of a number is a characterizing property. It's easy to see what happens, moreover, when 2 becomes 4 or any other square; the prime power expansion of 4, unlike that of 2, contains 2 raised to an even power, allowing $a^2 = 2b^2$. In the same way we get a general theorem: the square root of n is either an integer or irrational. Generalizing further, almost the same reasoning gives us the same for the p^{th} root of n. » (Steiner, 1978)

Ce que M. Steiner appelle la « characterizing property » est précisé dans la suite de sa publication :

> « My proposal is that an explanatory proof makes reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the theorem, such that from the proof it is evident that the result depends on the property. »

Ainsi, nous proposons d'exprimer le pouvoir générique d'une preuve en termes d'accessibilité (distance) à ce que M. Steiner (1978) défini comme la « characterizing property », après avoir procédé à la dé-encapsulation en jeu dans l'application du mode d'emploi présenté précédemment.

Il est toutefois important de clarifier que l'introduction (de nature épistémologique) de l'idée de pouvoir générique d'une preuve s'inscrit dans une perspective didactique centrée sur la preuve et le processus de preuve, et non dans une perspective philosophique d'explication mathématique dans laquelle s'inscrit les travaux de M.Steiner.

Activité multi-preuve à la transition Secondaire-Supérieur

Dans le prolongement de l'analyse épistémologique faite précédemment, nous présentons une activité multi-preuves conçue à partir des preuves 1 à 4. Elle est proposée à la transition Secondaire-Supérieur en invitant les élèves-étudiants à travailler en groupes.

Conception de l'activité

L'activité est composée de deux séances : les preuves ne sont fournies que lors de la deuxième séance. Les consignes formulées auprès des élèves-étudiants sont les suivantes pour la première séance :

> « On rappelle qu'un nombre est rationnel si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a entier et b entier naturel non nul. »
>
> 1) Selon votre groupe, le nombre $\sqrt{2}$ est-il rationnel ou non rationnel ? Justifier votre réponse le plus rigoureusement possible.
>
> 2) Selon votre groupe, le nombre $\sqrt{2}$ est-il rationnel ou non rationnel ? Justifier votre réponse le plus rigoureusement possible.

3) A votre avis, pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est-il rationnel ? Tenter de démontrer votre conjecture.

Et pour la deuxième séance :

1) De quelle preuve vos idées du ... sont-elles les plus proches ?
2) Choisir la preuve qui vous permet le plus facilement de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et écrivez la preuve associée.
3) On peut se demander pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est rationnel ; Complétez la phrase suivante : « $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est ....». Tenter de démontrer cette équivalence en vous inspirant de la preuve qui vous semble la plus facile à adapter.

Les enjeux didactiques de cette activité sont centrés à la fois sur le raisonnement et la preuve en mathématiques, via une analyse comparative de preuves d'un même résultat, et sur des contenus d'arithmétique en jeu à la transition Secondaire-Supérieur. En termes de limites didactiques, nous n'avons pas avec cette activité la rencontre heureuse mentionnée par G. Hanna (2018) :

> « [...]it its often possible to find the happy concurrence in which a proof enlightens both the process of proving and the broader mathematical context with which it deals. » (Hanna, 2018)

En effet, cette activité ne donne pas accès aux propriétés permettant de manipuler les réels (Durand-Guerrier, 2019). En termes d'explication mathématique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, les preuves arithmétiques sont limitées. Et cela découle de la traduction du problème dans le domaine de l'arithmétique :

> « […] de nombreux problèmes d'irrationalité peuvent être étudiés au sein de l'arithmétique. […] Ainsi (P) « $\sqrt{2}$ est irrationnel » signifie (Q) « $a^2 = 2b^2$ n'a pas de solution entière » et apparaît donc comme un théorème réellement arithmétique. Nous pouvons poser la question « $\sqrt{2}$ est-il irrationnel ? » Sans sortir du champ de l'arithmétique et nous n'avons pas besoin de poser la question « quelle est la signification de $\sqrt{2}$? ». L'interprétation du symbole isolé $\sqrt{2}$ n'est pas nécessaire puisque nous avons donné un sens à (P) en le définissant comme étant la même chose que (Q). » (Hardy, Wright, 2007)

On peut étudier le problème arithmétique en jeu (résolution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $a^2 = 2b^2$) sans disposer des nombres réels.

Au cœur de la conception de ce type d'activités, il y a la sélection par l'enseignant(e) des preuves fournies aux élèves-étudiants. Cette sélection nécessite de pouvoir mener une analyse comparative entre les preuves, mettre à jour le « plan », les « étapes du plan », les « idées générales » (Eduscol, 2019). Et, comme nous l'avons montré dans la première partie de cette présentation, une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire avec l'idée de pouvoir générique apparaît comme solution.

Eléments d'analyse a posteriori

Nous donnons à présent de façon synthétique les éléments-clefs d'analyse a posteriori en référence à (Battie, 2015) et à notre pratique enseignante en 1ère année de Licence mathématiques.

On constate tout d'abord qu'élèves et étudiants vont de façon privilégiée vers les preuves 3 et 4, preuves à haut pouvoir générique. Ce constat va dans le sens des travaux de D.Tall (1979) (repris dans (Tall et all, 2012)). Et cela est d'autant plus remarquable quand on sait que la preuve communément rencontrée dans l'enseignement Secondaire renvoie à la preuve 1 et non aux preuves 3 et 4. Les preuves génériques dans l'enseignement sont « infrequently used » (Hanna et al, 2012) avec un potentiel didactique « virtually unrecognized and unexploited in the Teaching of number theory » (Rowland, 2002). Cela est d'autant plus regrettable face à la préférence spontanée des élèves-étudiants pour les preuves de ce type.

De plus, l'enrichissement du milieu (Brousseau, 1990) avec les preuves fournies est confirmé. On observe en particulier une lecture active de ces preuves de la part des élèves-étudiants. Néanmoins, le risque d'une compréhension superficielle est une réalité et cet élément rejoint les travaux de T.Rowland (2002) en didactique de l'arithmétique :

« I believe that the accounts given here of my work with undergraduates offer grounds for considerable optimism regarding the possibility of students "seeing" the generality we intend them to see in arguments based on particular cases. At the same time, it warns us against naïve complacency: we cannot be sure what they will see, and they may see considerably less than we might hope. » (Rowland, 2002)

Le risque mentionné induit un rôle de l'enseignant(e) particulièrement délicat dans ce type d'activités. Il s'agit en effet de veiller à une compréhension authentique des preuves fournies et de mettre à jour l'illusion d'authenticité de certaines des preuves produites par les élèves-étudiants. Une piste est de porter à la discussion, éventuellement au débat, les preuves produites par les élèves-étudiants afin de repousser les limites de ce que donne à voir une production écrite.

Retour sur les ressources EDUSCOL en guise de conclusion

Revenons sur les ressources EDUSCOL citées en introduction pour la classe de Seconde (EDUSCOL, 2019) à la lumière des éléments apportés dans cette présentation. Nous nous centrons sur les pages 6 à 8, consacrées à « Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel » avec la sélection des extraits suivants au fil de la lecture.

La première démonstration proposée dans cette ressource est équivalente à la preuve 1 en termes de dimensions organisatrice et opératoire. Dans l'extrait ci-dessous, le prérequis mentionné correspond à l'étape opératoire commune aux preuves 1 et 2 où l'on établit que les entiers a et b sont pairs. Plus précisément, il s'agit de la complexification de la dimension organisatrice avec l'apparition d'un raisonnement par contraposée pour démontrer l'implication « si le carré d'un nombre entier est pair alors l'entier lui-même l'est aussi » :

« Prérequis, motivation.

- Les élèves démontrent que le carré d'un nombre impair est impair. Ils en déduisent que si un carré est pair, alors le nombre est pair, par l'absurde. Ce résultat est utile dans la démonstration 1.
- […] »

Il est très regrettable qu'il y ait confusion entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée : « le carré d'un nombre impair est impair » renvoie à la contraposée de « si un carré est pair alors le nombre est pair » et non à un raisonnement par l'absurde. Le lecteur intéressé par une étude didactique de cette dimension organisatrice, en particulier pour des éléments d'étude institutionnelle relative au Lycée, pourra consulter (Bernard et al., 2018).

Nous poursuivons avec l'extrait suivant :

« Différentes démonstrations possibles. Le professeur peut dans un premier temps exposer le principe du raisonnement par l'absurde : on pose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec $\frac{p}{q}$ fraction irréductible. On essaie d'aboutir à une contradiction. On remarque d'abord que l'hypothèse implique $p^2 = 2q^2$.

1. On raisonne avec la parité : l'égalité $p^2 = 2q^2$ implique que p^2 est pair, ce qui implique que p est pair (voir le premier prérequis) ; donc $p = 2p'$ avec p' entier ; on en tire $4(p')^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2(p')^2$, ce qui permet de déduire que q est pair lui aussi. Contradiction.
[…] »

Les différentes preuves envisagées dans cette ressource se limitent à un travail opératoire via le représentant irréductible de la fraction en jeu. Les auteurs ferment donc la porte à toute preuve dont la dimension opératoire ne spécifie pas l'objet fraction. Cette limitation du champ des possibles est d'autant plus regrettable que la preuve 4 en particulier, à haut pouvoir générique, est ainsi exclue d'office.

Le niveau 1 des différents niveaux de détail mentionnés en introduction de la ressource est spécifié :

« Pistes de différenciation.
- Proposer une des trois preuves, au choix, en donnant l'idée. Les élèves consignent dans leur cahier celle qui leur convient le mieux.

- Tous les élèves peuvent s'approprier le raisonnement par l'absurde et se contenter du plan d'une des démonstrations (niveau 1).

- Le niveau 1 (plan) La structure de la démonstration peut se formaliser ainsi, en dégageant le principe du raisonnement par l'absurde :
  * supposer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel ;
  * déduire une relation $p^2 = 2q^2$, où p et q sont des entiers non nuls premiers entre eux ;
  * déduire des propriétés de p et q par l'une des trois méthodes ;
  * aboutir à une contradiction. »

En tentant de centrer ce niveau 1 sur le raisonnement par l'absurde, des éléments propres à la dimension organisatrice et d'autres spécifiques à la dimension opératoire sont amalgamés. Contrairement à l'objectif visé, cela n'aide pas à dégager la structure de la démonstration qui selon nous relève spécifiquement de la dimension organisatrice. De plus, cet amalgame ne donne pas à voir la différence de nature du travail mathématique selon qu'il s'agisse d'une dimension ou d'une autre.

Enfin, lorsqu'il s'agit de proposer des prolongements à l'étude de la non-rationalité de $\sqrt{2}$, une véritable rupture épistémologique apparaît :

Approfondissements possibles.

- Étudier si $\sqrt{3}$ rationnel ou non, ou $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc. Remarque : lorsque n n'est pas un carré, la première démonstration permet de démontrer que $\sqrt{n}$ n'est pas rationnel, avec la décomposition en facteurs premiers et la divisibilité.

- […] »

Car, comme nous l'avons montré dans notre analyse des preuves 1 à 4, la première démonstration (l'équivalent de la preuve 1) est étrangère au choix opératoire de travailler sur les entiers via leur décomposition en facteurs premiers. Ce choix opératoire correspond à la « characterizing property », au pouvoir générique en jeu ici, donc la première démonstration de cette ressource ne peut être une candidate judicieuse pour démontrer le résultat général.

Nous terminons en ouvrant sur la transition Lycée-Université avec le regret de ne pas retrouver pour la classe de Terminale l'invitation identifiée pour les classes de Première et Seconde quant à l'exploitation en classe de plusieurs preuves d'un même résultat mathématique. Le potentiel didactique des activités multi-preuves nous semble indéniable. Et, avec la préférence spontanée des élèves et étudiants pour les preuves génériques, des activités multi-preuves de type « generic proving » (Leron, Zaslavsky, 2013) sont à explorer.

Références bibliographiques

Artigue, M. (1989). Epistémologie et didactique. Cahiers de l'IREM de Paris (3).

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), Mathematics, teachers and children (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (2019) L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. XXVIe Colloque CORFEM, Jun 2019, Strasbourg, France. hal-02981131

Battie, V. (2009). Proving in number theory at the transition from the secondary level to the tertiary level: between organizing and operative dimensions, in Lin F., Hsieh F.-J., Hanna G., De Villiers M. (Eds.) Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education (pp. 71-76). The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan.

Battie, V. (2007). Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse des raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques, Recherches en didactique des mathématiques, 27(1), 9-44.

Battie, V. (2015). Arithmétique et raisonnement mathématique en classe de terminale C&E au Gabon. Revue africaine de didactique des sciences et des mathématiques, 12.

Bernard, D., Gardes D., Gardes M.-L., Grenier D. (2018). Une étude didactique du raisonnement par l'absurde pour le Lycée. Petit x, 108, 5-40.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu : Dévolution. Recherches en didactique des Mathématiques, 9(3), 309-336.

Durand-Guerrier, V. (2019) Travailler avec les preuves pour favoriser l'appropriation des concepts mathématiques. XXVIe Colloque CORFEM, Jun 2019, Strasbourg, France.

Gardes, M.-L. (2013). Etude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. Thèse de l'Université Lyon 1.

Glaeser, G. (1999). Introduction à la didactique expérimentale des mathématiques. La Pensée Sauvage.

Hanna, G. & Knipping, C. (2020). Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview. Journal of Educational Research in Mathematics, Special Issue, 001-013. Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. The American Mathematical Monthly, 90(3), 174-184.

Hanna, G. (2018). Reflections on proof as explanation. In (Stylianides, A. J. & Harel, G. (Eds.) 2018).

Hardy, G.-H., Wright, E.-M. (2007). Introduction à la théorie des nombres. Vuibert.

Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. The American Mathematical Monthly, 90(3), 174-184.

Leron, U. & Zaslavsky, O. (2013). Generic proving: Reflections on scope and method. For the learning of Mathematics, 15(3), 277-289.

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. Educational Studies in Mathematics, 91(1), 37-53.

Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. In Campbell, S. R., & Zazkis, R. (Eds.), Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction (pp.157-183). Westport: Ablex Publishing.

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. Philosophical Studies, 34, 135–151.

Stylianides, A. J. & Harel, G. (Eds.) (2018). Advances in mathematics education research on proof and proving. An international perspective. Springer.

Tall, D.O. (1979). Cognitive aspects of proof, with special reference to the irrationality of √2. In Proceedings of PME 3 (pp.203-205). Warwick, UK: University of Warwick.

Une situation de recherche pour la classe : Pac-Man contre les fantomes

Camille ANTOINE, Emmanuel BEFFARA, Rémi MOLINIER, Florence PAULIN, Iulia TUNARU

À propos des situations de recherche pour la classe

Les situations de recherche pour la classe (SiRC) ont pour objectif de mettre les élèves dans la peau d'un chercheur en mathématiques. L'idée est de les confronter à un problème, parfois non résolu par la communauté scientifique, afin de leur permettre des apprentissages mathématiques transversaux. Ces activités se distinguent par cinq critères, identifiés par Grenier et Payan:

1) Le problème est proche de questions mathématiques non résolues.
2) Le problème est facile d'accès, sa formulation est compréhensible et suscite la curiosité.
3) Des stratégies initiales existent qui ne requièrent pas de connaissances techniques pointues.
4) Il n'y a pas qu'un unique moyen de conduire la recherche, plusieurs stratégies sont possibles qui peuvent mener à diverses interprétations du problème et à des éléments de résolution variés, du côté de l'activité en elle-même comme des savoirs mathématiques en jeu.
5) Si une partie du problème peut être résolue, les stratégies développées conduisent à de nouvelles questions de recherche (souvent des variantes du problème initial).

En outre, les SiRC sont caractérisées par l'existence de *variables de recherche*, c'est-à-dire des paramètres du problème à fixer par les élèves. En ce sens, elles se prêtent bien à un travail mathématique transversal qui vise à l'apprentissage des compétences du socle commun, notamment *raisonner*, *chercher*, *modéliser* et *communiquer*.

Pour l'enseignant, la gestion de ce type d'activités demande une bonne maîtrise du problème soumis aux élèves pour pouvoir comprendre les stratégies développées par les élèves, leurs essais et leurs conjectures, mieux vaut s'être soi-même prêté à l'exercice au préalable, même sans avoir complètement résolu le problème.

En classe, l'activité se déroule en deux moments distincts. Dans un premier temps, assez long, l'enseignant a un rôle d'aide à la recherche. Il peut éclairer la consigne, expliquer le problème, relancer l'investigation en proposant des cas particuliers. Il ne doit surtout pas donner la solution du problème, dire si les conjectures amenées sont justes ou fausses. Dans un second temps, il doit gérer la mise en commun des travaux des groupes, puis institutionnaliser la résolution du problème et l'activité mathématique sous-jacente.

Le groupe « Raisonnement, logique et Situations de Recherche pour la Classe » travaille depuis une bonne vingtaine d'années sur la construction de SiRC et leur expérimentation en classe. Une brochure est gratuitement en ligne sur le site de l'IREM de Grenoble (une version revue et corrigée est disponible à la vente) et des mallettes sont en cours de finalisation afin de circuler dans les établissements de l'académie de Grenoble (ou plus loin). Elles contiennent les documents nécessaires à la bonne prise en main par l'enseignant de certaines SiRC conçues par le groupe ainsi que le matériel pour les élèves.

Nous avons choisi de présenter l'une de nos SiRC les plus récentes, intitulée *Jeu de Pac-Man*, sur laquelle nous menons encore quelques expérimentations. Comme lors de l'atelier, nous présentons dans un premier temps le problème, ses caractéristiques et ses enjeux pour l'enseignement, ainsi qu'une résolution mathématique. Dans un deuxième temps, nous revenons sur l'atelier en lui-même qui s'est tenu en visio-conférence le 10 juin 2021. Enfin, nous concluons sur les expérimentations que nous avons pu conduire en classe, à différents niveaux allant du collège à la fin de la licence, et sur des éléments de gestion de l'activité pour les enseignants qui souhaiteraient la tester dans leurs propres classes.

Le jeu du Pac-Man

Présentation du jeu

L'idée de cette activité vient d'un article publié dans la revue *La Recherche* et intitulé Pac-Man contre les fantômes. Il s'agit d'un problème d'optimisation et de recherche d'une stratégie gagnante qui peut être proposé à tous les niveaux à partir du collège.

Le jeu de Pac-Man est un jeu à deux joueurs, qui se joue sur un graphe (ensemble de sommets reliés par des arêtes). Au début de la partie, le premier joueur (appelé **F** dans la suite) place un certain nombre de fantômes sur des sommets du graphe, le second (appelé **P** dans la suite) place Pac-Man sur un autre sommet. Les joueurs jouent ensuite à tour de rôle : **F** déplace les fantômes de son choix (chacun peut être laissé là où il est ou déplacé sur un sommet voisin) puis **P** déplace Pac-Man sur un sommet voisin ou le laisse immobile. Le jeu s'arrête si l'un des fantômes se retrouve sur le même sommet que Pac-Mac, qui est alors capturé.

Nous avons choisi de proposer le jeu sur des graphes particuliers : les grilles rectangulaires à mailles régulières. Nous nous intéressons ici à la question suivante : étant donné une grille à maille régulière, quel est le nombre minimal de fantômes qui assure l'existence d'une stratégie gagnante pour le joueur **F** ?

En d'autres termes, on se demande combien il faut de fantômes au minimum pour capturer Pac-Man.

Caractéristiques en tant que SiRC

Le problème proposé réunit plusieurs caractéristiques des situations de recherche pour la classe.

- Il est articulé autour d'une question facile à comprendre et accessible à différents niveaux, du collège à la licence, mais de solution non évidente. À chaque niveau, on peut travailler des aspects différents d'une manière plus ou moins approfondie : recherche de stratégies, représentation du problème, recherche de preuves, construction d'une démarche algorithmique.
- Il y a une composante ludique dans la mise en situation du problème, ce qui encourage la participation de tous les élèves indépendamment de leurs acquis en mathématiques.
- Plusieurs stratégies de résolution sont possibles, dont des stratégies par essai et erreur.
- L'enjeu de vérité est à la portée des élèves (on ne connaît pas la solution *a priori*) et des conjectures leur sont accessibles par la recherche. Il s'agit ici de deux aspects peu présents dans la classe usuelle.
- Le travail demande une organisation sociale spécifique (travail en groupe, synthèse collective, institutionnalisation).
- Le problème général sur n'importe quel graphe est très complexe et des questions sont toujours ouvertes. On trouve d'ailleurs des articles de recherche récents autour de ce jeu ou des variantes.

Une stratégie à deux fantômes sur la grille rectangulaire

Dans le cas d'une grille rectangulaire réduite à une ligne ou une colonne, un seul fantôme suffit pour capturer Pac-Man. Le joueur **F** peut par exemple placer le fantôme au milieu et le déplacer en direction de Pac-Man. Ainsi, Pac-Man est coincé sur une partie de la ligne dont la longueur diminue strictement à chaque étape.

Pour une grille rectangulaire non réduite à une ligne ou une colonne, un seul fantôme ne garantit pas la victoire de **F**. En effet, on peut par exemple remarquer que, même si le fantôme est sur une case voisine de Pac-Man, ce dernier peut être déplacé de façon à ne plus être voisin du premier.

Nous proposons dans ce qui suit une stratégie gagnante pour **F** avec deux fantômes. En conséquence, le nombre minimal de fantômes qui assure la capture de Pac-Man est 2, sauf dans le cas d'une grille réduite à une ligne ou une colonne, auquel cas le nombre minimal est 1.

Notation et modélisation mathématique

On part d'une grille rectangulaire $(m+1) \times (n+1)$ vue comme la grille donnée par tous les couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leq x \leq m$ et $0 \leq y \leq n$ (voir figure 1 pour un exemple).

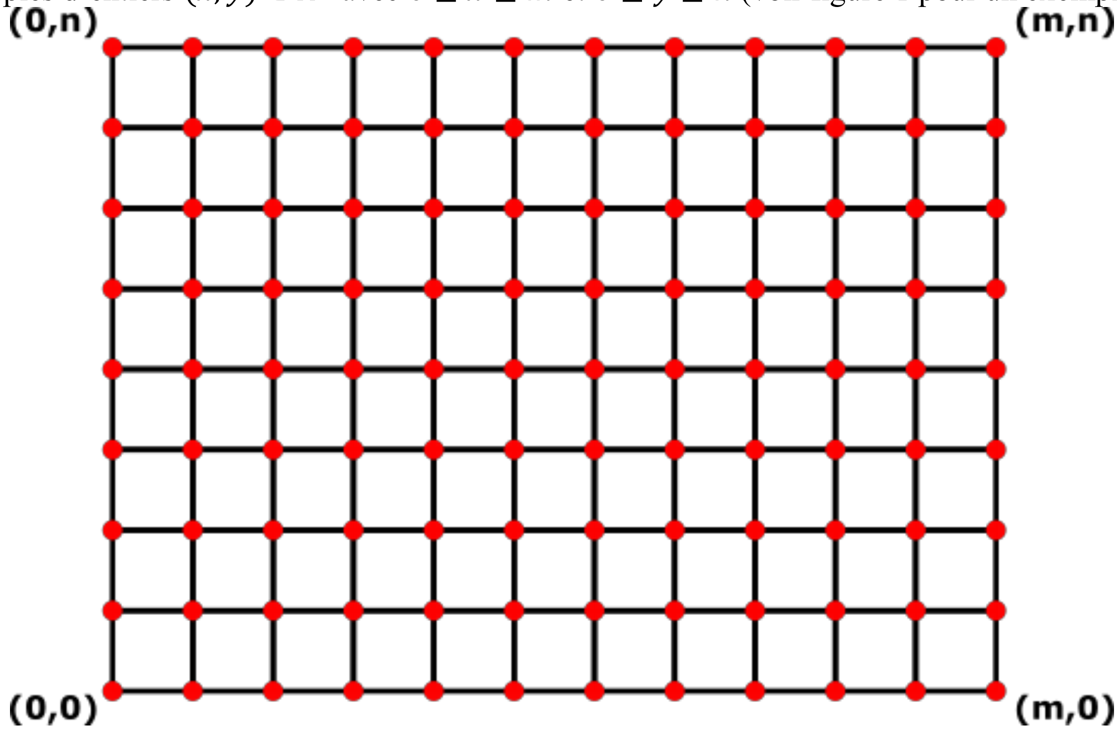


Figure 1 - Exemple de grille avec $m = 11$ *et* $n = 8$.

Sur cette grille évoluent deux fantômes et Pac-Man. Chacun se déplace d'un sommet à l'un de ses voisins, horizontalement ou verticalement.

Nous parlerons de **phase de jeu** pour l'enchaînement d'un déplacement de Pac-Man par **P** suivi d'un déplacement des fantômes par **F**. Les deux phases initiales du jeu sont particulières : la phase 0 correspond au placement des fantômes par **F**, puis la phase 1 au placement de Pac-Man par **P**, suivi du premier déplacement des fantômes par **F**.

Pour plus de lisibilité, nous distinguerons un fantôme bleu et un fantôme vert. Pour $k \geq 0$ ($k \geq 1$ pour Pac-Man), nous notons $(x_B(k), y_B(k))$, $(x_V(k), y_V(k))$ et $(x_P(k), y_P(k))$ les positions du fantôme bleu, du fantôme vert et de Pac-Man respectivement à l'issue la k-ième phase.

Détails de la stratégie proposée

On place les fantômes dans deux coins opposés. Ici, on pose comme sur la figure 2 le bleu en haut à gauche en $(0, n)$ et le vert en bas à droite en $(m, 0)$, ainsi on a $(x_V(0), y_V(0)) = (m, 0)$ et $(x_B(0), y_B(0)) = (0, n)$.

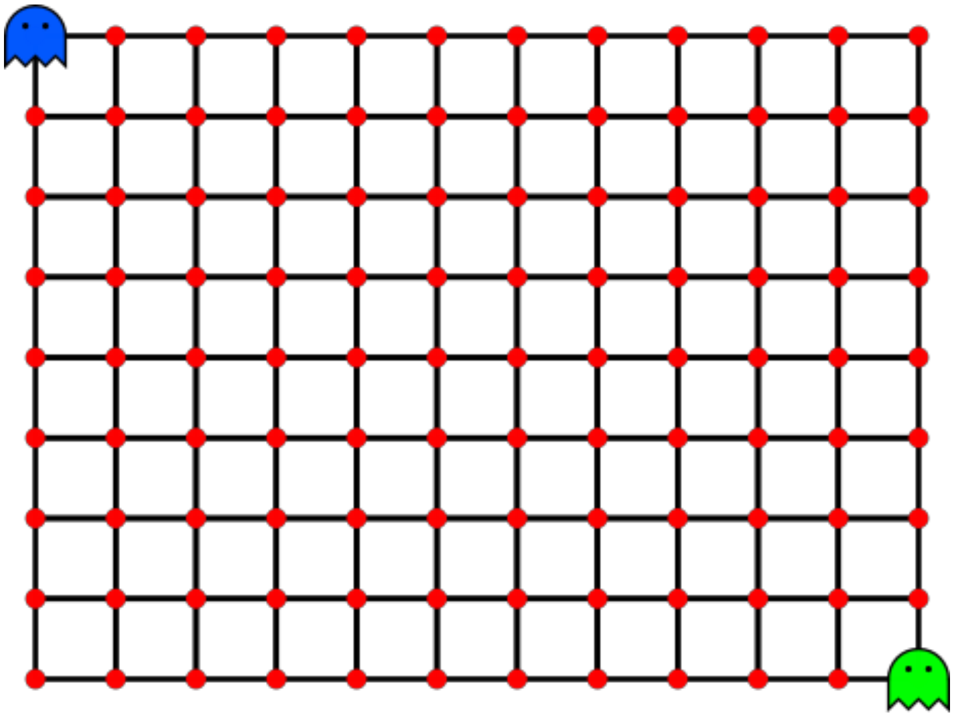


Figure 2 - Position initiale.

Remarque 1. La position initiale des fantômes n'a pas beaucoup d'importance et ce choix a été fait ici pour faciliter l'exposition de la stratégie.

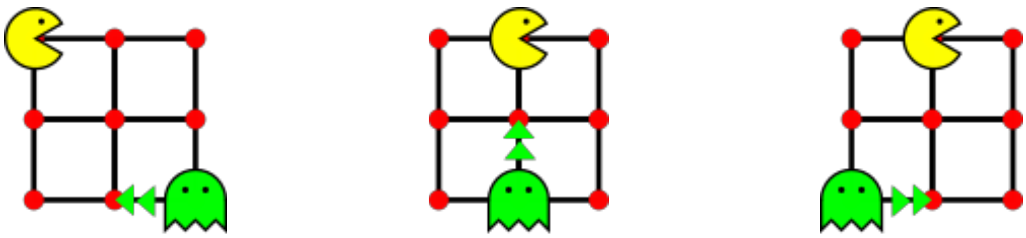
Stratégie 1. *Soit $k \geq 1$. Lors de la phase k, tant que Pac-man n'est pas capturé et juste après que **P** a joué (ou placé Pac-Man pour $k = 1$), **F** joue le fantôme vert de la façon suivante (on pourra se rapporter aux figures 3 et 4 pour des illustrations des déplacements):*

1) *[V1] Si $x_V(k-1) > x_P(k)$, alors **F** déplace le fantôme vert vers la gauche et* $(x_V(k), y_V(k)) := (x_V(k-1) - 1, y_V(k-1))$.

2) *[V2] Si $x_V(k-1) = x_P(k)$, alors **F** déplace le fantôme vert vers le haut et* $(x_V(k), y_V(k)) := (x_V(k-1), y_V(k-1) + 1)$.

3) *[V3] Si $x_V(k-1) < x_P(k)$, alors **F** déplace le fantôme vert vers la droite et* $(x_V(k), y_V(k)) := (x_V(k-1) + 1, y_V(k-1))$.

et il joue le fantôme bleu de la façon suivante :



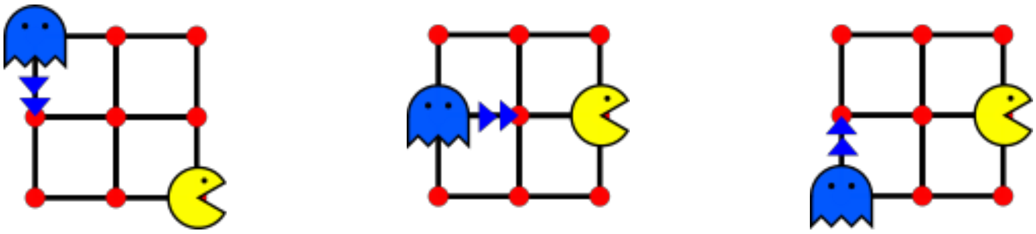
[V1] [V2] [V3]

Figure 3 – Illustrations des déplacements pour le fantôme vert.

1) *[B1] Si* $y_B(k-1) > y_P(k)$, *alors* ***F*** *déplace le fantôme bleu vers le bas et* $(x_B(k), y_B(k)) := (x_B(k-1), y_B(k-1) - 1)$.

2) *[B2] Si* $y_B(k-1) = y_P(k)$, *alors* ***F*** *déplace le fantôme bleu vers la droite et* $(x_B(k), y_B(k)) := (x_B(k-1) + 1, y_V(k-1))$.

3) *[B3] Si* $y_B(k-1) < y_P(k)$, *alors* ***F*** *place le fantôme bleu vers le haut et* $(x_B(k), y_B(k)) := (x_B(k-1), y_B(k-1) + 1)$.



[B1] [B2] [B3]

Figure 4 – Illustrations des déplacements pour le fantôme bleu

Remarque 2. La stratégie 1 présentée ici ne se veut pas du tout optimale en nombre de coups mais elle a l'avantage de se justifier assez facilement.

Le lecteur pourra aussi remarquer que, dans la stratégie 1, les déplacements des deux fantômes sont indépendants l'un de l'autre. Cependant, les cas [B1], [B2] et [B3] sont le symétrique par rapport à la première diagonale (d'équation $y = x$) des cas [V1], [V2] et [V3].

La stratégie 1 est très simple à mettre en place lors d'une partie et le choix du déplacement d'un fantôme ne demande que la connaissance de sa position relative à Pac-Man juste avant de jouer.

La philosophie de la stratégie est la suivante (on pourra se rapporter aux figures 3, 4, 5 et 6 pour la voir en action). Le joueur **F** cherche à aligner ses fantômes sur Pac-Man, selon les lignes pour le fantôme bleu et selon les colonnes pour le fantôme vert.

Dès que l'un des fantômes s'est aligné avec Pac-Man, le joueur **F** déplace ensuite celui-ci de façon à garder l'alignement ou à le rapprocher de Pac-Man. Par exemple, si c'est le fantôme bleu qui s'est aligné avec Pac-Man, et que le joueur **P** déplace Pac-Man verticalement, le joueur **F** déplacera lui aussi le fantôme bleu verticalement pour préserver l'alignement. Par contre, si le joueur **P** déplace Pac-Man horizontalement, l'alignement est maintenu et le joueur **F** peut déplacer le fantôme bleu horizontalement en direction de Pac-Man.

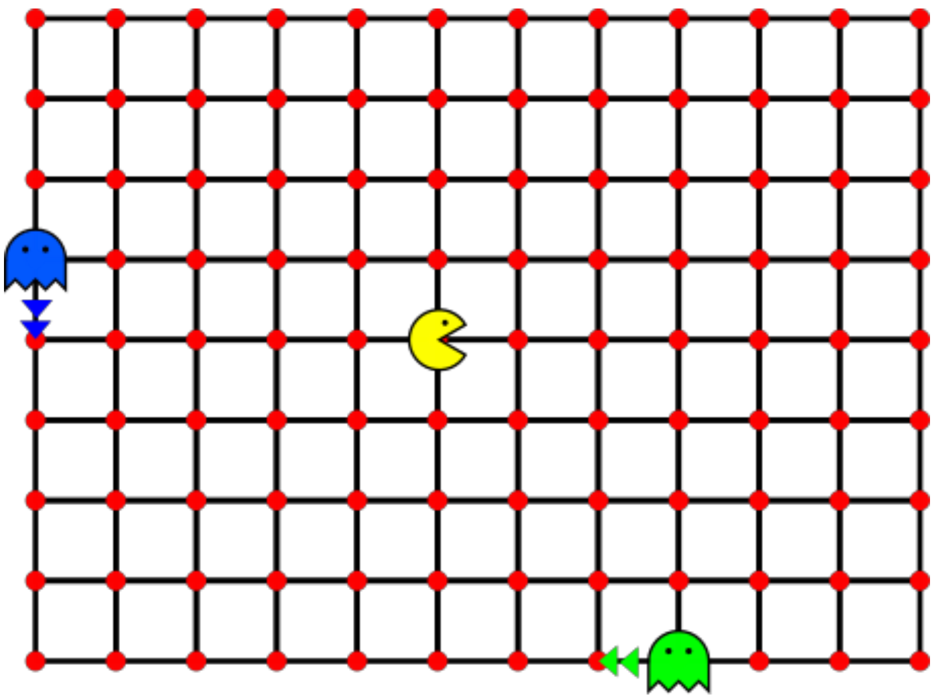


*Figure 5 - Exemple 1 de coup du joueur **F**. Ici il cherche à aligner les fantômes avec Pac-Man.*

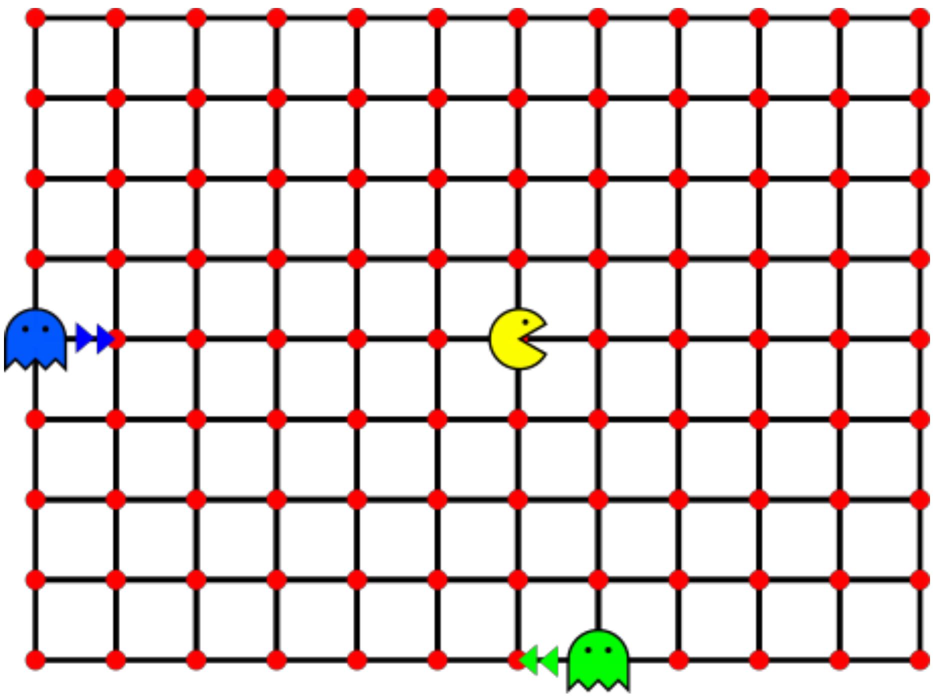


*Figure 6 - Exemple 2 de coup du joueur **F**. Ici le fantôme bleu est aligné et peut alors se rapprocher tandis que le fantôme vert continue à s'aligner avec Pac-Man.*

Au final, Pac-Man est coincé dans un rectangle dont les côtés sont donnés par les bords du plateau pour les côtés du haut et de droite, les deux autres côtés sont donnés par la ligne contenant le fantôme vert et la colonne contenant le fantôme bleu. La figure 9 illustre cette zone sur un exemple. L'aire de ce rectangle devient nulle et on aboutit ainsi à la capture de Pac-Man. Tout ceci est détaillé et démontré dans la section suivante.

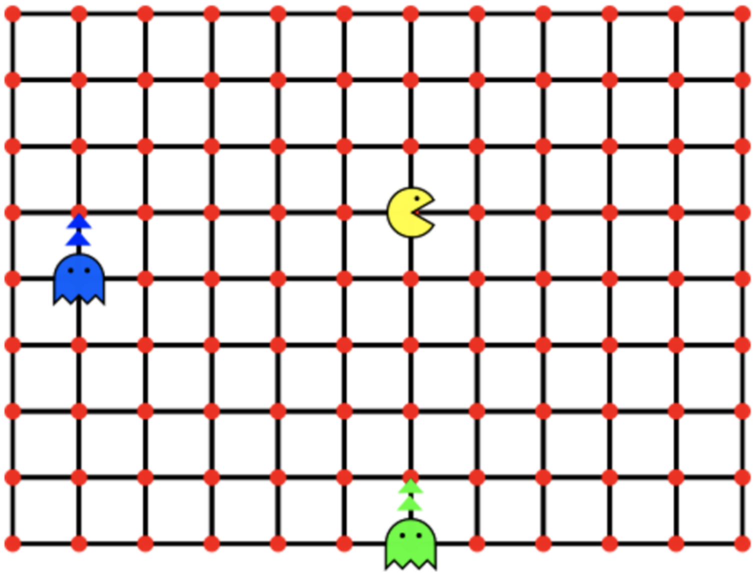


*Figure 7 - Exemple 3 de coup du joueur **F**. Ici Pac-Man s'est déplacé verticalement et a donc brisé l'alignement avec le fantôme bleu qui va devoir rectifier l'alignement. Le fantôme vert, bien aligné, peut se rapprocher de Pac-Man.*

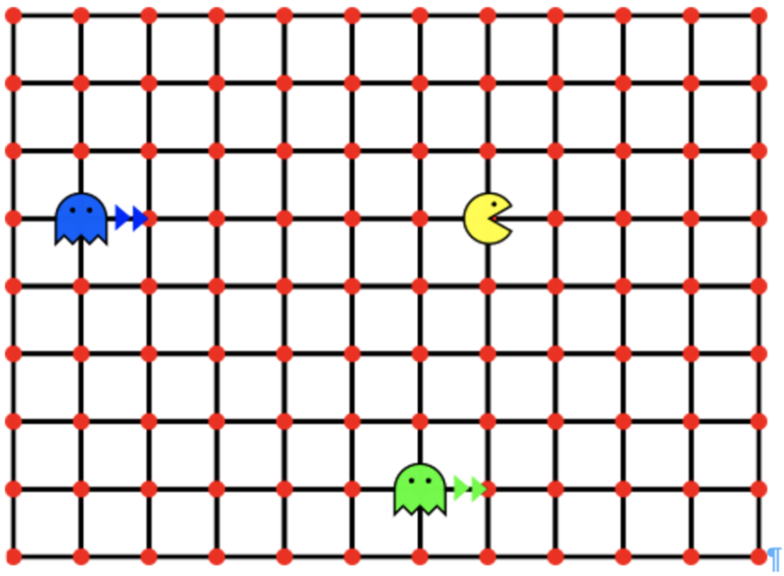


*Figure 8 - Exemple 4 de coup du joueur **F**. Ici Pac-Man s'est déplacé vers la droite ce qui a brisé l'alignement avec le fantôme vert. Ce dernier rectifie donc l'alignement tandis que le fantôme bleu, bien aligné, se rapproche*

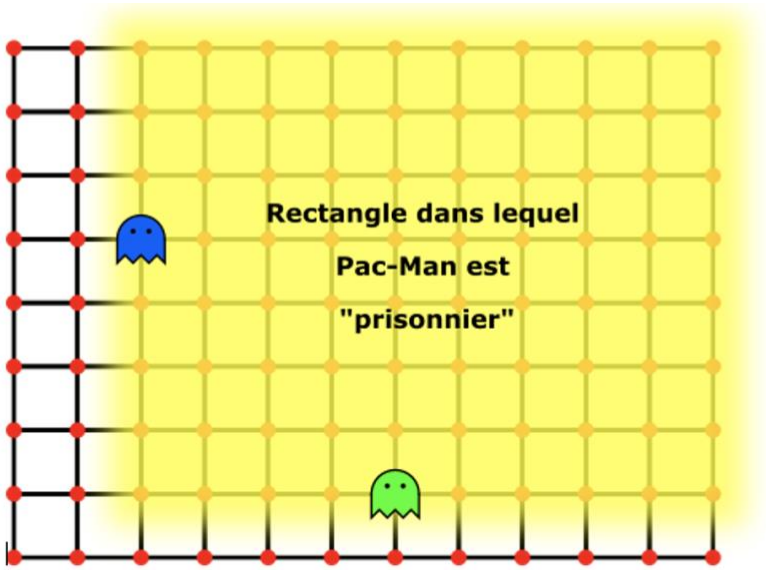


Figure 9 - Illustration représentant, dans cet exemple, le rectangle dans lequel Pac-Man peut se trouver.

Preuve détaillée

Dans la suite, on suppose que le joueur **P** se contente de respecter la règle de jeu et que le joueur **F** suit scrupuleusement la stratégie 1. Trois situations disjointes peuvent alors survenir :

a) L'un des fantômes au moins capture Pac-Man ;

b) Lors d'une phase de jeu la stratégie 1 impose au joueur **F** un déplacement interdit par la règle du jeu ;

c) Le jeu ne se termine pas.

Ici un **déplacement interdit** est un mouvement non autorisé par la règle du jeu d'un des fantômes ou du Pac-Man. Plus précisément, le déplacement d'un des fantômes ou de Pac-Man sur un sommet qui n'est pas voisin de sa position actuelle ou qui est en dehors du rectangle $[0, m] \times [0, n]$. Il faut donc vérifier que, peu importent les déplacements de Pac-Man, les situations (b) et (c) ne se réalisent jamais et que seule la situation (a) peut survenir.

Comme indiqué à la Remarque 2, les conditions de déplacement des fantômes dans la stratégie 1 sont symétriques par rapport à la première diagonale. **Ainsi, excepté pour la Proposition 2, nous effectuons les démonstrations pour le fantôme vert, celles pour le fantôme bleu s'obtenant par symétrie.**

Nous commençons par quatre lemmes qui permettent de comprendre l'évolution des positions relatives des fantômes par rapport à Pac-Man au cours d'une partie. Nous montrons ensuite dans la Proposition 1 que la situation (b) n'arrive jamais et dans la Proposition 2 que seule la situation (a) peut survenir.

Résultats préliminaires

Premièrement, on démontre que, dès qu'un fantôme s'est aligné avec Pac-Man, à toutes les fins de phases de jeu suivantes, cet alignement est préservé.

Lemme 1. Soit $k \geq 1$ et supposons que la partie n'est pas terminée à la fin de la phase k.
Si $x_V(k) = x_P(k)$, alors $x_V(k+1) = x_P(k+1)$.
De même, si $y_B(k) = y_P(k)$, alors $y_B(k+1) = y_P(k+1)$.

Proof. Si $x_P(k) = x_V(k)$, en fonction du coup de P, on a $x_P(k+1) = x_V(k) - 1, x_P(k+1) = x_V(k)$ ou $x_P(k+1) = x_V(k) + 1$. Ainsi, dans chaque cas, en suivant la stratégie 1, F joue selon [V1], [V2] ou [V3] respectivement et on a $x_V(k+1) = x_P(k+1)$.

Deuxièmement, on démontre que, en fin d'une phase de jeu, le fantôme vert ne se retrouve jamais sur une colonne à gauche de Pac-Man (il reste sur la droite ou sur la même colonne). De même le fantôme bleu ne se retrouve jamais sur une ligne en dessous de Pac-Man (il reste en dessus ou sur la même ligne).

Lemme 2. Pour tout $k \geq 1$ et jusqu'à la fin de la partie, on a $x_P(k) \leq x_V(k)$ et $y_P(k) \geq y_B(k)$.
Proof. Démontrons par récurrence sur k que pour tout $k \geq 1$ et jusqu'à la fin de la partie, on a $x_P(k) \leq x_V(k)$.
Initialisation ($k = 1$). On a $x_V(0) = m$ et, comme la grille est de taille $(m+1) \times (n+1)$, $x_P(0) \leq m$. On a alors trois cas.
Soit **P** place Pac-Man sur le fantôme vert et la partie est terminée.
Soit $x_P(1) = m$ et $y_P(1) > 0$. Dans ce cas, en suivant la stratégie 1, **F** joue selon [V2] et déplace le fantôme vert en $(x_V(1), y_V(1)) := (m, 1)$. Ainsi on a bien $x_P(1) \leq x_V(1)$.
Soit $x_P(1) < m$. Dans ce cas, et en suivant la stratégie 1, **F** joue selon [V1] et déplace le fantôme vert en $(x_V(1), y_V(1)) := (m - 1{,}0)$. Ainsi, on a encore $x_P(1) \leq x_V(1)$.
Hérédité. Démontrons que pour tout $k \geq 1$, si la partie n'est pas terminée à la fin de la phase k et si $x_P(k) \leq x_V(k)$, alors $x_P(k+1) \leq x_V(k+1)$. Soit donc $k \geq 1$ et supposons que la partie n'est pas terminée à la fin de la phase k. Supposons que $x_P(k) \leq x_V(k)$ et distinguons deux cas : $x_P(k) = x_V(k)$ et $x_P(k) < x_V(k)$.
Si $x_P(k) = x_V(k)$, on applique le Lemme 1.
Si $x_P(k) < x_V(k)$, en fonction du coup de **P**, on a $x_P(k+1) = x_V(k)$ ou $x_P(k+1) < x_V(k)$. Dans chaque cas, en suivant la stratégie 1, F jouera selon [V2] ou [V1] respectivement. Ainsi, dans chaque cas on a bien $x_V(k+1) \leq x_P(k+1)$.

Le Lemme 3 démontre que le fantôme vert ne quittera la ligne toute en bas ($y = 0$) que lorsqu'il sera aligné avec Pac-Man. De même le fantôme vert ne quittera la colonne toute à gauche ($x = 0$) que lorsqu'il sera aligné avec Pac-Man.

Lemme 3. *Soit* $k \geq 1$.
Si $y_V(k) > 0$ alors $x_V(k) = x_P(k)$.
De même, si $x_B(k) > 0$, alors $y_B(k) = y_P(k)$.
Proof. Soit k_0 la première phase de jeu où $y_V(k_0) > 0$. Comme $y_V(0) = 0$, $k_0 \geq 1$, on a forcément $y_V(k_0 - 1) = 0$ et à la phase k_0, **F** a déplacé le fantôme vert verticalement (selon [V2]). On avait donc $x_V(k_0 - 1) = x_P(k_0)$ et on a maintenant $x_V(k_0) = x_P(k_0)$. Ainsi, en vertu du lemme 1, $x_V(k) = x_P(k)$ pour tout $k \geq k_0$.

Enfin, ce dernier lemme démontre que le fantôme vert ne se retrouve jamais sur une ligne au-dessus Pac-Man (il reste en dessous). De même le fantôme bleu ne se retrouve jamais sur une colonne à droite de Pac-Man (il reste à gauche).

Lemme 4. Pour tout $k \geq 1$ et jusqu'à la fin de la partie, on a $y_P(k) \geq y_V(k)$ et $x_P(k) \leq x_B(k)$.
Proof. Supposons qu'il existe k tel que $y_P(k) < y_V(k)$ et soit k_0 le plus petit k tel que la partie ne soit pas terminée à la fin de la phase k et $y_P(k) < y_V(k)$. Notez que, au vu de la position initiale du fantôme vert, $k_0 \geq 1$. Comme $y_P(k_0) < y_V(k_0)$, on a $y_V(k_0) > 0$ et, par le Lemme 3 $x_P(k_0) = x_V(k_0)$. De plus, par minimalité de k_0, on a $y_V(k_0 - 1) \leq y_P(k_0 - 1)$ et donc $y_V(k_0) - y_P(k_0) \leq 2$.
Si $y_V(k_0) - y_P(k_0) = 2$ (cf figure 10), comme c'est la première fois que cette différence est strictement positive, c'est que le fantôme vert et Pac-Man se sont déplacés verticalement. Donc à la fin de la phase $k_0 - 1$, ils étaient sur la même case ce qui est absurde.

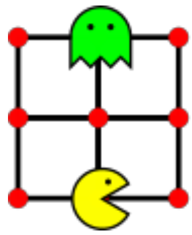


Figure 10 - illustration d'une position où $y_V(k_0) - y_P(k_0) = 2$. Par minimalité de k_0, on aurait forcément, à la fin de la phase $k_0 - 1$, les deux pièces sur le sommet central.

Si $y_V(k_0) - y_P(k_0) = 1$ (cf figure 11), alors, par minimalité de k_0 et au vu des déplacements autorisés par la règle du jeu, seules les deux configurations suivantes peuvent survenir à la fin de la phase $k_0 - 1$.

i. Soit $y_V(k_0 - 1) - y_P(k_0 - 1) = -1$ et alors, lors de la phase k_0 le joueur **P** déplace forcément Pac-Man vers le bas sur la position du fantôme vert ce qui est absurde.

ii. Soit $y_V(k_0 - 1) - y_P(k_0 - 1) = 0$ et alors, comme forcément $x_V(k_0 - 1) \neq x_P(k_0 - 1)$ (sinon la partie serait déjà terminée à la phase $k_0 - 1$), on a par le Lemme 3 $y_P(k_0 - 1) = y_V(k_0 - 1) = 0$. Ainsi, qu'importe le déplacement de Pac-Man, comme la partie ne se termine pas à la phase k_0, on a forcement $x_V(k_0) \neq x_P(k_0 - 1)$ et alors le fantôme vert se déplace selon [V1] ou [V3], i.e il se déplace horizontalement. En particulier, $y_V(k_0) = 0$ ce qui est absurde.

Les résultats principaux

Proposition 1. La stratégie 1 n'aboutit jamais à un déplacement interdit.

Proof. Les déplacements [V1], [V2] et [V3] sont des déplacements d'une case vers la gauche, le haut et la droite respectivement. Ainsi, les seuls déplacements interdits qui pourraient être joués à une phase k sont

1) [V1] quand le fantôme vert est sur la colonne de gauche ($x_V(k) = 0$),
2) [V2] quand le fantôme vert est sur la dernière ligne ($y_V(k) = n$) et
3) [V3] quand le fantôme vert est sur la colonne de droite ($x_V(k) = m$).

Le cas (1) n'arrivera jamais car, si le fantôme vert est sur la colonne de gauche, comme $x_P(k+1) \geq 0 = x_V(k)$, **F** jouera selon [V2] ou [V3] mais jamais [V1]. Le cas (2) n'arrivera jamais non plus car, si le fantôme vert est sur la dernière ligne, on a, grâce aux lemmes 3 et 4, $x_V(k-1) = x_P(k-1)$ et $m = y_V(k-1) \leq y_P(k-1) \leq m$ et ainsi la partie aurait du se terminer à la phase $k - 1$. Enfin, le cas (3) est lui aussi impossible car, si le fantôme vert est sur la colonne de droite, comme $x_P(k+1) \leq m = x_V(k)$, **F** jouera selon (V1) ou (V2) mais jamais [V3].

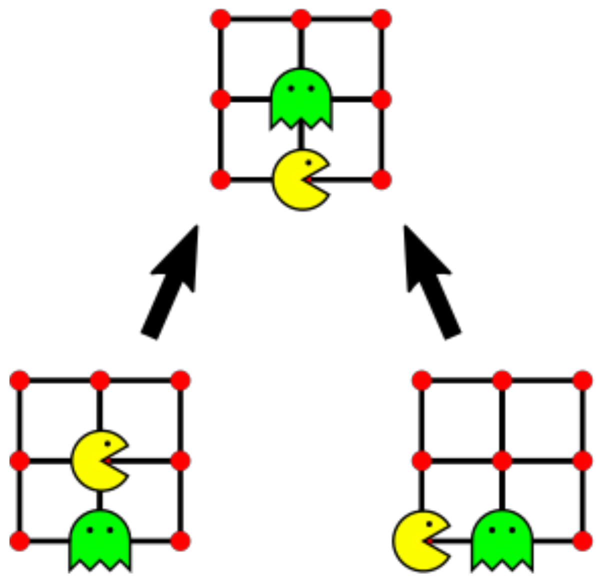


Figure 11 - illustration d'une position où $y_V(k_0) - y_P(k_0) = 1$ en haut. Les deux illustrations en dessous représentent les positions possibles à la fin de la phase $k_0 - 1$. On peut alors voir que ce n'est pas possible.

Proposition 2. La partie s'arrête en un temps fini.
Proof.
Étape 1 : il existe $k_V \leq m$ tels que pour tout $k \geq k_V$, $x_V(k) = x_P(k)$.
D'après le Lemme 2, on a, pour tout $k \geq 0$, $0 \leq x_P(k) \leq x_V(k)$. De plus, pour tout $k \geq 0$, si $x_P(k) < x_V(k-1)$ alors **F** joue le fantôme vers selon [V1], c'est à dire vers la gauche et donc $x_V(k) = x_V(k-1) - 1$. Ainsi, il existe $k_V \leq m$ tels que, $x_V(k_V) = x_P(k_V)$. On conclut ensuite avec le Lemme 1
Étape 1bis : il existe $k_B \leq n$ tels que pour tout $k \geq k_B$, $y_B(k) = y_P(k)$.
Cela se démontre de la même manière que l'étape précédente.
Soit $k_0 = \max(k_V, k_B)$.
Étape 2 : Pour tout $k > k_0$ et tant qu'aucun fantôme n'a capturé Pac-Man, on a $y_V(k) = y_V(k-1) + 1$ ou $x_B(k) = x_B(k-1) + 1$.
Comme $k > k_0 = \max(k_V, k_B)$, on a $x_V(k-1) = x_P(k-1)$ et $y_B(k-1) = y_P(k-1)$. Ainsi, si **P** déplace Pac-Man horizontalement et que la partie n'est pas terminée après son coup, **F** jouera le fantôme bleu selon [B2] et $x_B(k) = x_B(k-1) + 1$, et si **P** déplace Pac-Man verticalement et que la partie n'est pas terminée après son coup, **F** jouera le fantôme vert selon [V2] et $y_V(k) = y_V(k-1) + 1$.
Conclusion
Les Lemmes 2 et 4 nous assurent que pour tout $k \geq 0$, $(x_P(k), y_P(k)) \in [x_B(k), m] \times [y_V(k), n]$. Or d'après l'étape précédente, l'aire entière du rectangle $R_k := [x_B(k), m] \times [y_V(k), n]$ décroit strictement à chaque phase de jeu à partir de la phase k_0. Enfin, dès que l'aire de R_k s'annule, les trois personnages sont alignés et, comme pour tout $k \geq k_0$, $x_V(k-1) = x_P(k-1)$ et $y_B(k-1) = y_P(k-1)$, Pac-Man se retrouve sur la case d'un fantôme et est capturé.
Remarque 3. On peut déduire de la preuve précédente le majorant $\max(m, n) - 1 + m + n - 1$ pour le nombre de phases de jeu pour une partie où F joue en suivant la stratégie 1

Déroulé de l'atelier

Lors de l'atelier, nous avons d'abord présenté le problème aux participants afin de les placer dans la position des élèves. Plusieurs petits groupes se sont donc formés et ont cherché à apporter une réponse au problème. Comme l'atelier s'est déroulé à distance, les participants ont interagi en discutant et en dessinant sur des tableaux partagés.

Les résultats obtenus sont de la même nature que ceux obtenus lors des expérimentations en classe : le fait que deux fantômes suffisent sur une grille rectangulaire est énoncé par tous les groupes et les stratégies décrites reprennent les arguments géométriques attendus. Compte tenu du temps disponible (environ 30min), on n'a pas tenté d'avancer vers la formulation de démonstrations. Cette phase d'étude en position d'élèves a été conclue par une mise en commun des résultats.

Dans un second temps, nous avons présenté la stratégie exposée ci-dessus et des éléments de preuve, les résultats expérimentaux détaillés plus loin et évoqué les aspects liés à la gestion de l'activité en classe. Cette partie de la présentation a mené à une phase de discussion sur l'usage en classe de cette situation, et des situations de recherche en général.

Retours d'expériences

Des tests en L3 de mathématiques

Nous avons proposé cette activité sur le jeu du Pac-Man à des étudiants de troisième année de licence de mathématiques deux années consécutives (fin 2019 et fin 2020). A cause du contexte sanitaire, la deuxième expérimentation a eu lieu en ligne.

Première expérimentation en classe

La SiRC est proposée aux étudiants intéressés pendant la dernière séance de travaux dirigés du premier semestre en troisième année de licence de mathématiques. Le public est donc assez particulier avec des jeunes suffisamment motivés par les mathématiques pour se lancer dans une licence de cette discipline. Ils ont un niveau mathématique avancé et sont volontaires. La séance dure une heure et quarante-cinq minutes.

Les étudiants sont disposés en cinq petits groupes (de trois à cinq élèves) et la situation est proposée dans le cas général en travaillant sur une grille rectangulaire quelconque. La plupart des groupes disent vite qu'un fantôme ne suffit pas et conjecturent que deux fantômes suffisent. Un groupe, en essayant de raisonner sur les degrés de liberté de Pac-Man (le nombre de déplacements possibles à chaque coup), a plus de difficulté à exclure la possibilité qu'il faille trois voire quatre fantômes et des divergences d'opinion émergent entre ses membres.

Même si les élèves pensent avoir déterminé le bon nombre de fantômes, ils n'arrivent pas à trouver les arguments pour le démontrer. Ils essaient de travailler sur la distance entre Pac-Man et les fantômes (c'est à dire la longueur du plus court chemin le long des arêtes entre Pac-Man et l'un des fantôme) et proposent des arguments comme on peut toujours réduire la distance entre Pac-Man et les fantômes. Cependant l'argumentaire reste flou et ne peut servir de preuve. Nous leur proposons alors d'expliciter plus proprement une stratégie pour les fantômes et d'essayer de montrer dans un second temps qu'elle est bien gagnante.

L'élaboration d'une stratégie demande un peu de temps mais les groupes y parviennent. Deux stratégies apparaissent majoritairement : l'une est celle proposée dans cet article et l'autre consiste à placer les fantômes en diagonale et à coincer Pac-Man dans un coin. Sur la première stratégie, non sans difficulté, un argument d'aire (comme proposé précédemment) ou de distance entre Pac-Man et les fantômes ou entre Pac-Man et les bords (ce qui revient plus ou moins à la même chose) émerge pour justifier que la stratégie aboutit bien à la capture de Pac-

Man. Pour la deuxième stratégie en revanche, même si elle semble être gagnante, les arguments essayés n'aboutissent pas.

En fin de séance, certains groupes expérimentent sur la bande (en autorisant par exemple les fantômes et Pac-Man à traverser le bord droit pour arriver sur le bord gauche au même niveau et vice et versa) ou le tore (en autorisant de même entre le haut et le bas de la grille), dont des exemples sont donnés sur la figure 12, ou encore sur une grille à maille triangulaire. Néanmoins, le manque de temps ne leur permet pas d'aboutir à des éléments de stratégie ou de preuve.

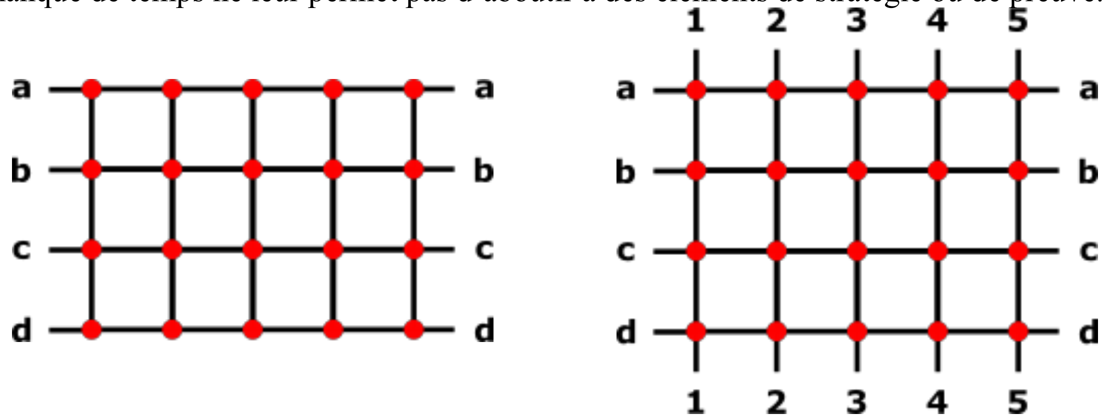


Figure 12 - Un exemple de bande (à gauche) et de tore (à droite). Chaque demie-arrête du bord doit être reliée à la demie-arrête à l'opposé avec la même lettre ou le même numéro.

Deuxième expérience en ligne

Cette deuxième expérimentation est proposée dans le même contexte universitaire l'année suivante, à ceci près qu'en raison de la crise sanitaire, elle se déroule en ligne. Nous utilisons la plate-forme Zoom dont l'université possède une licence. Après une brève présentation commune du problème, nous créons des salons distincts dans lesquels se répartissent les étudiants afin de faciliter le travail de groupe. Ceux-ci sont invités à travailler sur une grille fournie en format pdf : dans chaque groupe, un étudiant prend le rôle de maître du jeu et partage son écran sur lequel est ouverte la grille dans un logiciel qui lui permet de concevoir et de déplacer des symboles représentant les fantômes et Pac-Man. Cet étudiant a ainsi la charge de simuler le jeu, en fonction des actions demandées par ses camarades. Après un temps de prise en main, chaque groupe réussit à trouver une bonne manière de fonctionner (certains recréent même la grille fournie dans le logiciel de leur choix). Notons tout de même que le temps réel passé à travailler sur la situation de recherche en est plus ou moins affecté dans les groupes. Enfin, n'étant que deux animateurs pour encadrer cette activité, la navigation entre les cinq groupes est moins spontanée et peut-être moins pertinente.

Nous proposons l'activité sous un format un peu différent que lors de la première expérimentation. Dans un premier temps, les étudiants disposent d'une petite grille et de quatre fantômes. Ce cas particulier est très rapidement balayé par tous les groupes qui remarquent que les fantômes gagnent toujours. En attendant la suite, un groupe essaie même de trouver la manière de disposer les fantômes pour être sûr de gagner en un minimum de coups. Cette première phase nous permet également de gérer les premières difficultés liées au distanciel. Dans un second temps, nous leur distribuons une fiche présentant le problème général avec une indication : on pourra commencer par une ligne, puis deux, puis trois, etc. Lancés sur la résolution générale, rares sont les groupes qui se sont servis de cette aide à la recherche.

Une fois lancée l'activité dans les cinq groupes, la phase de recherche est assez similaire à celle observée l'année précédente, avec la même difficulté pour exhiber une stratégie. Il est à noter qu'un groupe ayant suivi l'indication arrive plus facilement à exhiber des stratégies en battue (voir figure 13) et à justifier qu'elles aboutissent bien à la capture de Pac-Man mais seulement pour un nombre de lignes compris entre un et quatre. Ils conjecturent que plus le nombre de lignes est élevé, plus le nombre de fantômes nécessaires croît. Cette conjecture fausse est néanmoins cohérente avec leur stratégie en battue qui est plus compliquée (mais possible) à mettre en place avec une grille ayant beaucoup de lignes.

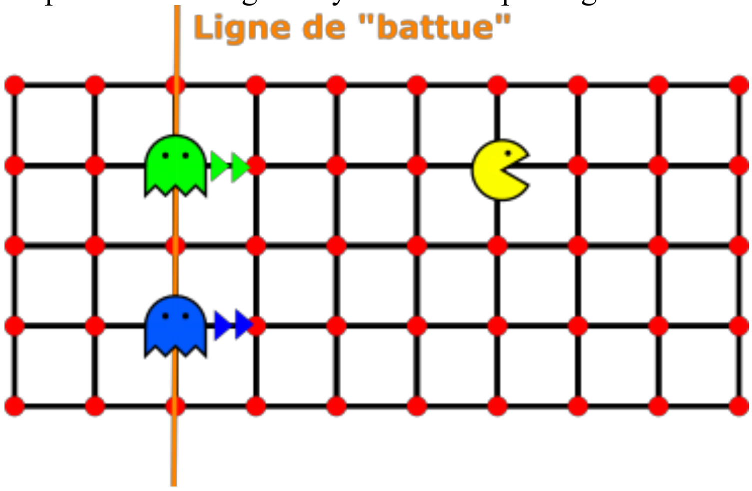


Figure 13 - Illustration de la stratégie en battue. Les fantômes se mettent en colonnes et forment une ligne de battue infranchissable par Pac-Man. Ils peuvent ensuite acculer Pac-Man sur le bord.

Test de l'activité dans une classe de 3ème

L'activité a été proposée dans une classe de 3ème avec 29 élèves répartis en 7 groupes. On indique aux élèves qu'ils vont travailler sur une situation de recherche pendant cette séance. La fiche avec la règle du jeu et la petite grille sont sur les tables. Les élèves sont invités à lire les règles du jeu et le but de l'activité. Un échange s'ensuit pour s'assurer que tout le monde a compris ces règles et ce qui est demandé.

Grille $\mathbf{5 \times 4}$

Les groupes se mettent rapidement au travail sur la grille 5×4. Tous les groupes constatent qu'avec quatre fantômes Pac-Man perd rapidement. Certains remarquent qu'ils n'utilisent pas tous les fantômes pour gagner, donc ils les enlèvent. Ils arrivent tous à constater que deux fantômes suffisent pour gagner et sont aussi nécessaires car un seul fantôme ne suffit pas (dans ce cas, le fantôme et Pac-Man se courent après indéfiniment).

Un bilan est fait à ce moment-là. Une grande grille est ensuite distribuée sur feuille A3, avec des caches pour en modifier les dimensions.

Autres grilles rectangulaires

Les élèves testent sur d'autres grilles. La plupart des groupes choisit des grilles de taille aléatoire, sans méthode particulière. D'abord des plus grandes, puis plus petites puis encore plus grandes. Ils constatent que les parties sont plus longues lorsque la grille est plus grande. Tous les groupes sauf un arrivent à la conclusion qu'il faut deux fantômes pour attraper Pac-Man, même si au départ plusieurs ont pensé que plus la grille serait grande, plus il faudrait de fantômes.

Voici quelques extraits de leurs remarques et arguments (on pourra en trouver d'autres en annexes) :

> Pour pouvoir manger, les fantômes doivent essayer de le suivre et de l'emmener dans un coin, pour limiter les issues.

> Il faut minimum 2 fantômes pour attraper PacMan, sur n'importe quelle grille car si il y en a qu'un seul, PacMan et le fantôme se courent après mais ne s'attrapent jamais.

On a aussi entendu :

- On essaie d'amener un fantôme sur la même ligne que Pac-Man.
- Quand Pac-Man est au milieu, il a quatre chemins possibles. Au bord, il a trois chemins possibles. Dans un coin, il a deux chemins possibles.

Il est évident pour les élèves que les fantômes peuvent toujours se rapprocher de Pac-Man. Les élèves s'« agacent » lorsqu'on leur demande ce que signifie « se rapprocher » ainsi que d'expliquer comment faire. Un groupe finit par dire qu'il faut faire diminuer la longueur du chemin entre le(s) fantôme(s) et Pac-Man.

Grille où un seul fantôme suffit

Trois groupes abordent cette question. Ils trouvent la ligne (ou grille $n \times 1$) et un triangle.

D'autres expérimentations

La situation a aussi été proposée à un groupe de trois élèves de troisième lors d'un stage qu'ils effectuaient à l'Institut Fourier, le laboratoire de mathématiques fondamentales de Grenoble. Là encore, exhiber une stratégie est un point délicat à appréhender. Cependant, l'indication de regarder des grilles avec peu de lignes facilite le travail. Les jeunes, sur une matinée de trois heures résolvent le problème et vont même plus loin en étudiant la bande et le tore.

Enfin, le problème a fait l'objet d'un stage d'un mois pour un étudiant de deuxième année de licence de mathématiques. Le but de son stage était de donner différentes stratégies à deux fantômes et de justifier que celles-ci aboutissent à la capture de Pac-Man. Le stagiaire a ainsi pu mettre en évidence une petite dizaine de stratégies différentes.

Bilan

Des éléments pour la gestion de cette SiRC en classe

Comme nous l'avons fait lors de l'atelier, nous présentons dans cette section les moments clés qui, au vu de nos expérimentations, ressortent à chaque expérimentation de cette SiRC. Il est à noter que l'appropriation préalable du problème par l'enseignant est recommandée puisqu'elle lui permet d'appréhender au mieux les différentes stratégies proposées par ses élèves.

Les élèves sont répartis en groupe (jusqu'à quatre élèves par groupe). Une fiche décrivant la règle du jeu est donnée à chaque groupe ainsi qu'un jeton Pac-Man et quatre jetons fantômes. Suite à différentes expérimentations en classe, il apparaît que les élèves parviennent mieux à résoudre le problème quand l'activité se déroule en deux temps.

En premier lieu, il s'agit de les faire travailler sur une petite grille (par exemple 4×5) sur laquelle ils peuvent se familiariser avec les règles du jeu et faire quelques premières observations. Il est assez naturel pour eux de ne pas utiliser les quatre fantômes disponibles sur cette petite grille et une majorité de groupes constate aisément que deux sont suffisants pour attraper Pac-Man à coup sûr tandis qu'un seul fantôme ne peut attraper Pac-Man. Parfois, certains groupes s'interrogent sur l'influence de la position initiale des fantômes. Ce questionnement peut les amener à tester le plus grand nombre possible des positions initiales ; des arguments de symétrie de la grille les aident alors à raisonner par exhaustivité des cas.

Dans un second temps, on fournit aux élèves une plus grande grille et on laisse à leur disposition des jetons fantômes supplémentaires s'ils en font la demande. On incite les élèves à faire varier la taille de la grille à l'aide de caches (des feuilles de papier font l'affaire pour en réduire les dimensions). Le passage à une grille de plus grande taille soulève souvent une première difficulté : les élèves considèrent que le nombre de fantômes nécessaires à la capture de Pac-Man augmente avec la taille de la grille. Les stratégies mises en œuvre à ce stade de l'activité sont souvent encore balbutiantes. Certains groupes peuvent ainsi se perdre dans de longues parties sans parvenir à dégager de procédure efficace pour coincer Pac-Man. Une bonne indication consiste alors à leur suggérer d'étudier des cas particuliers, notamment des grilles de taille $1 \times n$, $2 \times n$, $3 \times n$ etc. Une telle aide permet souvent aux élèves de prendre du recul sur le problème et de commencer à dégager des stratégies.

Comme le montrent les retours d'expérimentation présentés précédemment, l'énoncé clair d'une stratégie et de sa justification est la difficulté majeure pour les élèves. La question même de la justification, en termes d'une quantité qui décroît (aire, distance entre Pac-Man et les fantômes...), peut être compliquée à comprendre, puisque, comme le disent souvent les élèves, ça se voit que Pac-Man va être attrapé. Il s'agit alors de repréciser ce que l'enseignant attend, à savoir une suite d'instructions qui donne les déplacements des fantômes en fonction de celui de Pac-Man. Il est intéressant de noter que les arguments déployés par les élèves sont souvent divers et que la stratégie présentée dans cet article n'en est qu'une parmi plusieurs. La dernière phase de l'activité peut donc être constituée d'une mise en commun des différentes stratégies proposées par les élèves et de la discussion de leur validité. L'enseignant peut conclure en présentant celle détaillée précédemment, mais cette présentation ne doit pas constituer une correction qui rendrait obsolètes les stratégies dégagées par les élèves. L'enseignant peut enfin faire une synthèse des mathématiques en jeu dans cette SiRC.

Il est de plus à noter que, comme pour toute SiRC, l'activité ne se déroule pas de la même manière selon les niveaux. Des élèves en troisième année de licence de mathématiques comprennent bien mieux la nécessité de prouver qu'une stratégie est gagnante pour les fantômes que des collégiens. L'enjeu de la situation n'est donc pas tout à fait le même en collège puisqu'il faut d'abord faire sentir aux élèves que des arguments vagues ne sont pas des preuves mathématiques et ne peuvent garantir la validité de ceux-ci. C'est un équilibre à trouver pour l'enseignant : on ne peut attendre d'eux qu'ils écrivent une démonstration mais il faut s'assurer qu'une majorité d'entre eux ait compris la pertinence de l'énoncé d'une stratégie dans une forme presque algorithmique et soit capable d'exprimer une argumentation qui repose sur une quantité décroissante. L'enjeu de dévolution non plus n'est pas tout à fait identique : une expérimentation ultérieure à l'atelier en classe de sixième laisse à penser que la phase de sortie du jeu , nécessaire pour entrer dans une résolution mathématique, pourrait être plus longue pour de plus jeunes élèves. Cela pourrait aussi s'expliquer par la connaissance des élèves du jeu-vidéo original de Pac-Man, qui peut amener quelques perturbations dans l'acceptation de la règle spécifique de cette SiRC. Nous espérons pouvoir l'expérimenter à nouveau, notamment en lycée, afin d'étoffer nos hypothèses.

Apports pour les élèves

Au-delà de l'aspect ludique et du plaisir à faire des maths autrement, les élèves et étudiants mobilisent des connaissances et compétences mathématiques spécifiques. Même si certaines connaissances ne peuvent pas être approfondies ou institutionnalisées à tous les niveaux, les élèves se familiarisent avec des concepts d'optimisation, de stratégie gagnante, de condition nécessaire et condition suffisante. De plus, la symétrie est un concept facilement mis en valeur à tous les niveaux. En ce qui concerne les compétences, les élèves peuvent être amenés à :

- Chercher : expérimenter à tâtons, manipuler, étudier exhaustivement sur des petites grilles, conjecturer;
- Représenter : utiliser un dessin ou un graphe ;
- Raisonner : construire des exemples ou des contre-exemples, construire une preuve suite à une argumentation, construire une démarche algorithmique ;
- Communiquer : expliquer et décrire précisément une stratégie, mener collectivement une investigation en confrontant des idées et des argumentations, narrer une recherche.

Références bibliographiques

Godot, K. (2005). Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs. (Thèse de doctorat). Université Joseph-Fourier - Grenoble I.

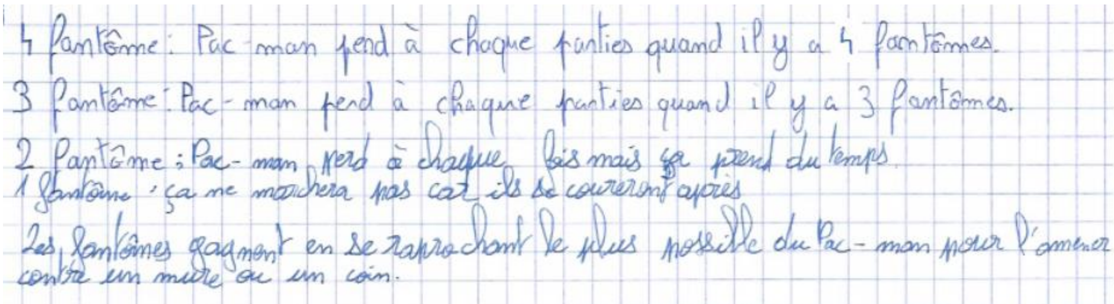
Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situation de recherches "en classe" : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand-Guerrier, C. Tisseron, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques, & Association pour la recherche en didactique des mathématiques (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques : année 2002* (pp. 189–203). Paris : IREM, Université Paris VII : A.R.D.M.

Groupe Logique, Raisonnement et SiRC. (2017). *Situations de recherche pour la classe : pour le collège et le lycée... et au-delà* (IREM de Grenoble, Ed.).

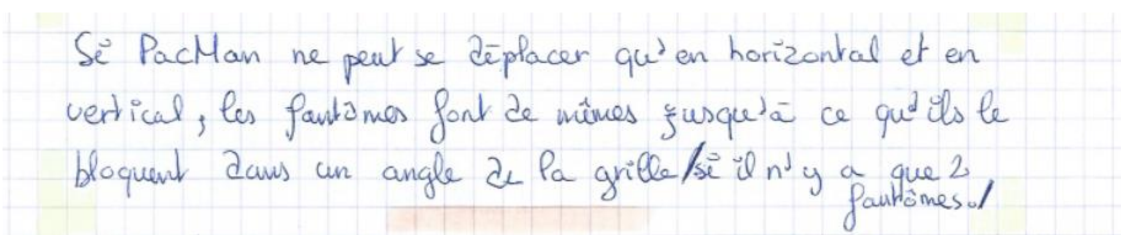
Mansuy, R. (2016, juillet). Pac-Man contre les fantômes. *La Recherche, 513*.

ANNEXE

Voici quelques productions d'élèves lors de l'expérimentation en troisième.



4 fantôme : Pac man perd à chaque parties quand il y a 4 fantômes.
3 fantôme : Pac-man perd à chaque parties quand il y a 3 fantômes.
2 fantôme : Pac-man perd à chaque fois mais ça prend du temps.
1 fantôme : ça ne marchera pas car ils se courerons après
Les fantômes gagnent en se rapprochant le plus possible du Pac-man pour l'amener contre un mur ou un coin.



Si PacMan ne peut se déplacer qu'en horizontal et en vertical, les fantômes font de mêmes jusqu'à ce qu'ils le bloquent dans un angle de la grille /si il n'y a que 2 fantômes./

Pour que les fantômes gagnent à deux, ils doivent aller dans la direction où va Pac-man dès en se rapprochant de lui et pourquoi pas le coincer contre les bords, mais il est aussi possible de le coincer en mettant les fantômes sur 2 des 4 diagonales à côté de Pac-man.

Les stratégies des fantômes ce sont, qu'ils se ressenent en fesant déplacer PacMan vers les coins de la grille.

2 - Lors des partis, cela ne change à rien malgrès la taille de la grille mais la durée de la partie change en fonction du nombre de fantômes qui veulent manger PacMan, donc les partis durent plus longtemps plus que la grille est grande.
Les stratégies des fantômes ce sont, qu'ils se ressenent en fesant déplacer PacMan vers les coins de la grille.

Si il y a seulement 1 fantôme, PacMan et le fantôme vont se courir après car même si PacMan est bloqué dans un angle avec un fantôme en diagonale, il lui suffit de passer son tour pour pouvoir s'échapper après que le fantôme sois soit monté sois descendu.

L'INTERVALLE DE FLUCTUATION D'ECHANTILLONNAGE : UNE FORMATION DIDACTIQUE A LA NOTION DE PREUVE

Jannick TRUNKENWALD, Mohamed ZORAI, Moulay BENMANSOUR

Résumé. Des expérimentations menées au lycée français d'Alger permettent d'envisager la conception d'une ressource exploitable en formation de formateurs. La thématique abordée dans cet atelier se focalise sur les aspects liés aux différents types de raisonnements pouvant être mobilisés pour justifier l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage. Les rôles respectifs de l'informatique, et de la simulation sont au passage requestionnés en regard de questions liées à la modélisation probabiliste. L'analyse des séances exploite la théorie ETM afin de mieux identifier le processus de validation.

Introduction

L'approche dite combinatoire de la notion de probabilité peut correspondre à un travail de dénombrement permettant un emploi de la formule de Laplace pour évaluer une valeur de probabilité en appui sur une situation d'équiprobabilité. La valeur de probabilité est alors le quotient du nombre d'issues favorables par le nombre d'issues possibles. Un travail plus élaboré, faisant appel à des propriétés internes au domaine probabiliste peut aussi au besoin être mis en œuvre pour déterminer une valeur de probabilité.

L'approche fréquentiste de la notion de probabilité est quant à elle une démarche plutôt expérimentale, qui mène à une observation empirique du phénomène de fluctuation d'échantillonnage. Cette fréquence est obtenue en calculant le quotient du nombre de succès obtenus par le nombre de répétitions de l'expérience. La probabilité se manifeste alors comme une valeur limite des fréquences obtenues avec de grands échantillons. On s'appuie alors sur le référentiel de connaissances statistiques pour mettre en place un protocole permettant ce type d'observation portant sur les valeurs des fréquences.

Une bonne compréhension de la notion de probabilité semble passer par une mise en évidencede l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage qui synthétise le lien entre ces deux approches combinatoire et fréquentiste. La mise en œuvre d'un tel objectif passe par un travail de simulation, qui est lui-même facilité par un emploi de l'informatique.

L'organisation de cet atelier CORFEM de formation de formateurs a pour objectif de requestionner la place du raisonnement et de la preuve lors de travaux menés en classe au niveau du lycée en lien avec la notion de probabilité. Notre réflexion s'appuie sur des expérimentations menées en classe à Alger au Lycée International Alexandre Dumas dans le cadre des activités du Laboratoire de Mathématiques Maurice Audin. Cette structure d'accueil, au sens de la mesure 16 du Plan Villani-Torossian, contribue au développement des pratiques professionnelles liées à l'enseignement des mathématiques dans un cadre de coopération éducative.

Nous commençons dans cet article par rappeler certains enjeux épistémologiques sous-jacents,puis nous présentons un cadre théorique permettant d'affiner notre analyse didactique, et enfinnous montrons différentes situations d'enseignement ayant été soumises à la réflexion des participants à l'atelier CORFEM, en résumant la nature des analyses et échanges qui en ont découlé.

Eléments d'une réflexion d'ordre épistémologique

Afin de décrire le lien mathématique entre les deux approches combinatoire et fréquentiste citées en introduction, nous commençons par exposer à ce qui correspond à une approche combinatoire de la notion de fréquence dans le cadre des notions enseignées au niveau du lycée.

La fréquence F_n des succès obtenus lors de n répétitions d'une expérience aléatoire peut être définie sur un univers formé de tous les échantillons possibles de taille n. Afin de nous rapprocher de la notion d'intervalle de fluctuation nous pouvons alors rechercher deux valeurs a et b telles que $P(a < F_n < b) \approx 0{,}95$ en effectuant une simple gestion des données combinatoires liées aux valeurs de probabilités de la distribution binomiale correspondant à la variable aléatoire fréquence.

Cela constitue une approche mathématiquement rigoureuse basée sur un raisonnement de typedéductif, mais qui peut donner lieu à des calculs trop laborieux pour être réalisés de manière raisonnable « à la main » (en raison du nombre de probabilités à calculer et cumuler qui peut être important). Un algorithme exploitant une fonction « loi binomiale » (rédigé ou à l'aide d'un outil tableur) peut alors faciliter le travail en dégageant les bornes a et b à l'issue d'un cumul progressif des probabilités associées à la loi de distribution binomiale en jeu. Cette approche combinatoire permet donc elle-aussi d'obtenir l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage (et d'une manière exacte par utilisation du modèle probabiliste exact). L'usage de ce modèle exact était d'ailleurs entre les années 2012 et 2019 recommandé par l'institution française au niveau de la classe de première à travers une utilisation du tableur pour afficher le calcul des probabilités de toutes les valeurs prises par la variable X_n (ou ce qui est équivalent la variable $F_n=X_n/n$) exprimées de manière directe ou cumulée.

Par ailleurs, l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev peut être mise en évidence dans le cas général d'une loi finie (en minorant la variance avec le produit de $(\lambda\sigma)^2$ par la probabilité que l'écart entre X et E(X) dépasse $\lambda\sigma$). Puis cette inégalité peut être appliquée à la loi binomiale X_n, et on peut poser $\varepsilon = \lambda\sigma/n$. On obtient alors $P(|F_n-p|\geq\varepsilon) \leq p(1-p)/(n\varepsilon^2)$ qui permet d'établir un intervalle auquel la fréquence a plus de 95% de chances d'appartenir. Cela permet aussi de mettre en évidence la loi faible des grands nombres en faisant tendre n vers l'infini : $\lim P(|F_n-p|\geq\varepsilon)=0$. Cette approche présentée dans les documents d'accompagnement du programme de 1ère dès 2012, peut désormais s'avérer utile en tant que justification formelle générale pour l'idée de fluctuation d'échantillonnage au niveau de la classe de terminale. Cela peut se faire dans le cadre d'une situation de tâche probabiliste traitée en classe. Il s'agit de s'appuyer sur la loi binomiale à partir de la notion de variable aléatoire vue en 1ère, et des notions de dénombrement au programme de terminale. La loi de concentration probabiliste explicitée ci-dessus peut alors être introduite an appui sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev conformément au curriculum visé au niveau terminale. Mais en raison de la majoration intervenant au niveau de l'inégalité, cette approche fournit un intervalle moins précis, qui ne fait que contenir cet intervalle de fluctuation à 95% qui nous intéresse.

Dans son travail de thèse, Nechache (2016) avait mis en évidence l'absence au niveau 2nde d'un référentiel théorique probabiliste qui permettrait d'aborder cet intervalle de fluctuation par un raisonnement de type déductif. L'approche de cet intervalle de fluctuation reste en effetà ce stade, expérimentale et basée sur l'observation des fréquences d'échantillons de même taille. Chaque valeur de fréquence correspond à un échantillon obtenu lui-même en répétant uncertain nombre de fois l'expérience aléatoire considérée. Il s'agit bien d'une démarche empirique basée sur un raisonnement de type inductif. De plus, le coût temporel correspondantà la nécessité de répéter un grand nombre de fois la même expérience entraîne un besoin d'automatisation. Cette démarche est « facilitée » par un usage de l'informatique basé sur uneexploitation d'un générateur pseudo-aléatoire.

Le programme de seconde s'est adapté dès 2019 en inscrivant dans les attendus une approche algorithmique, programmée en langage Python, permettant d'évaluer le pourcentage de fréquences contenues dans cet intervalle de fluctuation.

Un environnement numérique (tableur, environnement de programmation, ou environnement de simulation préprogrammé) permet de réduire le temps dédié à la répétition de l'expérience aléatoire, en automatisant un protocole expérimental. Le savoir-faire spécifique à une utilisation d'un environnement numérique peut cependant être source de difficultés supplémentaires (algorithmique, syntaxe du langage machine) pour les élèves, et peut aussi poser un souci d'ordre métacognitif (voire d'ordre cognitif) aux enseignants. Tout cela nécessite l'usage de gestes, de syntaxes, et de modes de pensées spécifiques.

D'un point de vue purement algorithmique, nous pensons que l'approche fréquentiste est baséesur des protocoles expérimentaux permettant de pratiquer une observation empirique de phénomènes liés au hasard. L'enchainement de schèmes, directs ou procéduraux, imbriqués les uns dans les autres s'apparente en effet à ce qui est formalisé par écrit lors de la rédaction d'un programme de simulation.

D'un point de vue épistémologique, nous pouvons aussi considérer une « pensée algorithmique » (Modeste, 2012 et Laval, 2018) dans le cadre d'un travail mathématique portant sur les probabilités et les statistiques. Nous pensons aussi que le travail de rédaction de l'algorithme de simulation correspond à une étape supérieure de formalisation des différents protocoles statistiques en jeu : 1) recueil des résultats des expériences aléatoires simulées (série statistique), 2) interprétation et le pointage des succès (série de 1 ou de 0 dont la moyenne est la fréquence) et calcul de la somme puis de la fréquence (dont on perçoit clairement ici le lien avec la moyenne de réponses apportées par un variable aléatoire de loi de Bernoulli), 3) répétition de tout ceci pour obtenir une liste de fréquences simulées (constituant une nouvelle série statistique) qui est finalement représentée sous forme d'un nuage de points. Cette approche fréquentiste de la valeur de probabilité est basée sur un raisonnement de type inductif.

Cadre théorique

Espace de Travail Mathématique

Afin de cerner au-mieux les éléments du référentiel théorique opérant au cours du travail mathématique mené par les élèves nous allons devoir identifier leur rôle dans le processus de validation de ce travail par une preuve. Pour cela nous devrons prendre en considération les signes et symboles permettant un traitement mathématique au sein de chaque système de représentation, ainsi que la conversion du travail mathématique d'un registre sémiotiques mis en œuvre, à l'autre. Enfin, en lien avec l'ensemble de ce processus nous devrons identifier et distinguer la dimension instrumentale basée sur l'usage de schèmes d'actions, de schèmes mentaux, ou de boites noires, que l'on nommera artefacts. Cette dimension instrumentale n'appartient en effet ni à la discipline des mathématiques en elle-même, ni à son expression visuelle, mais participe du travail mathématique en contribuant à la connaissance. Noussommes de ce point de vue amenés à exploiter l'Espace de Travail Mathématique (ETM) tel qu'il a été défini par Kuzniak (2011). Les outils technologiques (*artefacts*), sémiotiques (*representamen*), et théoriques (*référentiel*) du plan épistémologique, peuvent alors être exploités à l'aide de schèmes appropriés. On parle dans ce cas respectivement de *genèses instrumentale*, *sémiotique*, et *discursive*. Ces genèses respectives produisent dans le plan cognitif des *constructions*, des *visualisations*, et des *preuves*. Enfin, l'activation de deux genèses peut entraîner une circulation entre les dimensions qui les portent, ce qui peut parfois être rapprochée de l'idée de modélisation.

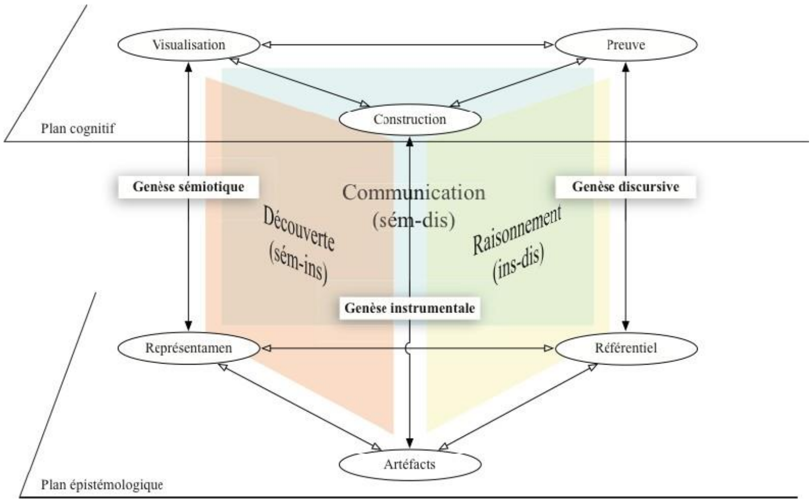


Figure 1. L'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak & Richard, 2014)

Concernant la dimension discursive de l'ETM, un référentiel théorique issu d'un domaine mathématique particulier fournit un ensemble de propriétés, de théorèmes, de définitions, d'axiomes, qui peuvent être exploités pour établir une preuve mathématique. Lorsque c'est le cas on parle d'une genèse discursive. Un nouvel élément de connaissance peut alors éventuellement intégrer le référentiel théorique de l'ETM considéré. Cela enrichit alors le savoir de référence accessible au niveau du plan épistémologique pour ce sujet cognitif.

Concernant la dimension sémiotique de l'ETM, des signes visuels sont affectés à un rôle de signifiant correspondant à son signifié mathématique. Cette démarche intellectuelle fait partie intégrante de la culture du mathématicien. La pratique des mathématiques permet à une grande variété de tels signes de s'agréger sur le plan épistémologique en embarquant leurs propres propriétés opératoires. Il s'agit aussi de prendre en compte le processus cognitif de visualisation associé à un ensemble de manipulations de signes et outils de représentation pour le travail mathématique. Lorsque c'est le cas on parle de genèse sémiotique.

Concernant la dimension instrumentale certains objets physiques ou mathématiques, nommésartefacts, sont associés à des schèmes d'actions, et peuvent intervenir dans le travail mathématique en tant qu'outils, sans que le questionnement de l'élève porte sur la structure interne ou le fonctionnement de ces mêmes objets. Lorsqu'un tel artefact est instrumentalisé dans un but précis, la démarche de construction qui en ressort peut alors donner lieu à un automatisme qui s'agrégera au plan épistémologique en tant que nouvel artefact. D'un point de vue cognitif ces constructions sont parfois répétées afin de fournir des données empiriques, ou servent de la même manière dans différentes situations, à la manière de « recettes » automatisées. On parle alors d'une genèse instrumentale.

Exemple d'analyse didactique

Pour établir l'intervalle de fluctuation en 2$^{\text{nde}}$, l'absence de justification formelle disponible dans le référentiel théorique des élèves a été abordée par Parzysz (2009) :

> L'accès à la notion de modèle qui est une finalité visée à terme par le cycle terminal, peut être préparé par l'étude et la simulation d'expériences aléatoires diverses correspondants au même modèle probabiliste. La comparaison des procédures, des tableaux et des hypothèses sous-jacentes doit permettre aux élèves de se convaincre de l'analogie que présentent ces expériences sous leurs apparences diverses, et de déboucher sur la notion de schéma d'expérience, constituant en quelque sorte une classe d'équivalence d'expériences aléatoires. (Parzysz, 2009, p. 102).

Nechache (2016) aborde aussi ces questions en présentant le cycle de modélisation d'un modèlemathématique de type numérique, l'expérience réelle est d'abord simplifiée sous forme d'une expérience aléatoire permettant d'envisager un premier modèle probabiliste réel. Celui-ci est alors éventuellement traduit en modèle numérique pour la simulation. L'exécution de ce programme de simulation peut donner une réponse, qui est d'abord interprété par rapport au modèle réel, puis interprété en regard de l'expérience aléatoire. Nechache souligne cependant une difficulté liée à ce type de modèle numérique :

> Dans l'enseignement secondaire, la construction du modèle probabiliste de type numérique est basée sur des connaissances qui ne sont pas disponibles dans l'espace de travail personnel des élèves. C'est pourquoi, la construction de ce modèle est habituellement prise en charge par le professeur qui laisse aux élèves l'exécution de la simulation. (Nechache, 2016)

Nous souhaitons compléter cette réflexion liée à la problématique spécifique d'une réalisation du programme de simulation qui serait conjointe à son exploitation d'un point de vue probabiliste. Nous formulons l'hypothèse que le modèle final simulant la fluctuation d'échantillonnage est élaboré dans de meilleures conditions si on élabore en classe plusieurs cycles de modélisations abordant successivement l'expérience aléatoire, la construction d'un échantillon, puis la représentation des fréquences de succès associées à une liste d'échantillons de même taille.

En lien avec la phase pré-expérimentale associée au sujet de thèse de l'un des auteurs portant sur l'introduction de la notion de probabilité, nous souhaitons décrire le schéma d'expérience d'une approche fréquentiste suivant les trois cycles de modélisation précités. La situation mathématique considérée est très classique :

Enoncé :

JEU A : On lance un dé à 6 faces. On gagne si on obtient au-moins 5.
JEU B : On lance deux dés à 6 faces. On gagne si la somme des résultats vaut au-moins 9. Pour quel jeu est-il le plus facile de gagner ?

Remarque : Présentation de l'analyse a priori.

Concernant la tâche choisie, nous présentons donc ci-après notre analyse a priori de ce travail mathématique à l'aide d'un tel schéma éclaté de l'ETM suivant ses projections dans les domaines en jeu. Afin d'éviter une surcharge visuelle, nous représentons les trois projections de l'ETM par une vue du dessus. Sachant que le passage à une figure en deux dimensions nous permettra encore de présenter à l'aide de points et de traits mis en gras les différentes genèses Discursive (D), Instrumentale (I), et Semiotique (S) ainsi que les circulations dans les plans situés entre les axes de ces genèses.

Nous présentons cette analyse a priori suivant 3 niveaux de conception et exploitation, qui peuvent aussi être interprétés comme des cycles successifs de modélisation.

1er niveau : Modèle numérique simulant l'expérience aléatoire.

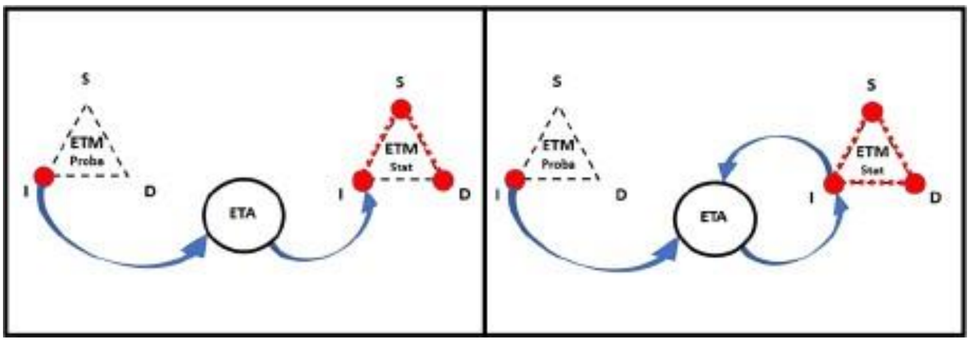


Figure 2 : Analyse par la théorie ETM du 1er niveau de conception/exploitation

- Lancement d'une genèse instrumentale dans l'ETM_{Prob} avec l'idée de tester l'expérience aléatoire. L' ETM_{Prob} entre en interaction avec l'ETA pour simuler l'expérience aléatoire à l'aide du générateur pseudo-aléatoire Alea(). On instrumentalise dans l'ETA l'artefact pour construire l'expérience aléatoire simulée : Alea(1,6)+Alea(1,6).
- Répéter l'expérience aléatoire en relevant les résultats amène à exécuter plusieurs fois l'instruction (interaction de l'ETA vers l'ETM_{Stat}) qui sert d'artefact dans une genèse instrumentale de l' ETM_{Stat} pour construire une série de résultats.
- Dans l'ETM_{Stat} la dimension sémiotique est activée pour organiser visuellement les données (à partir de signes du type « dépouillement » et/ou « tableau »), puis la dimension discursive pour l'idée de mobiliser à partir du référentiel la notion de fréquence des succès obtenus à l'issue du protocole expérimental. Ces outils sont mobilisés par le plan cognitifpour alimenter la genèse instrumentale (pas de genèse dans les dimensions S et D de l'ETM_{Stat}).
- L'idée d'automatiser l'ensemble du processus statistique réactive toutes les dimensions de l'ETM_{Stat} (expérience répétée, gérer les données, notion de fréquence) et engendre uneinteraction en retour de l'ETM_{Stat} vers l'ETA.

2ème niveau : Modèle numérique simulant une fréquence.

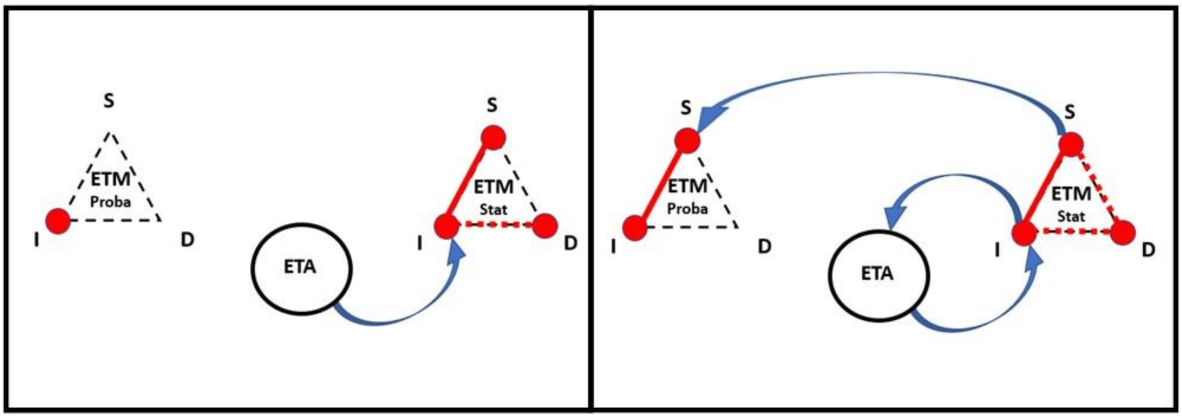


Figure 3 : Analyse par la théorie ETM du 2ème niveau de conception/exploitation

- L'objet « protocole statistique de simulation d'une fréquence » est repris dans l'ETA en tant qu'outil puis traduit sous la forme d'un objet du type « algorithme / feuille de calcul » confectionné pour simuler le calcul d'une fréquence.
- Plusieurs exécutions de l'objet « algorithme / feuille de calcul » mènent à collecter des valeurs de fréquences, et engendre une interaction de l'ETA vers l'ETM_{Stat} . L'objet « algorithme / feuille de calcul » devient un artefact qui engendre une genèse instrumentaledans l'ETM_{Stat} pour construire un nouveau protocole expérimental.
- Pour observer les résultats de fréquences on lance une représentation visuelle. La définition du repérage cartésien disponible dans le référentiel est mobilisée depuis du plancognitif, activant la dimension discursive dans l'ETM_{Stat}.
- Le registre graphique est exploité dans une genèse sémiotique de l'ETM_{Stat} pour visualiserle nuage des points fréquences. Ce lien renforce la genèse instrumentale, d'où une circulation I-S dans l'ETM_{Stat}.

- Cette approche du type « papier » (ou par saisie dans un éditeur de graphique), donne unaperçu du nuage de points et de la fluctuation d'échantillonnage. La visualisation statistique du phénomène correspond à un phénomène lié au hasard. Ce qui engendre uneinteraction entre l'ETM$_{Stat}$ et l'ETM$_{Prob}$ (fibration S-S).
- Ce lien entre deux domaines entraîne une genèse sémiotique dans l'ETM$_{Prob}$. Un lien estétabli avec la genèse instrumentale, en reliant graphiquement les idées d'expérience aléatoire et de fluctuation d'échantillonnage.
- L'idée d'automatiser l'ensemble du processus statistique réactive toutes les dimensions de l'ETM$_{Stat}$ et engendre une interaction en retour de l'ETM$_{Stat}$ vers l'ETA.

3ème niveau : Modèle numérique simulant la fluctuation.

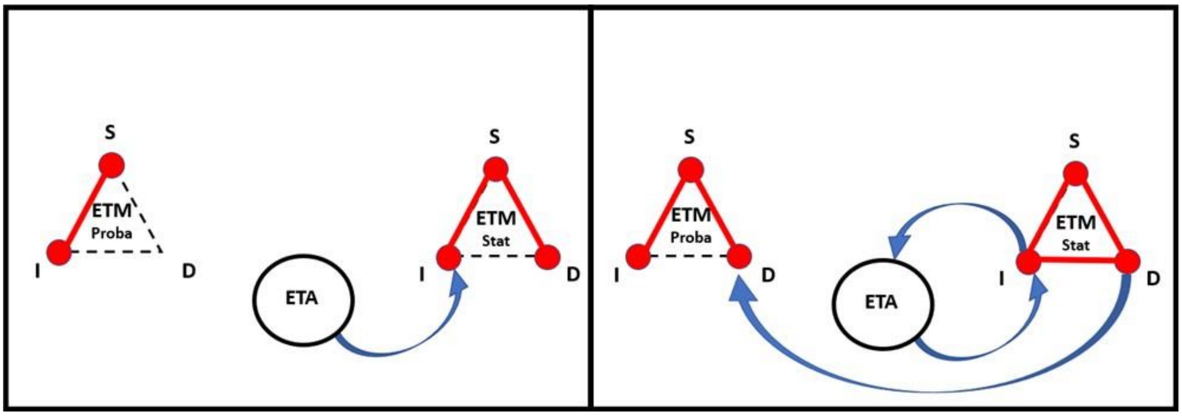


Figure 4 : Analyse par la théorie ETM du 3ème niveau de conception/exploitation

- L'objet « protocole statistique de construction du nuage de points » est repris dans l'ETA comme un objet du type « algorithme / feuille de calcul » pour construire automatiquement un nuage de points fréquences.
- L'exécution de cet « algorithme/feuille de calcul » consolide les genèses et la circulation I-S dans l'ETM$_{Proba}$.
- Les exécutions multiples de l'outil « algorithme / feuille de calcul » permettent d'observer l'amplitude du nuage de points (interaction de l'ETA vers l'ETM$_{Stat}$). On construit un protocole (genèse instrumentale dans l'ETM$_{Stat}$).
- Ecarter les valeurs extrêmes (repère cartésien) entraîne une genèse discursive de l'ETM$_{Stat}$(tracés horizontaux pour élaguer). Ces signes graphiques sont exploités dans une genèsesémiotique de l'ETM$_{Stat}$ (localiser le nuage).
- Des modifications successives dans l'objet-outil « algorithme/feuille de calcul » (nombres de tests par échantillon, et d'échantillons) permettent de conjecturer une formule pour l'intervalle de fluctuation. Ces interactions entre l'ETM$_{Stat}$ et l'ETA renforcent les genèses et la circulation dans dans l'ETM$_{Stat}$: I-S , S-D , et D-I .
- Conjecturer une formule pour les bornes de l'intervalle, nécessite un raisonnement inductif (genèse discursive dans l'ETM$_{Stat}$). Cette interaction entre l'ETM$_{Stat}$ et l'ETM$_{Prob}$est du type fibration D-D.
- Cette genèse discursive dans l'ETM$_{Prob}$, prolonge la genèse sémiotique. Une circulation S-D se produit dans l'ETM$_{Prob}$. L'expérience aléatoire est reliée à la formule (modélisation formelle de l'intervalle de fluctuation).

Situations analysées

Les différentes situations qui suivent ont été soumises à la réflexion des participants à l'atelier CORFEM. Chacune correspond à une manière d'aborder en classe l'énoncé de problème présenté dans la partie précédente de cet article. Il s'agissait de réfléchir a priori au travail mathématique mis en œuvre en classe par les élèves pour aborder l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage.

Exploitation statistique d'un nuage de points

Cette première situation a été expérimentée au niveau d'une classe de 2^{nde} du Lycée International Alexandre Dumas à Alger. En lien avec l'énoncé précité, les élèves ont pu tester à l'aide de dés physiques l'expérience aléatoire. Puis à l'issue d'une mise en commun ayant permis de regrouper les données obtenues, l'outil tableur a été mis à leur disposition pour simuler des échantillons de taille 400.

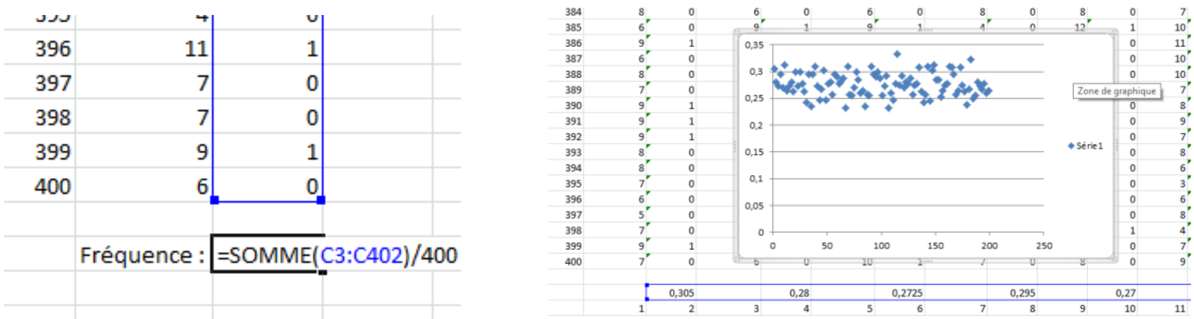


Figure 5 : Travaux menés sur tableur

Cette activité menée sur tableur correspond à l'approche fréquentiste analysée dans la partie précédente de cet article : simulation de l'expérience aléatoire, puis simulation d'un échantillon de taille 400 avec sa fréquence associée pour les succès, puis simulation d'une série d'échantillons de taille 400 permettant de construire un nuage de points représentant les fréquences obtenues. Chacune de ces trois étapes peut être assimilée à un nouveau cycle de modélisation permettant de préciser ce travail d'exploration du phénomène associé à l'expérience aléatoire visée.

Les élèves peuvent ensuite en déduire une conjecture de la valeur de probabilité de gagner à cejeu, en obtenant un aperçu clair du phénomène lié à l'intervalle de fluctuation.

Si le travail d'implémentation sur tableur de ce protocole de simulation se déroule plutôt dans le domaine algorithmique, il est aussi associé à une démarche statistique. Le fichier finalisé surtableur correspond alors du point de vue du domaine probabiliste à un artefact qui peut être instrumentalisé pour une construction plus précise du nuage de points. Dans l'exemple mis en illustration on remarque un mode de 0,27 correspondant à 13 fréquences, et une moyenne des extrema valant 0,2775 pour les fréquences élaguées à 95%.

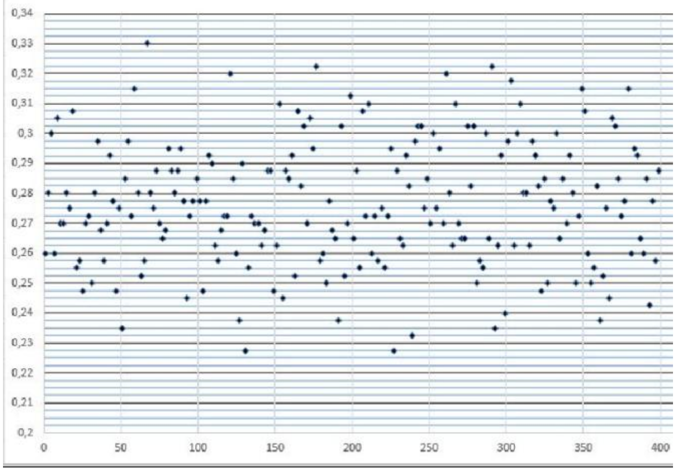


Figure 6 : 200 échantillons de taille 400 simulés au tableur (p=10/36)

Cet exemple a permis aux participants de l'atelier CORFEM de mieux appréhender l'analyse apriori de l'approche fréquentiste précédemment décrite. Les échanges ont principalement porté sur la question du raisonnement et de la preuve, qui est rattachée à la dimension discursive de l'ETM. Si en effet ce travail de conjecture relève plutôt de la dimension instrumentale d'un point de vue probabiliste, il s'agit cependant bien d'une mise en évidence rigoureuse de l'intervalle de fluctuation au sein du domaine des statistiques descriptives. L'importance de bien situer l'identification d'une démarche de raisonnement en regard d'un domaine mathématique particulier a donc été soulignée.

Exploitation de la loi binomiale

Cette deuxième situation est extraite d'une activité qui a été soumise à une classe de terminale du lycée El Malak (Alger) dans le cadre des travaux de thèse de l'un des auteurs. Il s'agit d'exploiter la loi binomiale pour dégager les bornes de l'intervalle de fluctuation.

Une première tâche, préliminaire, consiste à déterminer la probabilité que le nombre de succèssoit compris au sens large entre 3 et 7 lors de 20 parties jouées. Deux types de résolutions sontprésentées aux participants à l'atelier CORFEM : la première en utilisant sur tableur la fonctionnalité « loi binomiale », la deuxième en utilisant en mode papier crayon un raisonnement calculatoire dans le registre algébrique. Il s'agissait d'identifier les aspects de validation mathématique et de raisonnement associés à chacune de ces approches.

k	P(X=k)	CUMUL
0	0,00149	
1	0,01147	
2	0,0419	
3	0,09669	0,09669
4	0,15806	0,25475
5	0,19453	0,44929
6	0,18705	0,63634
7	0,14389	0,78022
8	0,08993	
9	0,04612	
10	0,01951	
11	0,00682	
12	0,00197	
13	0,00047	
14	9E-05	
15	1,4E-05	
16	1,7E-06	
17	1,5E-07	
18	9,6E-09	
19	3,9E-10	
20	7,5E-12	

Approximation numérique par le tableur

Expression exacte par une approche combinatoire

$$P(3 \leq X \leq 7) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$$
$$= \binom{20}{3}\left(\frac{10}{36}\right)^3\left(\frac{26}{36}\right)^{17} + \binom{20}{4}\left(\frac{10}{36}\right)^4\left(\frac{26}{36}\right)^{16}$$
$$+ \binom{20}{5}\left(\frac{10}{36}\right)^5\left(\frac{26}{36}\right)^{15} + \binom{20}{6}\left(\frac{10}{36}\right)^6\left(\frac{26}{36}\right)^{14}$$
$$+ \binom{20}{7}\left(\frac{10}{36}\right)^7\left(\frac{26}{36}\right)^{13}$$

Figure 7 : Approche basée sur la loi binomiale

Les échanges lors de l'atelier mènent alors les participants à relativiser la nature des genèses enjeu au niveau de l'ETM. Cela confirme d'ailleurs les remarques associées à la situation précédentes qui donnent de l'importance au domaine mathématique considéré avant de conclure.

Dans l'approche tableur, le travail mathématique semble contenu dans la plan SEM-INS. Mais cela concerne le point de vue d'un travail mené dans le domaine des statistiques descriptives, en appui sur le tableur et ses fonctionnalités ainsi que le registre des tableaux. Cependant d'unpoint de vue probabiliste, le registre associé à ce tableau rempli de valeurs numériques masqueun travail de fond non apparent visuellement qui fait appel à différentes notions : lien avec l'expérience aléatoire, additivité des probabilités, incompatibilité entre les évènements associés à chaque ligne, variable aléatoire de loi binomiale, et lien avec la fréquence. Cela est d'autant plus exigeant que les élèves ne peuvent pas s'appuyer sur un registre plus explicite pour interpréter ces notions théoriques sous-jacentes.

Pour l'approche située dans le registre algébrique, on peut tout à fait envisager la formule de laloi binomiale comme un artefact automatisé correspondant au nombre de succès obtenus dès lors qu'une genèse sémiotique est activée en ce sens par l'écriture usuelle de calculs probabilistes citant les variables aléatoires. Tout dépend du niveau d'habitude des élèves sur cegenre de problème.

96	0,24	0,010770809	0,04987523
97	0,2425	0,012983052	0,06285828
98	0,245	0,01543903	0,07829731
99	0,2475	0,018114169	0,09641148
100	0,25	0,020970634	0,11738211
101	0,2525	0,023957312	0,14133942
102	0,255	0,027010695	0,16835012
103	0,2575	0,030056711	0,19840683
104	0,26	0,033013473	0,2314203
105	0,2625	0,035794828	0,26721513
106	0,265	0,038314493	0,30552963
107	0,2675	0,040490514	0,34602014
108	0,27	0,042249717	0,38826986
109	0,2725	0,043531819	0,43180168
110	0,275	0,044292865	0,47609454
111	0,2775	0,044507729	0,52060227
112	0,28	0,044171476	0,56477375
113	0,2825	0,043299473	0,60807322
114	0,285	0,041926278	0,6499995
115	0,2875	0,040103396	0,69010289
116	0,29	0,037896114	0,727999
117	0,2925	0,035379672	0,76337868
118	0,295	0,032635095	0,79601377
119	0,2975	0,02974498	0,82575875
120	0,3	0,026789549	0,8525483
121	0,3025	0,02384321	0,87639151

0,09641148

Par incompatibilité des évènements correspondant aux différentes valeurs possibles de nombres de succès :

P(100≤X≤120) = P(0,25 ≤ f ≤ 0,3) ≈ 0,8525483 – 0,09641148
≈ 0,75613682
≈ 75,6 %

0,8525483

Figure 8 : Exploitation d'une table binomiale pour obtenir l'intervalle de fluctuation

L'attention des participants a été attirée sur le fait qu'une adaptation de cette méthode apparait dans les anciens documents d'accompagnement officiel, de 2012, pour établir l'intervalle de fluctuation. On obtient ainsi : $P(94 \leq X \leq 129) = P(0{,}235 \leq f \leq 0{,}3225) \approx 95{,}6\%$.

Une question est cependant restée en suspens par rapport à cette approche combinatoire de l'intervalle de fluctuation, qui met en œuvre un raisonnement rigoureux basé sur une exploitation de la loi binomiale pour établir les bornes d'un intervalle de fluctuation, mais dont la réponse numérique obtenue après de nombreux calculs automatisés par le tableur, n'est qu'approchée (bien qu'extrêmement précise). Quel est le statut du point de vue de la preuve decette démarche ? Est-ce une démonstration mathématique ? Nous pouvons cependant être assurés que d'un point de vue probabiliste une genèse discursive a bien été activée (contrairement à la situation précédente donnant lieu à une approche fréquentiste et donc de nature empirique pour la valeur de probabilité).

Exploitation du principe d'équiprobabilité

En reprenant toujours avec une classe de terminale la même situation d'un jeu consistant à lancer deux dés, où l'on doit obtenir un total d'au-moins 9 pour gagner, il suffit de considérer un ensemble d'issues équiprobables puis d'appliquer la formule dite de Laplace pour conclure sur la valeur de probabilité qui sera de $10/36 \approx 0{,}2777$. Un dénombrement direct par les élèves des couples de résultats possibles pour chacun des deux dés permet d'arriver à ce résultat. L'exploitation d'un tableau cartésien 6×6, ou d'un arbre de dénombrement à 36 chemins, permettent aussi de décrire un tel univers équiprobable, en appui sur la visualisation de signes auxquels les élèves peuvent être habitués.

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figure 9 : Exploitation d'un tableau cartésien pour le lancer de deux dés

L'effet de la variable didactique correspondant au nombre de dés lancés, est alors soumis à la réflexion des participants à l'atelier CORFEM. On peut par exemple prendre en compte une variante de jeu où on lancerait 3 dés à six faces en considérant qu'une partie est gagnée lorsque la somme des résultats affichés sur ces 3 dés vaut au-moins 13. Pour trouver la probabilité de gagner on peut utiliser 6 tableaux cartésiens 6×6, ou un arbre de dénombrement à 216 chemins, ou encore raisonner sur les 3-uplets de résultats affichés sur chaque dé. Le nombre d'issues favorables est alors de 56 pour 216 issues possibles. Chacune des approches précitées présente déjà un coût important pour les élèves, qui s'aggraverait encore pour un jeu avec 4 dés voir davantage...

Un traitement algorithmique basé sur l'usage de boucles peut apporter une réponse efficace à ce problème posé du dénombrement des issues favorables. Un programme en Python rédigé ence sens est présenté aux participants de l'atelier (voir figure 10). Ceux-ci devaient réfléchir à lanature du travail mathématique attendu de la part d'élèves exploitant une telle approche.

La réaction des participants a pris en compte un élément de contexte essentiel : Si les élèves ne font qu'exploiter un tel programme de simulation, les élèves restent confinés dans la dimension instrumentale de l'ETM probabiliste. Si les élèves ont eux-mêmes réalisé le programme, une genèse discursive est identifiée a priori, et ceci tant du point de vue de domaine algorithmiqueque du point de vue du domaine probabiliste. La question de savoir si ce travail des élèves correspond à une véritable démonstration a cependant divisé les membres de l'atelier, car c'estplutôt l'algorithme qui effectue le travail de dénombrement proprement dit.

```
n=0
s=0

# Lancer de 3 dés à 6 faces

for i in range(1,7):
    for j in range(1,7):
        for k in range(1,7):
            n=n+1
            if i+j+k>=13:
                s=s+1

print("Nombre d'issues favorables : ",s)
print("Nomtre d'issues possibles : ",n)

print("Probabilité d'obtenir 13 ou plus :",s/n)
```

Figure 10 : Algorithme de dénombrement en Python pour le lancer de 3 dés

Approche fréquentiste sans recours à l'informatique

Une expérimentation réalisée au niveau de la classe de 1ère dans un lycée public de Brazzaville(Congo) est présentée aux participants de l'atelier. Ce travail mené en lien avec la thèse de l'un des auteurs a été réalisé en collaboration avec l'Inspection Générale de mathématiques. Il s'agitd'une approche fréquentiste menée à l'aide de dés physiques, en exploitant un support du typepapier-crayon. A ce niveau de classe, les statistiques descriptives ont déjà été abordés dès la classe de 2nde, et les élèves devront travailler sur un chapitre de dénombrement dont les applications donneront lieu à des calculs de probabilités. Une telle activité permet donc d'apporter une nouveauté aux pratiques en réinvestissant les statistiques tout en les reliant à cette notion émergente de probabilité.

Après quelques manipulations des dés permettant d'appréhender la règle du jeu, et de tester une série de parties, une série de tableaux à compléter est distribuée aux élèves, avec un graphiqueà réaliser sur papier millimétré. Cette approche permet de mettre en évidence, pour chacun des

15 binômes d'élèves impliqués dans l'activité, les fréquences de succès associées à 5 échantillons de taille 20. Une mise en commun permet alors à tous les élèves de bénéficier dans un tableau à deux entrées de l'ensemble des résultats des autres binômes pour chacun des 5

échantillons de taille 20. Un regroupement des données permet alors d'en déduire 5 échantillons de taille 300

DOCUMENT A

Tableau 1 :

Numéro du lancer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	Fréquence
Résultat obtenu	6	7	9	5	8	10	8	3	3	5	10	9	10	7	7	9	10	8	4	8		
Succès (O ou N)	O	O	N	O	O	N	O	O	O	O	N	N	N	O	O	N	N	O	O	O	7	0,35

Tableau 2 :

Numéro du lancer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	Fréquence
Résultat obtenu	5	5	8	9	4	7	6	8	5	6	6	5	12	3	9	5	8	11	5	5		
Succès (O ou N)	O	O	O	N	O	O	O	O	O	O	O	O	N	O	N	O	O	N	O	O	4	0,2

Tableau 3 :

Numéro du lancer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	Fréquence
Résultat obtenu	5	9	5	5	3	10	4	10	9	6	12	7	7	7	11	7	11	5	3	10		
Succès (O ou N)	O	N	O	O	O	N	O	N	N	O	N	O	O	O	N	O	N	O	O	N	[illegible]	0,4

Tableau 4 :

Numéro du lancer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	Fréquence
Résultat obtenu	3	9	6	5	8	11	7	5	3	7	7	6	2	9	11	6	12	7	2	10		
Succès (O ou N)	O	N	O	O	O	N	O	O	O	O	O	O	O	N	N	O	N	O	N	N	7	0,35

Tableau 5 :

Numéro du lancer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	Fréquence
Résultat obtenu	9	4	8	10	3	1	6	9	5	10	12	2	7	6	4	9	8	4	6	3		
Succès (O ou N)	N	O	O	N	N	O	O	O	O	N	N	O	O	O	O	N	O	O	O	O	6	0,3

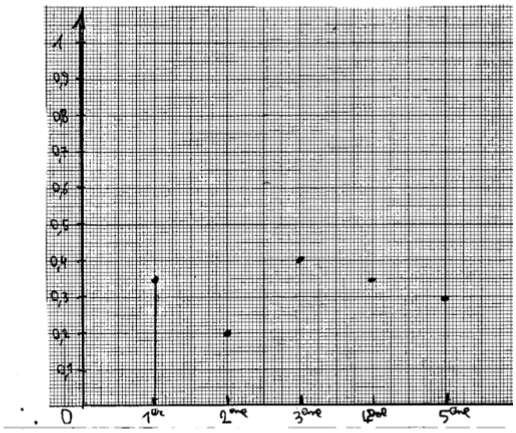


Figure 11 : Documents de travail pour les élèves (approche fréquentiste)

D'après les participants à l'atelier CORFEM c'est ce dernier travail demandé aux élèves qui permet de valider le travail mathématique mis en œuvre au cours de cette activité dans le domaine statistique. Enfin, toujours d'après les participants, une genèse discursive est également en œuvre dans le domaine probabiliste à la fin de l'activité lorsque la fluctuation d'échantillonnage due à l'augmentation de la taille des échantillons peut être observée à partir des deux graphiques.

DOCUMENT B

	Echantillon 1	Echantillon 2	Echantillon 3	Echantillon 4	Echantillon 5
Nombre total de succès	86	93	87	97	98
Fréquence	0,28	0,31	0,29	0,32	0,32

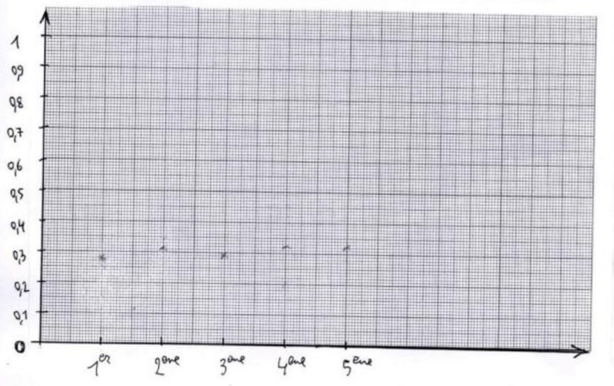


Figure 12 : Graphique représentant les fréquences des 5 échantillons de taille 300

Approche fréquentiste à l'aide de Python

Il s'agit de mettre en œuvre une approche fréquentiste à l'aide d'un programme de simulation en Python. Cette approche fréquentiste ne diffère que d'un point de vue informatique de la version tableur décrite précédemment. Cette version algorithmique amène les élèves à formaliser le protocole de simulation sous forme de consignes claires exprimées à travers un langage précis. De même que pour le tableur, trois étapes de simulation sont à mettre en œuvre :l'expérience aléatoire, la fréquence des succès pour un échantillon, et la production d'une sériede fréquence simulées. Cette liste de fréquences simulées obtenues permet, éventuellement après un classement par ordre croissant, de déterminer empiriquement un intervalle de fluctuation en déterminant le minimum et le maximum des valeurs obtenues (éventuellement après avoir élagué).

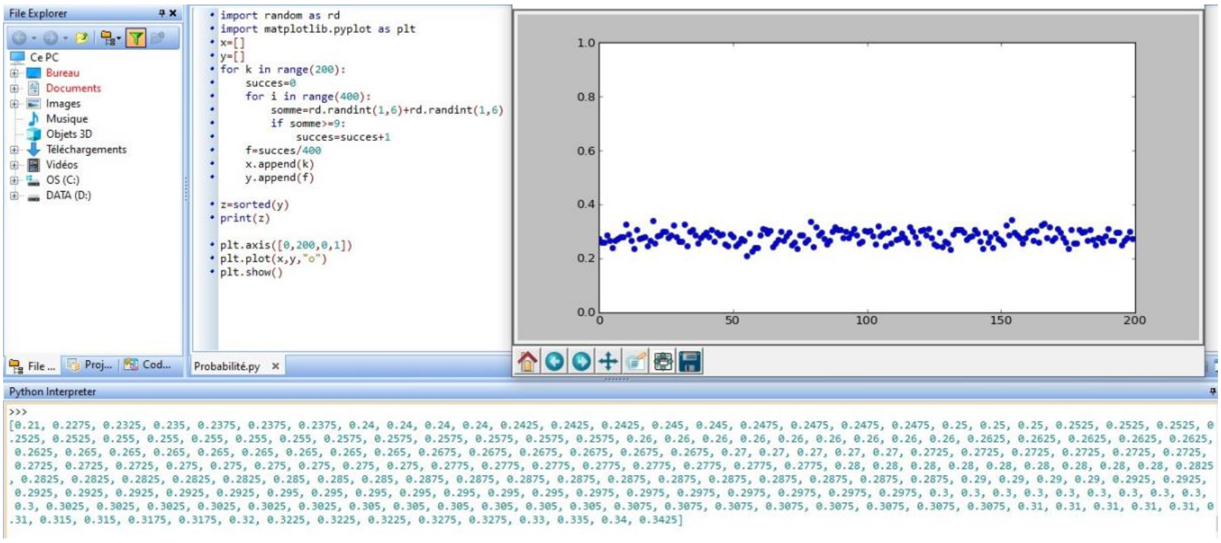


Figure 13 : Exemple de programme de simulation en Python

Les participants à l'atelier CORFEM doivent analyser des scripts en Python rédigés par des élèves. Cette réflexion permet alors de préciser la nature du travail mathématique dans le contexte spécifique d'une démarche de programmation algorithmique.

Au niveau des programmes de simulation trois niveaux d'erreurs sont identifiés : mathématiques, algorithmiques, syntaxiques.

Exemples d'erreurs mathématiques :

- randint(1,12) : cette instruction correspond à un biais d'équiprobabilité
- randint(2,12) : idem
- if n==9 : print(« gagné »)

Exemples d'erreurs algorithmiques :

- oubli d'initialisation de la variable compteur des succès
- lancers de dés en dehors de la boucle
- calcul de la fréquence à l'intérieur de la boucle
- pas de boucle

Exemple d'erreurs syntaxiques :

- import random : oubli de *
- fonction définie à l'intérieur de la boucle
- for i in range (1,2) : ne fait qu'une seule opération
- n=r+r : n'ajoute pas deux valeurs aléatoires distinctes

Les échanges menés avec les participants ont permis de dégager l'importance de la genèse discursive du point de vue du domaine algorithmique (rédaction du programme de simulation), et du domaine des statistiques descriptives (description du protocole expérimental). Par contre du point de vue probabiliste, l'approche fréquentiste reste essentiellement liée à une genèse instrumentale exploitant le programme de simulation comme artefact afin de conjecturer une valeur approchée de probabilité.

Exploitation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Une activité permettant de faire découvrir par des élèves l'inégalité de Bienaymé-Tchebychevest présentée aux participant à l'atelier CORFEM (voir figure 14).

1) Démontrer que pour une variable aléatoire X de loi de probabilité finie :

$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \geq 3/4$$

2) Démontrer le cas général de l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev pour une variable aléatoire X de loi de probabilité finie :

$$P(\mu-\lambda\sigma \leq X \leq \mu+\lambda\sigma) \geq 1 - 1/\lambda^2 \quad \text{(pour tout entier } \lambda>1\text{)}$$

C'est-à-dire : $P(-a \leq X-\mu \leq a) \geq 1 - \sigma^2/a^2$ (avec $a>\sigma$)

Figure 14 : Enoncé introduisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Une deuxième activité peut exploiter cette inégalité pour établir la loi de concentration probabiliste pouvant être déduite de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à partir d'une loi binomiale X_n de paramètres n et p, en posant $F_n = X_n /n$, nous donne pour tout $\varepsilon>0$:

$P(p-\varepsilon \leq F_n \leq p+\varepsilon) \geq 1 - p(1-p)/(n\varepsilon^2)$.

Pour un intervalle de fluctuation centré en p d'amplitude 2ε contenant la fréquence avec une probabilité d'au-moins 0,95 : $p(1-p)/(n\varepsilon^2)=0,05$ c'est-à-dire : $(10/36)(1-10/36)/(400\varepsilon^2)=0,05$

On obtient $\varepsilon^2=260/25920$ donc $\varepsilon=0,100154$. On en déduit un intervalle de fluctuation :

$J=[p-\varepsilon ; p+\varepsilon] \approx[0,177 ; 0,378]$. L'amplitude de cet intervalle (environ 0,2) est presque le doublede l'amplitude de l'intervalle directement rendu par la loi binomiale.

Les participants à l'atelier considèrent qu'une exploitation directe de cette loi de concentration,pour établir un intervalle de fluctuation, relève d'une genèse instrumentale d'un point de vue probabiliste. Tandis que le travail mathématique correspondant à la mise en place de cette loi de concentration correspond à une genèse discursive, en liaison avec le registre algébrique d'unpoint de vue sémiotique.

Conclusion

Cet atelier CORFEM permet de mettre en évidence la complexité associée aux notions de raisonnement et de validation du travail mathématique dans le contexte d'une mise en évidence de l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage. La théorie ETM exploitée en lien avec l'identification des domaines mathématiques en jeu permet d'affiner le grain de l'analyse didactique.

Les échanges menés avec les participants à cet atelier de formation de formateur ont permis de constater la pertinence d'exploiter le domaine de recherche en didactique des mathématiques afin de préciser les concepts manipulés, et aussi de pouvoir les nommer. L'ensemble de ce travail pourra être complété afin de constituer une ressource de formation à destination des enseignants et de leurs formateurs.

Références bibliographiques

Artigue, M. (1992), Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 9-3,pp. 281-308.

Kuzniak, A. (2011a). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *In Annales de didactique et de sciencescognitives, volume 16,* pp. 9-24.

Kuzniak, A. et Richard, P. (2014). Espace de travail mathématique. Points de vues et perspectives. *Relime,* 17(4.1), pp. 29-39.

Laval, D. (2018). L'algorithmique au lycéeentre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot.

Nechache A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au secondaire.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris, France.

Parzysz, B. 2009. De l'expérience aléatoire au modèle, *via* la simulation. *Repères- IREM*, 74.

Trunkenwald, J. (2018). La fluctuation d'échantillonnage : Une synergie entre les domaines probabiliste et statistique. *In Proceedings for the Sixth MWS Symposium.* Valparaiso, Chili.

Trunkenwald, J. & Laval, D., (2019). Algorithms as a discovery process in frequentist approach to prediction interval. *In Proceedings for the CERME 11, WG5a Probability and Statistics Education.* Utrecht, Nederland.

Vergnaud, G., (1989). La théorie des champs conceptuels. *In Publications de l'institut de recherche mathématiques de Rennes.* Fascicule S6. Vème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques et de l'informatique. pp. 47-50.

DEFINIR ET PROUVER : QUELLES INTERACTIONS ?

Cécile OUVRIER-BUFFET

Résumé. Définir pour prouver ou prouver pour définir ? Les interactions entre ces deux heuristiques de l'activité mathématique ne sont pas facilement saisissables. Dans ce texte, qui reprend pour l'essentiel l'exposé, nous illustrerons les spécificités d'un travail sur la définition en mathématiques et mettrons en évidence les liens avec la preuve. Nous ouvrirons ainsi la discussion sur l'intérêt de mettre en œuvre cette dialectique entre définition et preuves en classe.

> *Nous sommes dans une classe de 4ème ; le professeur dicte :*
> *Le cercle est le lieu des points du plan qui sont à la même distance d'un point intérieur appelé centre.*
> *Le bon élève écrit cette phrase sur son cahier ; le mauvais élève y dessine des bonshommes ; mais ni l'un ni l'autre n'ont compris ; alors le professeur prend la craie et trace un cercle sur le tableau.*
> *« Ah ! pensent les élèves, que ne disait-il tout de suite : un cercle c'est un rond, nous aurions compris. »*
> *Sans doute, c'est le professeur qui a raison. La définition des élèves n'aurait rien valu, puisqu'elle n'aurait pu servir à aucune démonstration, et surtout puisqu'elle n'aurait pu leur donner la salutaire habitude d'analyser leurs conceptions. Mais il faudrait leur montrer qu'ils ne comprennent pas ce qu'ils croient comprendre* (…) (Poincaré, 1947, pp. 129-130).

Cette citation pose le problème de la fonction des définitions en mathématiques, problème que l'on peut poser dans la discipline et dans l'enseignement sous l'hypothèse d'une distance entre les mathématiques qui se font et les mathématiques qui s'enseignent. Au-delà d'une dénomination, la définition permet d'appréhender un concept et est un élément structurant dans une axiomatique. C'est ainsi un élément central dans l'activité mathématique de construction de connaissances et de preuve. Certains travaux (e.g. Mariotti & Fischbein, 1997) montrent la nécessité de se pencher sur le processus de définition car il donne accès à une compréhension des concepts et des axiomatiques et permet de discuter la place et le rôle des énoncés mathématiques. L'étude des activités de « définition » (avec plusieurs intitulés dans la littérature tels que *defining, defining processes, definitional procedure, defining activity*) est cependant relativement peu développée dans le champ de la didactique des mathématiques, et les interactions entre définir et prouver le sont encore moins. Nous proposons ainsi, dans cet article, d'appréhender les activités de définition dans la discipline des « mathématiques » afin d'extraire des potentialités pour l'enseignement en mettant en évidence des liens avec la preuve. Nous commencerons par étudier quelques concepts de mathématiques contemporaines, puis nous présenterons des propositions pour l'enseignement mettant en jeu l'articulation définir-prouver. Nous poserons les fondements épistémologiques proposés par Lakatos (1984) afin d'apporter des outils pour penser cette articulation. Les conclusions et perspectives ouvriront la discussion sur des pistes pour l'enseignement et la formation.

Petite visite chez des mathématiciens contemporains

Méchanceté d'un convexe

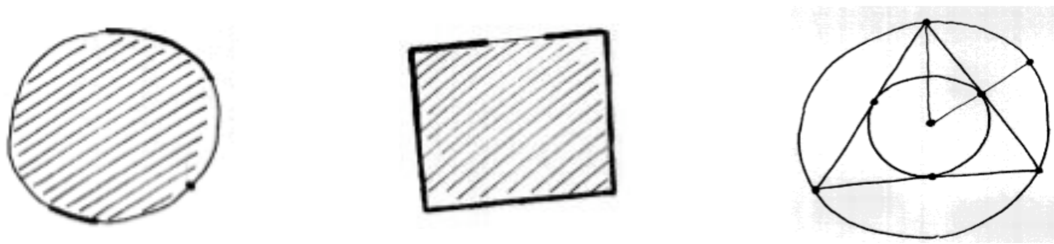
La convexité, comme le souligne le mathématicien Berger (2006), est un sujet riche :

> *La convexité dans le plan et dans l'espace* présente un sujet passionnant, la convexité, à la fois par sa simplicité, sa naturalité et sa puissance, pour au moins trois raisons :
> – au niveau des questions que l'on peut se poser naturellement, géométriques, visibles ;

– du fait que la convexité est une notion qui se rencontre dans de nombreuses branches des mathématiques ;
– du fait de son utilité, de sa force, dans de nombreuses applications.

La convexité « géométrique » (structures des corps convexes) et la convexité « fonctionnelle » (propriétés des fonctions convexes) sont deux domaines distincts en mathématiques. Nous présentons ici brièvement une problématique géométrique de mathématiciens et reviendrons plus loin sur un exemple de questionnements sur la convexité en classe au niveau de l'école.

Berger (2006) propose d'étudier la « méchanceté » d'un convexe, c'est-à-dire de juger du défaut d'être rond. Il met en évidence quatre critères (ellipse de John Loewner, rapport aréolaire, inégalité isopérimétrique inverse, produit aréolaire) et s'intéresse à définir différemment des degrés de méchanceté, réutiliser des résultats connus, mobiliser la dualité, changer de dimension et générer de nouveaux problèmes. Le plus méchant des convexes semble être le triangle, comme illustré dans la Figure 1. La situation en 3D est bien différente et encore un problème d'actualité chez les mathématiciens.



Gentil convexe — Un peu plus méchant (pas convexe !) — LE plus méchant des convexes

Figure 1 – La méchanceté des convexes (MATh.en.JEANS, 1992)

Nous renvoyons le lecteur à une fiche MATh.en.JEANS (1992) pour une découverte de ces convexes, adaptation par Pierre Duchet et Charles Payan de la conférence inaugurale de Marcel Berger au Palais de la Découverte.

Géométrie discrète (ou géométrie sphérique) versus géométrie euclidienne

Étudier le devenir d'une définition d'un concept familier dans un cadre différent, ce que propose par exemple MATh.en.JEANS (1995, 1997) avec des carrés sur la sphère (Figure 2), ou Ouvrier-Buffet (2006a) avec des droites discrètes, permet d'engager une activité de définition. En effet, ce type de situation peut impliquer des activités de définition se plaçant à des niveaux différents quant au point de vue axiomatique. Prenons l'exemple de définir dans le cadre de la géométrie sphérique ou discrète. Il s'agira alors d'une recherche extrinsèque ou intrinsèque :

- une recherche extrinsèque si la géométrie euclidienne est considérée comme un outil d'investigation avec un travail de transposition de définitions existantes (on cherche à conserver et préserver une axiomatique existante avec des objets connus mais placés dans un autre cadre mathématique) ;
- une recherche *intrinsèque* si l'on construit une « autre » géométrie en cherchant de nouveaux principes applicables au nouveau cadre : on abandonne alors l'axiomatique connue au profit de la construction d'une nouvelle, locale, plus productive. Il s'agit en quelque sorte de « désinstitutionnaliser » le savoir préexistant, ce qui peut s'avérer déstabilisant.

Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ?

par Sothi Mok (3°), Michel Vongsavanh (3°), Eric Chin (3°), Siek-Hor Lim (1°S), Eric Akbaraly (1°S), élèves et anciens élèves du Collège Victor Hugo (2 rue Elsa Triolet, 93160 Noisy-le-Grand)

enseignants : Mme Martine Brunstein et M. Pierre Lévy

chercheur : M. Pierre Duchet

« Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ? » Cette question qui paraît si bête est en fait le prétexte pour une réflexion sur la définition d'un carré dans une sphère. Plusieurs mois de travaux et plusieurs feuilles d'exposé pour en arriver à la conclusion qu'un carré peut ne pas posséder d'angle droit.

Compiègne
Compte-rendu du groupe 42 parrainé par le groupe 37.

Des élèves de Noisy ont complètement résolu le problème de savoir s'il existe des carrés dont les 4 sommets sont sur une sphère, connaissant deux sommets. Leur sujet se présentait donc par une question :

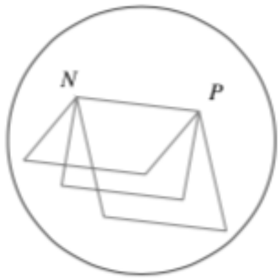
« Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ? »

Ils nous ont montré que oui en traçant, sur le globe terrestre, un "carré bossu".

Nous avons remarqué que leur exposé était bien complet et les démonstrations étaient tout-à-fait valables, mais peut-être dites un peu trop vite pour permettre la compréhension de certain spectateurs.

Voilà une curieuse question pour un sujet de recherche en mathématiques car à première vue, la réponse paraît simple. En effet, dans l'espace, nous pouvons par des plans de coupe, obtenir le support d'une infinité de carrés possédant des sommets à l'endroit où l'on veut.

En fait, tous les plans contenant la droite passant par Paris et New-York conviennent pour y tracer nos carrés : on peut imaginer un plan pivotant autour de l'axe Paris-New-York, comme sur la figure ci-dessous.



Cependant ces carrés ne sont pas sur la surface de la Terre, assimilée à une sphère parfaite.

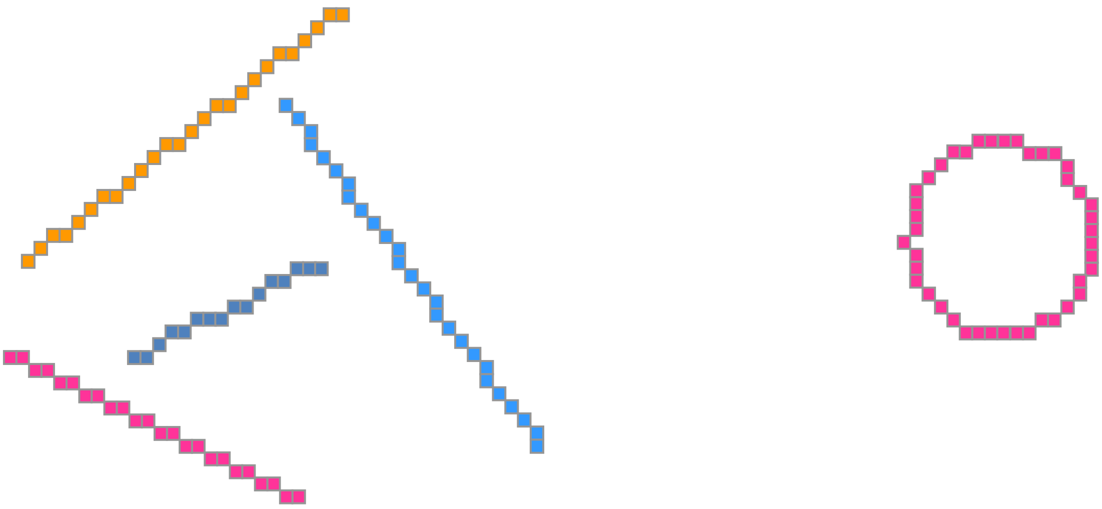
En tentant de résoudre ce nouveau problème, c'est à une géométrie singulière que l'on doit faire face car nous n'avons jamais étudié de telles figures sur une surface sphérique.

Pour construire de tels carrés, il nous a fallu définir ce qu'est un segment et un angle sur une sphère.

Figure 2 – Paris et New York sont-ils les sommes d'un carré ? (MATh.en.JEANS, 1995)

Dans MATh.en.JEANS (1995 & 1997), une expérience menée avec des élèves de collège (3ème) et de lycée (1ère S) en géométrie sphérique, est décrite, où la problématique est la suivante : « Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? ». Nous avons ici aussi un changement de cadre permettant de réinvestir des concepts mathématiques connus et donc de les redéfinir au regard du nouveau cadre.

Si l'on se place maintenant dans le cadre de la géométrie discrète, nous pouvons alors s'interroger sur deux processus distincts : Comment construire des objets discrets ? Comment les reconnaître ? ou encore : que mobilise-t-on comme définition pour reconnaître que tel objet est une droite (discrète) ou un cercle (discret) dans la Figure 3 ? Utilise-t-on la même définition, la même caractérisation pour les construire ? Si le questionnement sur ces objets semble naturel, le travail mathématique à conduire demeure complexe. Adopter une démarche extrinsèque cherchant à préserver une axiomatique de type euclidien, c'est-à-dire produire une géométrie discrète « idéale » en accord avec la géométrie euclidienne, semble être une impasse, mais produire une géométrie discrète qui permettrait de re-générer la géométrie euclidienne est plus accessible (Reveillès, 1991). Notons que la structure périodique des droites discrètes est étudiée depuis Bernouilli (XVIIIème), à une époque où les pixels et la reconnaissance d'image n'existaient pas encore. Mais cette problématique de définition des objets géométriques discrets reste contemporaine. Dans le cadre d'analyse d'images, il s'agit de définir des outils mathématiques et de proposer des solutions algorithmiques pour l'analyse d'objets discrets dans la reconnaissance de formes. Différents processus de discrétisation peuvent être utilisés. En fait, la caractérisation de formes discrètes se retrouve à la croisée entre une géométrie algorithmique, impliquant l'étude de la complexité algorithmique, les structures de données et la programmation linéaire, et une géométrie discrète qui, elle, considère des objets et algorithmes fondamentaux et l'arithmétique (e.g. Coeurjolly, 2002). Mais avoir des algorithmes efficaces pour la reconnaissance de structures discrètes régulières ne garantit pas une « bonne » analyse d'images.



Des droites ? Un cercle ?

Figure 3 – Reconnaissance d'objets en géométrie discrète

Pour préciser l'activité de définitions dans le cas des droites discrètes, nous pouvons rechercher des critères locaux, une caractérisation géométrique (espace dual et programmation linéaire), une caractérisation arithmétique (périodicité, théorie des nombres, fraction continue…) (e.g. Ouvrier-Buffet, 2003). Au niveau de l'histoire des droites discrètes : l'Analyse Discrète Différentielle avec l'approche algorithmique de Bresenham, les algorithmes basés sur des analyses combinatoires, les algorithmes basés sur des analyses linguistiques, les petits harpons de Greene-Yoa, la discrétisation de Freeman et Pham, la discrétisation de Rosenfeld et finalement l'approche arithmétique de Reveillès qui en découle sont autant de pistes explorées ces dernières années pour la définition des droites discrètes. Des approches mettant en jeu des propriétés statistiques (loi de Bernouilli) existent également. Cela permet d'aborder ensuite la question de la reconnaissance et de la segmentation de cercles discrets (e.g. Coeurjolly, 2002). L'étude d'une courbe discrète, des cercles et arcs de cercles est, quant à elle, plus complexe que l'étude des droites discrètes.

Ainsi, l'intérêt de la construction de définitions d'objets discrets dans des problèmes de reconnaissance d'objets, impliquant une modélisation d'objets réels du continu (les droites réelles notamment) est avéré et rejoint une problématique de construction de théorie mathématique et donc d'axiomatique : le lien avec la preuve émerge quand il s'agira de démontrer l'équivalence entre plusieurs définitions, réinterroger des énoncés mathématiques de la géométrie euclidienne ou construire une axiomatique ne serait-ce que locale. Nous proposons une analyse détaillée sur les enjeux mathématiques des droites discrètes et les résultats d'une expérimentation avec des étudiants de première année d'université (Ouvrier-Buffet, 2003, 2006a). Dans le cas de la géométrie, tant pour MATh.en.JEANS que pour les droites discrètes, il s'agit bien de poser des questions liées à l'axiomatique de la géométrie telles que celles concernant, par exemple, l'existence de l'intersection de deux droites ou encore l'existence d'un triangle équilatéral avec trois angles droits (sur la sphère), ce qui va contre la perception acquise en géométrie euclidienne et génère ainsi des conflits, une activité de définition et une activité de preuve.

Orientation de la discussion

Les deux exemples précédents illustrent une problématique de la définition qui touche à : la construction de nouveaux concepts, la réutilisation de concepts et définitions existants, l'élaboration d'axiomatique et la génération de nouveaux problèmes. Nous allons maintenant proposer une synthèse de ce qui existe en didactique des mathématiques sur l'articulation définir-prouver, puis considérer spécifiquement les travaux de Lakatos (1961, 1976, 1984) pour enrichir la réflexion.

Panorama sur l'articulation définir-prouver

Synthèse sur les travaux existants

En général, les travaux en didactique des mathématiques portant sur les définitions s'intéressent à des concepts mathématiques familiers, ou hors curricula mais accessibles. Ainsi, les types de situations impliquant une activité de définition sont de trois types : il s'agit principalement de

- redéfinition de concepts familiers, d'étude de définitions « incorrectes »
- de changement de cadre de concepts déjà connus des élèves ou étudiants
- ou de situations « à la Lakatos ».

Un changement de cadre de concepts déjà connus (comme l'exemple du carré sur la sphère ou l'exemple de la géométrie discrète) permet d'envisager une interaction définir-prouver. Par ailleurs, les concepts mathématiques utilisés dans les expérimentations sont hors curricula (mathématiques discrètes par exemple) ou déjà partiellement connus des élèves ou étudiants. Enfin, le matériel à la disposition des étudiants peut aussi inclure un manuel comprenant des éléments qui vont être utiles au processus des étudiants, voire des définitions de départ.

Les situations cherchant à suivre le modèle de Lakatos (recherche d'une validation d'une (re)définition dans une activité de preuve) sont rares et nous n'avons pas référencé de situation avec de nouveaux objets mathématiques (nouveaux pour les élèves). Ce qui nous éloigne de la construction de concepts. A noter, dans ces travaux, que la gestion de classe n'est pas problématisée et s'avère pourtant non neutre, mais les conditions expérimentales sont toujours très favorables (petits effectifs, plusieurs enseignants et/ou chercheurs pour accompagner le travail de groupes des élèves sur un temps suffisamment long), ce qui créée inévitablement un biais lorsque l'on se projette dans un contexte de classe ordinaire. Nous renvoyons à Ouvrier-Buffet (2013) pour une synthèse détaillée de ces travaux.

Il est important de préciser ici les différentes caractéristiques des concepts que nous pouvons considérer comme de « bons candidats » à une activité de définition (cf. Ouvrier-Buffet, 2013, p.55s). Ce sont des concepts :

- possédant plusieurs définitions équivalentes, définitions pouvant être formulées dans des systèmes de représentations symboliques différents ;
- dont l'accessibilité *via* des représentations et/ou l'exploration de problèmes est avérée ;
- appartenant à différents champs des mathématiques (c'est le cas des objets appartenant à différentes géométries) : il est vrai que la transposition des objets d'un champ à un autre implique une activité de définition, mais aussi de changement d'axiomatique, et donc nécessite une exploration du nouveau concept, parfois en s'affranchissant de connaissances antérieures afin d'avoir un regard neuf sur le concept ;
- pour lesquels il est aisé de générer des questionnements naturels (c'est le cas lors de l'exploration de problèmes combinatoires ou lors de l'essai de transposition d'une axiomatique géométrique au cas de la géométrie discrète par exemple) ;
- pour lesquels l'enseignant se retrouve dans la même position de chercheur que l'étudiant.

Exemples de changements de cadres

Nous ne revenons pas ici sur l'intérêt du changement de cadre mathématiques pour problématiser un concept et le faire évoluer. Nous renvoyons le lecteur aux exemples précédents en géométrie sphérique et en géométrie discrète, les deux étant mathématiquement représentatifs des expérimentations que l'on trouve dans la littérature dans ce domaine (e.g. Ouvrier-Buffet, 2006a ; Rasmussen & Zandieh, 2000 ; Larsen & Zandieh, 2005 ; Zandieh & Rasmussen, 2010).

Convexité et classification

Nous revenons ici sur le concept de convexité, en géométrie, et nous proposons de l'étudier à l'école élémentaire dans une situation de classification (Ouvrier-Buffet, 2006b). Une situation de classification se questionne de la façon suivante : classer, oui, mais en combien de classes ?

Nous proposons différentes définitions possibles de figure « convexe » en géométrie et laissons le soin au lecteur de prouver leur équivalence.

- Etant donné deux points P et Q de la figure, tous les points du segment PQ appartiennent à la figure.
- Toute droite passant par un point quelconque intérieur à la figure, coupe la frontière exactement en deux points.
- Par chaque point de sa frontière, il passe au moins une ligne de support.
- En langage naturel : en parcourant la frontière de la figure, toute la figure est toujours du même côté (un sens de parcours étant choisi).
- A chaque point P extérieur correspond un point et un seul de la figure qui soit le plus proche de P.
- Tous les angles sont saillants.

Finalement, il reste plusieurs concepts à définir (frontière, angle…) dans une perspective de rigueur axiomatique.

Nous avons expérimenté la situation suivante (Ouvrier-Buffet, 2006b), en partie inspirée de Fletcher (1970). Le matériel à disposition des élèves (cycle 3) est constitué d'objets physiques découpés dans du carton et d'une feuille où les figures sont dessinées (Figure 4). La manipulation et le tracé de segments ou de droites sont ainsi possibles. La consigne est énoncée de la façon suivante : « faire deux classes ». Le nom « convexe » n'est pas donné, mais il s'agit bien de construire une définition de « convexe » à partir des classes des élèves. L'enseignant et le chercheur qui gèrent la situation en classe utilisent la demande explicite de définition pour faire évoluer la situation en faisant verbaliser ainsi aux élèves les propriétés mathématiques sous-jacentes aux classes qu'ils ont déterminées. Le terme « convexe » n'est introduit que lorsque les caractéristiques des classes sont suffisamment consistantes et qu'une rédaction est demandée. L'enseignant et le chercheur peuvent également demander aux élèves de produire des figures convexes et des figures qui ne le sont pas, favorisant ainsi un travail de génération d'exemples et contre-exemples. Ce type de travail facilite la formulation de propriétés.

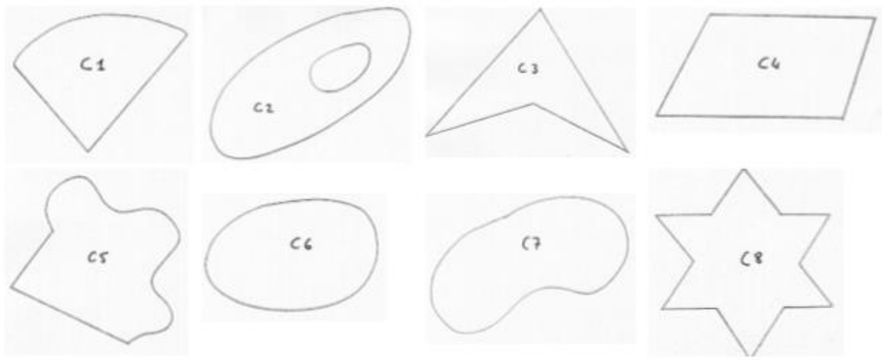


Figure 4 –Figures convexes et non convexes - Exemples

Nous notons que plusieurs définitions potentielles, présentes du fait de la manipulation, n'ont pas émergées. Nous indiquons ici quelques définitions produites par les élèves (voir Ouvrier-Buffet, 2006b pour le détail et la gestion de classe) :

- Déf-élève A : « convexe : figure ayant les points qui se relient à l'intérieur ». Les élèves remarquent que ce n'est « pas convexe dès qu'il y a un creux ». Le terme "point" est ainsi barré, remplacé par "angles" puis par "angles et arrondis". La discussion porte alors sur « relier un arrondi ».
- Déf-élève B : « convexe : quand on trace les diagonales, ça reste à l'intérieur de la figure ». Ce que l'on trouve dans un autre groupe avec la formulation suivante : « si on trace une droite ou une diagonale hors de la forme, c'est non convexe ».
- Déf-élève B : « convexe : quand on relie un point à un autre, la droite ne sort pas de la figure ». Autre énoncé proposé par les élèves : « si on met une corde qui relie les angles, et qu'elle sort de la figure, elle est non convexe ».

Ces définitions montrent déjà des diversités d'approches du concept et permettent d'envisager, à un autre niveau de classe, des questionnements sur les relations entre ces définitions et donc sur la preuve.

Graphes et arbres

En théorie des graphes, l'arbre est un objet « riche » en définition, comme le montre le Tableau 1.

Définitions	Nature principale des définitions
Def1- G est connexe sans cycle.	Perceptive, structurelle
Def2- entre deux sommets quelconques de G, il existe un unique chemin .	Perceptive, cheminement
Def3- G (à n sommets) est sans cycle avec (n-1) arêtes	Combinatoire

Def4- G (à n sommets) est connexe avec (n-1) arêtes	Combinatoire
Def5- G est sans cycle et en ajoutant une arête, on crée un cycle (graphe sans cycle maximal[6])	Dynamique (nécessite une action sur l'objet), optimal
Def6- G est connexe, et si on supprime une arête quelconque, il n'est plus connexe (connexe minimal[7])	Dynamique
Def7- un arbre est soit un sommet isolé, soit un arbre auquel on ajoute un sommet pendant[8].	Inductive (ascendante), dynamique constructive
Def8- G est soit un sommet isolé, soit un graphe A, qui, privé d'un sommet pendant quelconque est soit un arbre, soit un sommet isolé.	Inductive (descendante), dynamique constructive
Def9- un arbre est soit un sommet isolé, soit deux arbres reliés par une arête.	Inductive, dynamique
Def10- un arbre est soit un sommet isolé, soit le graphe obtenu à partir d'une forêt[9] en reliant un nouveau sommet à un sommet de chacun des arbres de la forêt.	Inductive, dynamique

Tableau 1- Définitions de l'arbre

Nous avons expérimenté, en première année d'université et en classe de terminale ES, une situation de classification semblable à celle de la convexité, en donnant des exemples et contre-exemples d'arbres (Figure 5). Pour entrer dans une démarche de preuve, nous avons mis en jeu le problème suivant : Soit G un graphe connexe. Démontrer qu'il existe un arbre couvrant tous les sommets.

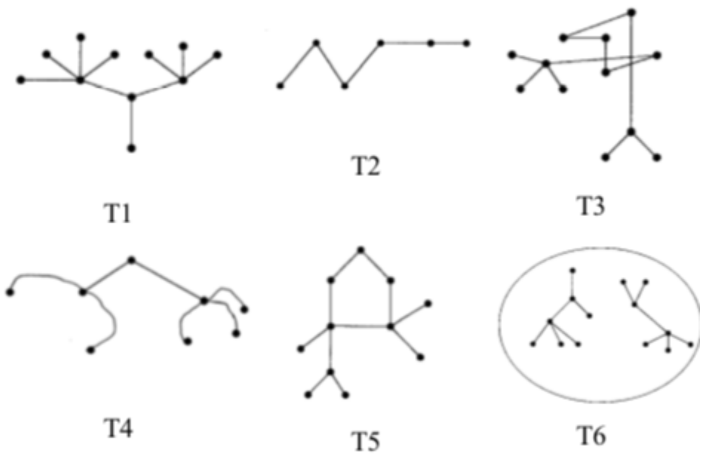


Figure 5 – Exemples et contre-exemples du concept d'arbre

Nous pourrions aussi imaginer un problème mettant en jeu une formule conjecturée telle celle-ci : pour n points, il y a (n-1) traits. Il s'agirait alors de caractériser la classe d'objets vérifiant

[6] Maximal pour le nombre d'arêtes.

[7] Minimal pour le nombre d'arêtes.

[8] Un sommet pendant est un sommet qui n'est adjacent qu'à un seul sommet.

[9] Forêt : ensemble d'arbres disjoints.

cette formule. Les objets vérifiant cette formule sont des graphes non connexes (avec des composantes connexes quelconques) ou des arbres. Les composantes comportant des cycles peuvent être « compensées » par plusieurs composantes de type « arbre ». L'étude du rapport entre le nombre de cycles et le nombre de composantes peut faire ressortir l'intérêt des graphes particuliers que sont les arbres et permettre la construction de différentes définitions. Si nous cherchons à problématiser l'arbre dans un changement de cadre, où la construction de définition serait nécessaire, c'est-à-dire permettrait la résolution de la question posée, nous trouvons l'ensemble des problèmes de recherche de labyrinthes où il y a modélisation du labyrinthe par des arbres. Il ne s'agit pas de travailler au sein de la théorie des graphes mais de modéliser, mathématiser la situation par les arbres, qui possèdent la propriété recherchée (existence d'un unique chemin). Nous renvoyons à Ouvrier-Buffet (2003, 2013) pour l'analyse épistémologique du concept d'arbre et les détails de l'expérimentation et des résultats produits par les étudiants en début d'université et en terminale.

Un point de vue épistémologique : les propositions de Lakatos

Nous nous référons ici en particulier à la thèse de Lakatos (1961) et à son ouvrage « Preuves et Réfutations » (1976) version traduite et annotée par Balacheff et Laborde (1984), remarquable quant à l'étude de processus de construction de définitions en appui sur une approche épistémologique

Apports de Lakatos : types de situations et méthodes

Pour une présentation détaillée des apports des travaux de Lakatos et de leurs limites, nous renvoyons à Ouvrier-Buffet (2013). Nous renvoyons également le lecteur aux excellents documents (Kampis et al., 2002 ; Motterlini, 2002 ; Koetsier, 1991 ; Corfield, 1997) pour une investigation complète et poussée de la complexité de la pensée de Lakatos et des influences qui ont pesé sur sa réflexion.

Lakatos reconnaît qu'il utilise trois sources idéologiques majeures, a priori incompatibles, dans son cadre théorique : les heuristiques mathématiques de Pólya, la dialectique d'Hegel, et le faillibilisme de Popper (Lakatos, 1961, Archive, 3.4).

Directement inspiré par Pólya et Popper, Lakatos s'appuie sur le contexte de la découverte (construction de conjectures) et de la justification (mise à l'épreuve de conjectures). Il reprend en effet une idée de Pólya (le *guessing and testing*) comme un exemple de raisonnement de type inductif en mathématiques, où une conjecture naïve (antérieure à toute preuve en fait) est atteinte par la méthode de Popper des conjectures et réfutations. Un processus de preuve par analyse-synthèse permet de faire disparaître la conjecture naïve au profit de *proof-generated theorems* de plus en plus complexes, de lemmes cachés etc. Ce qui nous concerne davantage ici, c'est la place prépondérante donnée aux définitions, qu'elles soient naïves, zéro ou générées dans/par la preuve (les fameuses *proof-generated definitions* traduites par « définitions éprouvettes » dans la version française de Lakatos (1984)), la construction de définitions apparaissant clairement comme un processus de formation de concepts. Les trois types de définitions proposés par Lakatos (définitions naïves, zéro-définitions, *proof-generated definitions*) ont pour fonctions respectives de nommer, communiquer un résultat, prouver. Une définition naïve peut être établie au début d'une recherche mais ne peut évoluer, contrairement à une zéro-définition qui marque réellement le début de l'activité de définition et du processus de recherche à proprement parler. Une zéro-définition est adoptée, à titre d'essai, au début du processus de recherche, mais n'affecte pas le domaine de la preuve (Lakatos, 1961, p. 68-75) ; une zéro-définition peut être modifiée pour protéger la conjecture d'un « monstre » ou parce que le concept est modifié par la présentation d'une preuve. La construction d'un système de concepts est alors engagée, et le stade de *proof-generated definition* ne sera atteint que grâce à l'idée de la preuve. Donner des exemples de *proof-generated definitions* est délicat, car il faudrait expliciter une preuve et la dialectique entre cette preuve et la définition (et même les définitions) en construction. En fait, l'idée séduisante des *proof-generated definitions* réside dans le fait qu'elles tentent de relier la construction de concepts et la validation de définitions à la preuve : ce point reste à explorer plus en profondeur, car la situation proposée par Lakatos ne permet pas d'aller vers la généralisation d'un processus permettant de passer des zéro-définitions aux *proof-generated definitions*, processus qui tend à expliciter les fameux « lemmes cachés » qui émergent lors de la recherche des conditions pour la validité d'une conjecture) (Lakatos, 1984, p. 170-172).

Méthodes des P&R, règles heuristiques

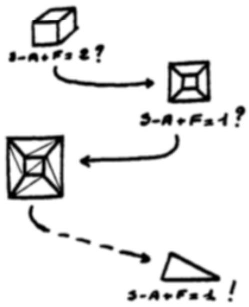
Face à une conjecture, il s'agit de mettre en chantier sa preuve comme sa réfutation, de rechercher des contre-exemples à la conjecture (aspect global) et aux lemmes suspects (aspect local). Si l'on « trouve » un contre-exemple, il faut procéder à un réexamen de la preuve et recherche d'un lemme « coupable » et vérifier si un contre-exemple est local ou global. Dans le cas d'un contre-exemple local, on améliore la preuve analytique en remplaçant le lemme réfuté par un autre qui ne le soit pas.

Dans Preuves et Réfutations, Lakatos (1984) propose de mettre à l'étude la conjecture naïve : S-A+F = 2 pour un polyèdre quelconque ; nous référons à Balacheff (1982) pour un résumé des heuristiques (Figure 6).

LAKATOS part de la preuve (ou expérience de pensée), inspirée de CAUCHY (1813)(7), suivante :

1) on met le polyèdre à plat (en découpant une face), on se ramène ainsi à établir S-A+F = 1 pour un graphe planaire.

2)on triangule le graphe plan en traçant des diagonales dans les faces polygonales qui ne sont pas des triangles. Dans cette opération on ajoute, à chaque pas, à la fois une face et une arête ; donc S-A+F reste constant.



3)On enlève, un par un, les triangles du graphe triangulé à l'aide d'une des deux opérations suivantes :

. ôter un côté ;
. ôter deux côtés et un sommet.

Si S-A+F = 1 avant l'une des deux opérations, alors S-A+F = 1 après.

A la fin de cette procédure de destruction il reste un triangle pour lequel S-A+F = 1, donc la conjecture est prouvée.

Si aucun contre-exemple ne vient réfuter la conjecture, ou sa preuve, alors elle doit être acceptée comme théorème. C'est là le critère (pragmatique) de rigueur que donne LAKATOS.

Si un contre-exemple est produit, il peut être une réfutation de la conjecture ou de sa preuve. Dans le premier cas il s'agit d'un contre-exemple global, dans le second cas d'un contre-exemple local. Un contre-exemple global peut être en même temps local, c'est-à-dire réfuter un lemme (ou sous-conjecture) de la preuve ;

Figure 6 – Point de départ de la problématique de Lakatos, inspirée de la preuve de Cauchy (Balacheff, 1982, p. 5)

Les fondements de la découverte mathématique, ou le « développement de théories mathématiques non formelles »

La méthode de Lakatos se décline en sept étapes (Lakatos, 1984, p. 165s) que nous reprenons ici :

1. Conjecture primitive
2. Preuve (une expérience mentale grossière ou une argumentation, décomposant la conjecture primitive en sous-conjectures ou encore en lemmes).
3. Émergence d'un contre-exemple 'global' (contre-exemple à la conjecture primitive).
4. Réexamen de la preuve : le 'lemme coupable', par lequel le contre-exemple global est un contre-exemple 'local', est repéré. Ce lemme coupable peut d'abord être resté 'caché' ou avoir été mal identifié. Il est maintenant rendu explicite et incorporé sous forme de condition à la conjecture primitive. Le théorème (c'est-à-dire la conjecture améliorée) remplace la conjecture primitive et a pour nouveau caractère essentiel le concept engendré par la preuve.
5. On examine les preuves d'autres théorèmes pour voir si le lemme nouvellement trouvé ou le nouveau *proof-generated* concept y apparaissent : ce concept peut se trouver à la croisée de différentes preuves, et se révéler ainsi d'une importance fondamentale.
6. On contrôle une à une les conséquences, jusque-là acceptées, de la conjecture d'origine maintenant réfutée.
7. Les contre-exemples deviennent de nouveaux exemples – de nouveaux champs de recherche s'ouvrent.

Les questions que cela pose

Quelles sont les données initiales du problème lakatosien ?

Chez Lakatos (1984), le point de départ est un **problème** qui pose la question de la transition entre le plan et l'espace : ici le but est une **classification**. Existe-t-il une relation entre le nombre S de sommets, le nombre A d'arêtes et le nombre F de faces d'un polyèdre, en particulier d'un polyèdre régulier, du même type que celle, évidente, qu'il y a entre le nombre de sommets et d'arêtes d'un polygone, à savoir S=A ? Cette dernière relation nous permet de classer les polygones selon leur nombre d'arêtes (ou de sommets) : triangles, quadrilatères, pentagones etc. Une relation du même genre nous aiderait à classer les polyèdres (Lakatos, 1984, p.7). Autre point de départ, la **conjecture** (émanant des élèves) dite naïve ou primitive : S-A+F = 2 pour un polyèdre quelconque. Une conjecture alternative peut porter sur la relation entre S, A et F pour tout polyèdre. Les premiers essais des élèves corroborent la conjecture qui peut être prouvée. Et le maitre propose une **preuve** (historiquement la preuve de Cauchy) : l'analyse de la preuve génère des sous-conjectures et lemmes à étudier. Ici, la preuve est une expérience mentale, et non un exercice formel.

Lakatos (1984) propose, en annexe, un autre exemple, celui de la continuité, mais seul un scénario général est donné. La conjecture est la suivante : la limite d'une série convergente de fonctions continues est continue. La preuve en jeu est la preuve de Cauchy mais n'est pas donnée dans l'annexe. Cet exemple réfère au problème historique de la définition de la continuité. En découleront notamment les définitions de limite etc.

Questionnements pour l'enseignement des mathématiques

Plusieurs questions se posent sur les apports de Lakatos et la dialectique prouver-définir qu'il propose dans un exemple épistémologique dans l'activité mathématique. Serait-il pertinent d'actualiser la méthode de Lakatos à d'autres concepts voire aux mathématiques contemporaines ? Quelle est la pertinence didactique de ce type de situations de définition, est-ce profitable aux élèves ?

Plusieurs chercheurs s'accordent à souligner l'influence de Lakatos en didactique des mathématiques (e.g. Davis & Hersch, 1981 ; Hersch, 2006 ; Sriraman, 2008), mais peu se sont emparés de la question de la reproductibilité de situations « à la Lakatos » et des conditions expérimentales nécessaires : est-ce tenable en classe ordinaire ? à quel coût ? Interrogeons donc la portée des travaux de Lakatos du côté des pratiques des enseignants.

Sriraman (2008) argumente sur la nécessité de prendre comme point d'appui pour le développement de théories de l'apprentissage le travail de Lakatos. L'importance de la gestion par l'enseignant, devant aussi être au fait des développements historiques (et épistémologiques) des concepts, est également rappelée. Sriraman a expérimenté des situations « à la Lakatos » (au lycée, Sriraman, 2003 ; en formation d'enseignants du premier degré, Sriraman & Daniels (non publié)), en a discuté, et même « idéalisé » (SIC, Sriraman, 2008, 2006) les potentialités pédagogiques. Il émet l'hypothèse que la « mathématisation », telle qu'elle est proposée par Lakatos, est possible dans l'enseignement secondaire. Implicitement, le statut des énoncés et « exemples » proposés par les étudiants est lui aussi crucial (cet aspect n'est pas développé par Sriraman) : si les étudiants n'en perçoivent ni le statut ni la portée, ce sera à l'enseignant d'orienter la recherche. Soulignons que les problèmes retenus pour les expérimentations de Sriraman sont de nature combinatoire et sont censés permettre aux enseignants de se détacher des méthodes et contenus habituels (Sriraman, 2006). Nous entrevoyons là un large champ de questions, qui rejoignent celles posées dans le cadre de l'enseignement de la preuve et de la formation des enseignants et des élèves à une « activité mathématique », proche de celle pratiquée par des mathématiciens. Nous ne développerons pas ici la construction d'un cadre épistémologique de référence pour modéliser l'activité de définition et permettant de mettre en évidence les liens avec la preuve (Ouvrier-Buffet, 2013), mais nous insistons sur l'importance des types de situations impliquant une activité de définition et la difficulté de liées celles-ci à une activité de preuve, en dehors de toute problématique axiomatique. Celle-ci semble en effet incontournable et met en scène le statut des énoncés mathématiques, trop peu mis en évidence dans les instructions officielles.

Conclusions et discussion

Nous avons pointé l'activité dialectique en mathématiques qui existe entre définir et prouver. Nous pouvons nous interroger sur la légitimité de sa transposition à la classe et sur les conditions à réunir pour que cela réussisse : quels sont les leviers à disposition de l'enseignant ? Faut-il changer le rapport des élèves aux mathématiques (accepter de ne pas savoir, formuler des définitions provisoires de travail, s'interroger sur une démarche axiomatique) ? La compétence « définir » pourrait être une compétence à travailler spécifiquement, tout comme le sont les compétences transversales aux mathématiques « prouver » et « modéliser ». Mais s'engager dans la mise en œuvre en classe d'une dialectique entre définir et prouver nécessite un temps long et une gestion de classe spécifique, assez inhabituelle quant à la gestion de la construction de définitions. Nous pouvons par exemple nous inspirer des Situations Recherches pour la Classe (e.g. IREM de Grenoble, 2016), du débat scientifique (e.g. Legrand, 1993), de MATH.en.Jeans pour réfléchir collaborativement à l'optimisation de la mise en œuvre de telles situations dans un contexte de classe ordinaire. Reste à trouver le temps nécessaire ☺

Bibliographie

Balacheff, N. (1982). Construction des connaissances mathématiques, l'approche de Imre Lakatos. In R. Gras (Ed), *Séminaire d'histoire et didactique des mathématiques* (pp.1-12). Rennes. hal-02095927

Berger, M. (2006). *Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà. De la puissance et de la complexité d'une notion simple*. 2 volumes, collection Opuscules, Editions Ellipses.

Coeurjolly, D. (2002). *Algorithmique et géométrie discrète pour la caractérisation des courbes et des surfaces*. Thèse. Université Lumière - Lyon II, disponible en ligne tel00167370

Corfield, D. (1997). Assaying Lakatos's Philosophy of Mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science, 28* (1), 99-121.

Davis, P.J. & Hersch, R. (1981). *The Mathematical Experience*. The Harvester Press.

Fletcher, T.J. (1970). *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui – Essai d'une didactique nouvelle pour l'enseignement du second degré*. 4ème Edition, OCDL, Paris.

Hersch, R. (2006). *18 Unconventional essays on the nature of mathematics*. Springer Science & Business Media Inc.

IREM DE GRENOBLE (2016). *Situations de recherche pour la classe, pour le college et le lycée ...et au-delà*. IREM de Grenoble.

Kampis, G., Kvasz, L. Stöltzner, M. (2002). *Appraising Lakatos – Mathematics, Methodology and the Man*. Vienna Circle Institute Library – Kluwer Academic Publishers.

Koetsier, T. (1991). *Lakatos' philosophy of mathematics, a historical approach*. North-Holland Amsterdam.

Lakatos, I. (1961). *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thesis. Cambridge University Library.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Library.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Traduction de N. Balacheff & J.-M. Laborde. Hermann.

Larsen, S. & Zandieh, M. (2005). Conjecturing and Proving as Part of the Process of Defining. In Lloyd, G. M., Wilson, M., Wilkins, J. L. M., & Behm, S. L. (Eds.), *Proceedings of the 27th PME-NA* (pp. 797-804).

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM, 10,* 123-159.

Mariotti, M.A & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 219–248.

MATh.en.JEANS (1992). Flashes de géométrie – Combien méchant peut être un convexe ? Ou quel est le convexe le moins rond ? Actes *MATh.en.JEANS au Palais de la Découverte,* 167-172. http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/92167172.pdf

MATh.en.JEANS (1995). Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? Collèges Condorcet (77340 Pontault-Combault) et Victor Hugo (93160 Noisy-le-Grand). *Actes MATh.en.JEANS*, 95-103. Ed. MATh.en.JEANS, Paris. http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/95095103.pdf

MATh.en.JEANS (1997). Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ?*Actes MATh.en.JEANS*, 175-176. Ed. MATh.en.JEANS, Paris. http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/97175175.pdf

Motterlini, M. (2002). Reconstructing Lakatos: a reassessment of Lakatos' epistemological project in the light of the Lakatos Archive. *Studies in History and Philosophy of Science, 33*, 487-509.

Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse, Université de Grenoble (disponible en ligne : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/en/).

Ouvrier-Buffet, C. (2006a). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics, 63*(3), 259-282.

Ouvrier-Buffet, C. (2006b). Classer et définir : des processus connexes. *Grand N,78*, 83-98.

Ouvrier-Buffet, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve – Étude épistémologique et enjeux didactiques*. Note de synthèse HDR. Université Paris Diderot. Disponible en ligne.

Poincaré, H. (1947). *Science et méthode*. Collection : Bibliothèque de philosophie scientifique 3e éd. (1ère édition 1908).

Rasmussen, C. & Zandieh, M. (2000). Defining as a mathematical activity: a realistic mathematical analysis. In M. L. Fernández (Ed.), *Proceedings of the 22nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 301-305). Columbus, OH.

Reveillès, J.P. (1991). *Géométrie discrète, calculs en nombres entiers et algorithmique*. Doctorat d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Sriraman, B. (2003). Can mathematical discovery fill the existential void? The use of conjecture, proof and refutation in a high school classroom. *Mathematics in School, 32*(2), 2-6.

Sriraman, B. (2006). An ode to Imre Lakatos: Bridging the ideal and actual mathematics classrooms. *Interchange, 37*(1-2), 151-178.

Sriraman, B. (2008). Let Lakatos be – A commentary on Pimm et al. "Would the real Lakatos please stand up!". *Interchange, 39*(4), 483-492.

Zandieh, M. & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 29*, 57–75.

LES MODES DE RAISONNEMENT ET DE PREUVE COMME APPRENTISSAGES POSSIBLES DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES EN MATHÉMATIQUES

Stéphane FAVIER, Maud CHANUDET

Résumé. Notre communication porte sur l'identification des démarches et raisonnements mathématiques en jeu lors de la résolution de problèmes. Nous caractérisons ces éléments qui peuvent, lorsque la résolution de problèmes est pratiquée pour elle-même, constituer un des objectifs d'apprentissage visés. Nous montrons ensuite comment nous l'utilisons en formation continue dans le but d'outiller les enseignants pour enseigner la résolution de problèmes.

L'objectif de l'atelier dont ce texte se veut une description est d'identifier le potentiel didactique des problèmes de type « problèmes pour chercher » (Houdement, 2009), en termes de démarches et de modes de raisonnement. Après avoir précisé les éléments théoriques sur lesquels nous nous basons, nous montrons comment nous avons conçu une formation initiale visant à permettre aux enseignants de choisir des problèmes, d'élaborer une progression et d'envisager l'évaluation des compétences des élèves en résolution de problèmes, en lien avec les démarches et modes de raisonnement en jeu dans les problèmes.

Nous commençons tout d'abord par situer les types de problèmes auxquels nous nous intéressons.

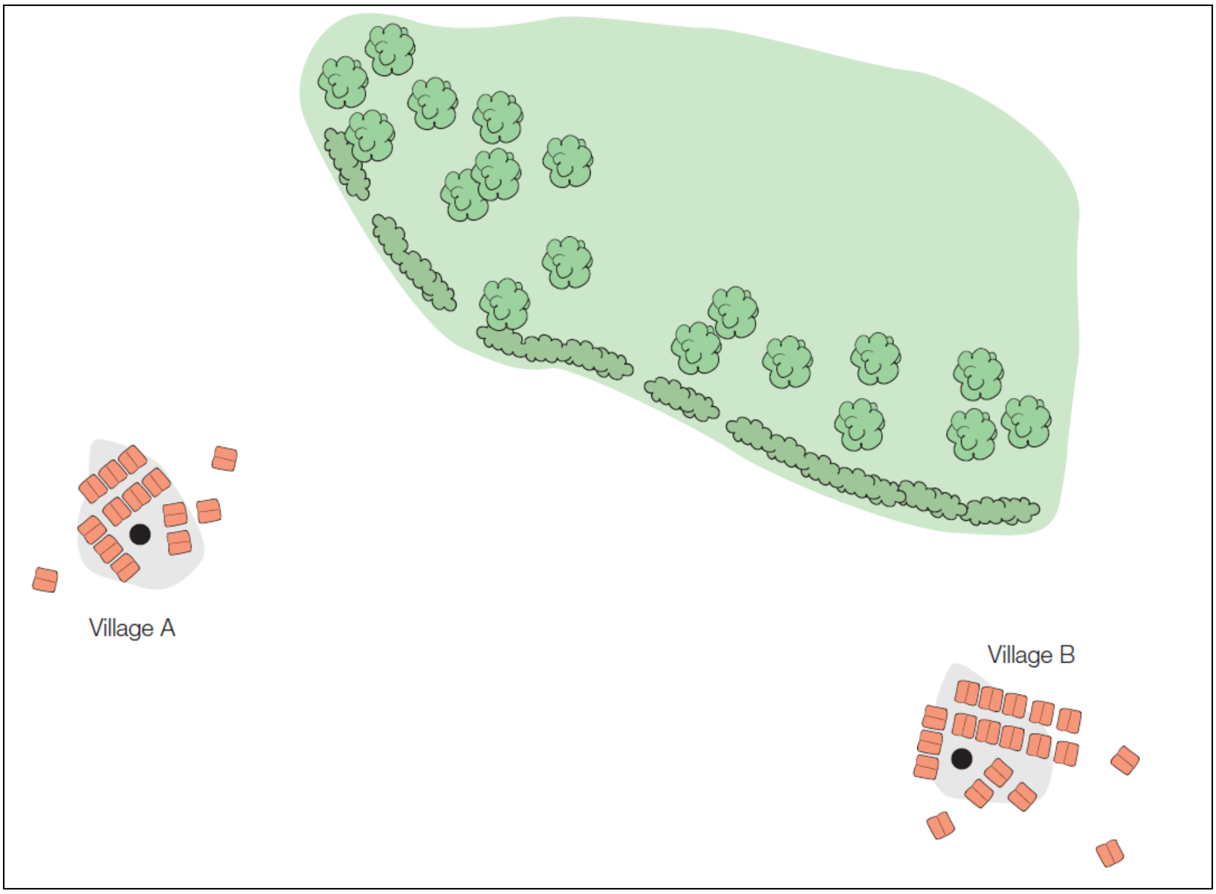
La résolution de problèmes en mathématiques

On identifie deux fonctions que peut jouer la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques.

La résolution de problèmes comme outil pour développer, évaluer des apprentissages de contenus mathématiques

La résolution de problèmes peut ainsi revêtir une fonction d'outil, de moyen de développer et d'évaluer les apprentissages des élèves quant à des notions ou des concepts mathématiques spécifiques. En effet, depuis les années 1980, dans différents pays et à divers niveaux d'enseignement des mathématiques, tant les recherches en éducation que les responsables institutionnels et les programmes d'enseignement prônent la résolution de problèmes, non plus seulement comme une façon de valider la bonne utilisation des connaissances, mais aussi comme une méthode pour développer les apprentissages des élèves. Le problème suivant, proposé dans les moyens d'enseignement romand en classe de 10^{e} (élèves de 13-14 ans, équivalent à la classe de 4^{e} en France), en est un exemple.

Deux villages envisagent la construction d'une déchetterie commune. Pour des raisons de calme et de tranquillité, celle-ci devra être construite à l'orée de la forêt, mais obligatoirement à égale distance des deux localités. Où la déchetterie devra-t-elle être construite ?



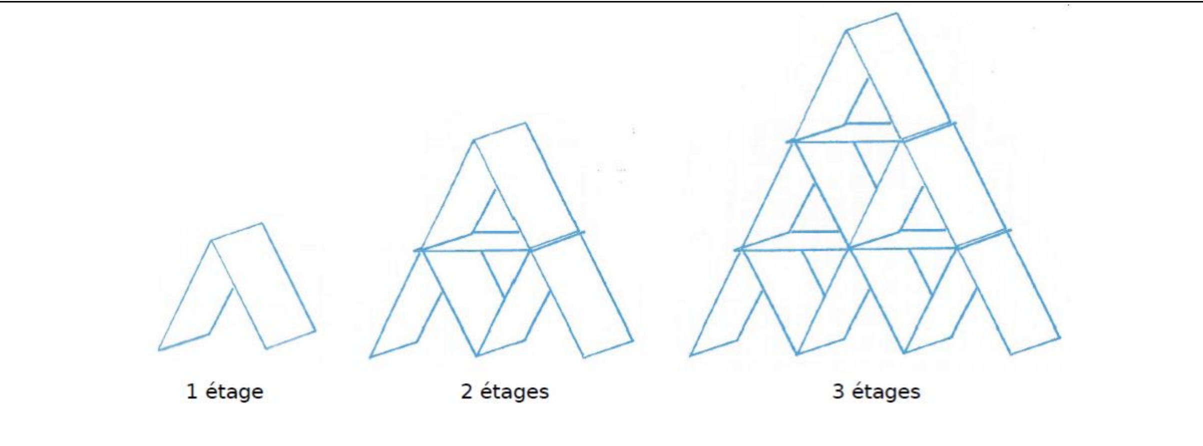
Ce problème peut par exemple être proposé pour introduire la notion de médiatrice. Dans ce cas, la résolution de problèmes est un moyen de développer des apprentissages. On parle aussi d'apprentissage *par* la résolution de problèmes. Les apprentissages visés sont alors fortement corrélés aux notions et aux concepts mathématiques en jeu.

La résolution de problèmes comme objet d'enseignement et d'apprentissage

La résolution de problèmes peut aussi, et c'est ce qui nous intéresse dans notre travail, constituer un objet d'apprentissage à part entière. Il s'agit alors de développer des compétences et des connaissances centrées sur cet aspect de l'activité mathématique, comme c'est le cas sur le problème suivant, tiré du manuel de 4e du site Sesamath[10].

Pour construire un château de cartes à un étage il faut 2 cartes, pour un château de cartes à deux étages il faut 7 cartes et pour un château de cartes à trois étages il faut 15 cartes. Combien faut-il de cartes pour construire un château à 7 étages ? A 30 étages ? A 100 étages ?

[10] https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/index.php?ouvrage=ms3_2012&page_gauche=162



On parle dans ce cas d'apprentissage *de* la résolution de problèmes. C'est donc à cette fonction de la résolution de problèmes que nous nous intéressons ici et pour laquelle il est plus difficile de déterminer les apprentissages possibles en résolution de problèmes.

Les apprentissages possibles de la résolution de problèmes

La lecture de la littérature associée ou des écrits portant sur les dispositifs associés à la résolution de problèmes (la narration de recherche (Bonafé, 1993; Chevallier, 1992; Sauter, 1998), les problèmes ouverts (Arsac et al., 1991; Arsac & Mante, 2007), les SiRC (Grenier, 2012; Grenier & Payan, 2002), etc.) montre que les termes employés pour décrire ces apprentissages potentiels sont assez généraux et ne se réfèrent pas à des savoirs mais sont plutôt de l'ordre des pratiques, des savoir-faire attendus chez les élèves.

Dans son travail sur la *place pour les problèmes pour chercher* à l'école primaire, Houdement (2009, p. 32) identifie trois objectifs possibles pour les problèmes de type « problèmes pour chercher » c'est-à-dire lorsque la résolution de problèmes constitue un objet d'enseignement et d'apprentissage : le réinvestissement de savoirs, l'apprentissage de raisonnements, l'apprentissage de validations (puisqu'elle travaille à l'école primaire) et que nous avons étendu à l'apprentissage de preuve pour le secondaire, auxquels elle ajoute l'apprentissage de la modélisation.

Le réinvestissement de savoirs est fortement corrélé aux notions et concepts mathématiques en jeu dans les problèmes. Nous nous intéressons plus spécifiquement ici aux raisonnements et aux preuves qui peuvent faire l'objet d'apprentissages possibles via la pratique de la résolution de problèmes au niveau du cycle d'orientation (équivalent du collège en France).

Caractérisation du raisonnement mathématique

Dans son travail de thèse, Jeannotte (2015) reprend et analyse deux aspects complémentaires permettant de caractériser le raisonnement mathématique et qui ressortent des différentes définitions que l'on retrouve dans la littérature :

- Son aspect structurel, c'est-à-dire du point de vue de sa structure logique. On regarde comment s'organisent et s'enchainent les pas de raisonnement ;
- Son aspect processuel, c'est-à-dire du point du vue des processus mobilisés, ce qui met alors l'accent sur le fait que quand quelqu'un mène un raisonnement, il fait un certain nombre d'actions qui sont orientées, dirigées vers un but.

La prise en compte de l'aspect structurel du raisonnement mathématique

Du point de vue structurel, à l'école on vise principalement à développer deux types de raisonnement, bien connus : le raisonnement déductif et le raisonnement inductif.

Concernant le raisonnement déductif, celui-ci se structure autour de pas de raisonnement. Un pas déductif permet de trouver une affirmation à partir de données et d'une règle. C'est-à-dire que : on a un certain nombre de données ; on a une règle connue (un théorème, ou une règle plus élémentaire, qui peut ne pas être associée à une théorie mathématique comme le stipule Duval (1995)) dont la prémisse correspond aux données et qui implique nécessairement la conclusion ; ce qui permet d'obtenir l'affirmation.

Par exemple, si on sait que ABCD est un carré. On connait la règle suivante ; tout carré a 4 angles droits. On en déduit donc que ABCD a 4 angles droits. Ici, la règle est vraie, donc si les données sont vraies c'est-à-dire si ABCD est bien un carré alors on peut être assuré que la conclusion est vraie, donc que ABCD a bien 4 angles droits.

Il s'agit d'un raisonnement dans lequel les prémisses impliquent nécessairement la conclusion. Par nécessairement, il est entendu que les prémisses, si elles sont vraies, incluent une condition qui ne rend qu'une seule conclusion possible.

Il nous semble important, dans une perspective didactique, de distinguer deux types de raisonnements déductifs qui peuvent être travaillés avec les élèves au primaire et au secondaire I, en fonction de la nature de la règle convoquée. En effet, celle-ci est soit liée à des propriétés mathématiques, à des savoirs mathématiques au sens de savoirs savants dans la transposition didactique (Chevallard, 1985), c'est-à-dire des objets d'enseignement identifiés dans les programmes et travaillés explicitement avec les élèves ; soit à des règles de logique (comme par exemple la règle du tiers exclus). Dans le premier cas, nous parlons de raisonnement hypothético-déductif, dans le deuxième, de raisonnement par implication logique.

Le point de vue structurel permet aussi de caractériser certains raisonnements par des articulations spécifiques de pas déductifs. Nous retenons en particulier le raisonnement par exhaustivité des cas qui consiste, de manière générale, à tester l'une après l'autre, après les avoir énumérées, toutes les solutions potentielles du problème (Battie, 2003, p. 48). Nous retenons aussi le raisonnement par disjonction de cas qui consiste à ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas. Pour cela, on partitionne les éléments de l'ensemble considéré (en nombre a priori infini) et on traite séparément chacun des cas (Battie, 2003).

Quand on met en jeu de tels raisonnements, la preuve est assurée par le fait que si la règle est vraie et si les données sont vraies alors l'affirmation obtenue est vraie. Le raisonnement déductif étant le seul à avoir cette caractéristique, il est central en mathématiques, dès lors que l'on cherche à prouver ou à démontrer.

La deuxième structure de raisonnement qui peut être travaillé avec les élèves est le raisonnement inductif. Ce type de raisonnement est souvent caractérisé comme permettant de passer du particulier au général. Pólya (1958) le caractérise comme une manière de raisonner qui conduit à la découverte de lois générales en partant de l'observation d'exemples particuliers et de leurs combinaisons. Il s'agit d'observer des données particulières, d'en dégager des régularités (appelées aussi affirmation) pour finalement inférer une règle qui permet le passage des données à l'affirmation.

Par exemple, on observe que l'expression $n^2 - n + 11$ vaut 11, 13, 17, 23, 31, 41 et 53 lorsque n varie entre 0 et 7. On sait par ailleurs que tous ces nombres sont premiers. On peut donc en inférer la règle suivante : $n^2 - n + 11$ est toujours un nombre premier. Cette règle est cohérente au vu des données observées et de l'affirmation. A ce stade, les règles du discours mathématiques font en sorte qu'il est impossible de dire si cette règle est vraie. La conclusion n'a qu'une certaine possibilité d'être vraie. Il se trouve ici que cette règle est fausse puisque pour n=11, le résultat est 11 au carré qui n'est donc pas premier. On a pour cela eu recours à un contre-exemple. Si cette règle avait été correcte, il nous aurait fallu le prouver en passant notamment par un raisonnement déductif.

Le raisonnement inductif est en particulier mis en œuvre localement, notamment dans une démarche expérimentale, mais il ne suffit pas à caractériser l'ensemble des processus impliqués dans une telle démarche.

La prise en compte de l'aspect processuel du raisonnement mathématique

Si l'on s'intéresse cette fois aux processus en jeu lors du raisonnement mathématique, Jeannotte (2015) les regroupe en deux catégories : les processus de recherche de similitudes et de différences, comme généraliser, conjecturer, identifier une régularité, comparer et classifier ; et les processus de recherche de validation. Ces différents processus peuvent de plus prendre appui sur un processus d'exemplification.

Le processus d'exemplification et les processus de recherche de similitudes et de différences permettent de caractériser deux types de démarches importantes en résolution de problèmes, qui n'ont pas de structure propre c'est-à-dire qui ne peuvent pas être caractérisés comme relevant de raisonnements déductifs, ou de raisonnements inductifs. Il s'agit de la démarche expérimentale et de la démarche d'ajustements d'essais successifs.

La démarche expérimentale est définie par Gardes comme une démarche qui articule des phases d'expérimentations (faire des expériences, en observer les résultats et en inférer des conclusions), avec des phases de formulation de conjectures et de tentative de preuve (Gardes, 2013). On identifie ainsi les processus d'exemplification, d'identification d'une régularité, de conjecture, et de généralisation. Quand cela est possible, c'est-à-dire quand c'est à la portée des élèves au vu de leurs connaissances, il faut recourir à un raisonnement déductif pour prouver le résultat obtenu en mettant en œuvre une telle démarche.

Une deuxième démarche importante est la démarche dite d'ajustements d'essais successifs qui consiste à rechercher la solution d'un problème en faisant différents essais en tenant compte chaque fois des résultats des essais précédents » (Conférences Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), 2019). On identifie notamment les processus d'exemplification, de comparaison de l'écart entre le résultat obtenu et celui attendu afin d'ajuster ses essais pour s'en approcher. Pour les démarches d'ajustements d'essais successifs, la validité du résultat n'est pas liée à la validité de la démarche. Pour prouver la validité du résultat, il faut vérifier qu'il satisfait bien les conditions de l'énoncé, c'est à dire prouver par ostension.

En synthèse, lorsque l'on travaille la résolution de problèmes comme objet d'apprentissage au primaire et secondaire I, on peut chercher à développer des modes de raisonnement déductifs, tels l'exhaustivité des cas, l'implication logique, le raisonnement hypothético-déductif, le raisonnement par disjonction de cas. Ces raisonnements, s'ils sont correctement mis en jeu, permettent d'assurer la validité du résultat obtenu et font donc office de preuve. On peut viser également un travail sur des démarches comme la démarche expérimentale ou la démarche d'ajustement d'essais successifs, qui ne sont à elles seules, pas suffisantes pour prouver. La mise en œuvre de la démarche expérimentale nécessite en effet de recourir à un raisonnement déductif pour prouver la validité de la règle obtenue. Cependant, dans certains cas, les élèves n'ont pas les moyens de prouver leur conjecture, d'où le décalage entre la démarche expérimentale et les raisonnements déductifs qui peuvent amener à la preuve. Pour prouver, on peut aussi avoir recours à la preuve par ostension comme c'est le cas dans la démarche d'ajustements d'essais successifs. Enfin, un autre mode de preuve est aussi mobilisé pour des problèmes très spécifiques : il s'agit du contre-exemple, où l'on doit trouver un cas qui contredit la conclusion souhaitée, et qui intervient principalement dans les problèmes d'universalité. Dans ces problèmes-là, la conjecture est déjà formulée et c'est donc le mode de preuve qui est l'enjeu du problème.

Nous présentons ci-dessous le concept de potentiel didactique sur lequel nous nous appuyons avant de montrer comment nous opérationnalisons ces différents éléments théoriques.

Les activités de recherche et de preuve entre pairs et leurs potentiels

Georget (2009) s'affranchit des différentes typologies de problèmes, des différentes appellations des dispositifs de résolution de problèmes susmentionnés, pour proposer de réunir autour du concept d'Activités de Recherche et de Preuve entre Pairs (activité RPP) les problèmes dont l'objectif est d'entraîner les élèves à la recherche de problèmes de mathématiques. Il décrit alors ces activités RPP à travers leurs potentiels.

Le *potentiel de recherche* rassemble les éléments qui assurent que les élèves cherchent un problème nouveau. Le *potentiel de résistance* et le *potentiel de résistance dynamique* regroupent les éléments qui assurent que le problème résiste aux tentatives des élèves pour le résoudre et que cette résistance évolue au cours de la recherche. Le *potentiel de débat* qui rassemble les éléments favorisant un débat de nature mathématique entre élèves. Le *potentiel didactique* délimite quant à lui les savoirs qui peuvent émerger de la recherche du problème.

Nous cherchons donc à opérationnaliser ce concept de potentiel didactique à la lumière des démarches et modes de raisonnement précédemment identifiés, en regardant ceux qui peuvent être travaillés dans différentes activités RPP.

Nous donnons ci-dessous plusieurs exemples d'analyse succincte des démarches et raisonnements mathématiques en jeu dans différentes activités RPP.

Exemple d'analyse du potentiel didactique d'activités RPP du point de vue des démarches et raisonnements en jeu

Nous nous intéressons donc aux démarches et raisonnements en jeu dans les activités RPP. Pour cela, nous cherchons à résoudre ces activités en adoptant un point de vue d'élèves (et non d'experts), c'est-à-dire en mobilisant les connaissances supposées d'un élève de 10^{e} (équivalent à la classe de 4^{e} en France). De cette manière, nous analysons brièvement ci-dessous plusieurs activités RPP.

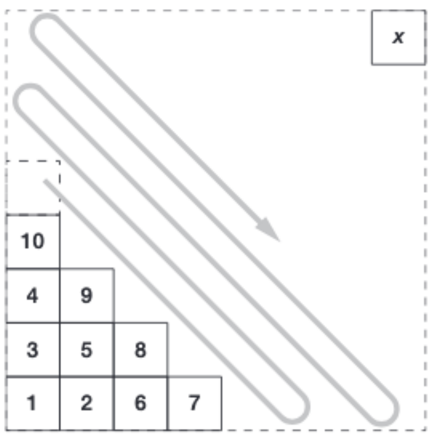
Analyse de la première activité RPP : « En haut à droite »

Voici l'énoncé de la première activité RPP que nous avons sélectionnée.

Pascal dessine de grands carrés, qu'il divise ensuite en carrés plus petits. Il écrit alors les entiers successifs dans chaque petit carré dessiné, comme l'indique la figure ci-contre.

Parmi les trois valeurs proposées, quelle est celle que le nombre *x* ne pourra pas prendre ?

a) 256 **b)** 128 **c)** 81



Ce problème met en jeu une démarche expérimentale. En effet, les élèves peuvent faire des essais quant au remplissage d'un grand carré de côté 3, puis 4 puis 5 par exemple. De ces quelques essais, ils peuvent voir émerger des régularités aboutissant à la conjecture suivante « x ne pourra prendre que des valeurs qui correspondent à des carrés ». Ils en déduisent alors que x ne pourra pas prendre la valeur 128.

Analyse de la deuxième activité RPP : « Ballon d'essai »

Voici l'énoncé de la deuxième activité RPP que nous avons sélectionnée.

> Afin de renouveler son matériel sportif, une école fait une première commande de 2 ballons de rugby, 4 ballons de basket et 4 ballons de foot pour un montant total de 72 CHF. Elle effectue ensuite une deuxième commande composée de 2 ballons de rugby et 2 ballons de basket et paie 30 CHF. On sait qu'un ballon de rugby, un ballon de foot et un ballon de basket coûtent ensemble 20 CHF.
>
> Quel est le prix de chacun des ballons ?

Ce problème met en jeu une démarche d'ajustement d'essais successifs et/ou un raisonnement hypothético-déductif.

Les élèves peuvent procéder en testant des valeurs pour le prix de chacun des types de ballon. En fonction des résultats obtenus, ils peuvent alors ajuster la valeur de chaque prix jusqu'à obtenir une configuration qui satisfasse les conditions. Or ces ajustements sont complexes du fait de la structure du problème en 3 équations avec 3 inconnues.

Il est ainsi utile de combiner ces essais avec, voire encore plus de procéder directement par, des déductions pour déterminer certains prix et réduire le nombre d'inconnues. Les élèves peuvent ainsi déduire de la dernière phrase que « 2 ballons de rugby, 2 ballons de foot et 2 ballons de basket coûtent ensemble 40 CHF » et la combiner avec la deuxième pour en déduire que « 2 ballons de foot coûtent 10 CHF, donc 1 ballon de foot coûte 5 CHF. ». Ils peuvent alors poursuivre en faisant des déductions ou en procédant par ajustements d'essais successifs.

Analyse de la troisième activité RPP : « Les truffes au chocolat »

Voici l'énoncé de la troisième activité RPP que nous avons sélectionnée.

> Maryvonne et Marcelin ont reçu une boîte contenant vingt truffes au chocolat.
> A eux deux, ils ont tout mangé.
>
> Maryvonne : «J'ai mangé moins de quatorze truffes au chocolat.»
> Marcelin : «Moi aussi.»
> Maryvonne : «Mais j'en ai mangé plus de huit.»
> Marcelin : «Je suis sûr et certain d'en avoir mangé moins que toi.»
>
> Chacun des deux a dit la vérité une fois et s'est trompé une fois.
>
> Combien Maryvonne a-t-elle mangé de truffes au chocolat ?

Ce problème met en jeu un raisonnement par exhaustivité des cas et un raisonnement par implication logique.

Les élèves doivent en effet envisager et traiter tous les cas possibles, la distinction de ces cas portant sur les phrases porteuses de vérité ou non (Cas 1 : Maryvonne dit la vérité pour la 1^e^ phrase, ment pour la 3^e^, Marcellin dit la vérité pour la 2^e^ phrase et ment pour la 4^e^. Cas 2 : Maryvonne dit la vérité pour la 1^e^ phrase, ment pour la 3^e^, Marcellin dit la vérité pour la 4^e^ phrase et ment pour la 2^e^. Etc.). Pour chacun de ces cas, les élèves doivent raisonner par implication logique pour déterminer s'il y a ou non une incohérence dans et entre les 4 propositions ainsi obtenues.

Analyse de la quatrième activité RPP : « A tondre »

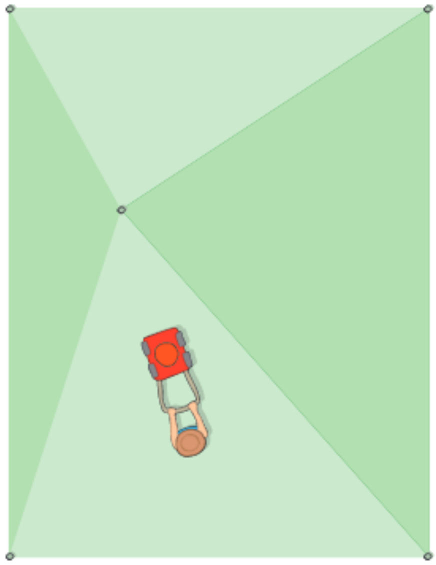
Voici l'énoncé de la quatrième activité RPP que nous avons sélectionnée.

Anne et Florence doivent tondre un terrain rectangulaire.

Pour le partager en deux parties de même aire, Chris leur propose de planter un piquet en un point quelconque du terrain et de relier ce point aux piquets plantés à chacun des quatre sommets du terrain.

Anne tondra la partie claire sur la figure, Florence la partie foncée.

Le partage est-il équitable ?



Ce problème met en jeu un raisonnement hypothético-déductif.

Les élèves sont ici amenés à raisonner de manière déductive à l'appui de propriétés concernant les formules d'aires de polygone, et/ou de découpages de la figure. Il est par exemple possible de découper le rectangle principal en 4 sous rectangles dont les côtés sont les côtés du rectangle principal ou leurs parallèles passant par le piquet. Chacun des sous rectangles est alors constitué de deux demi rectangles symétriques, l'un clair l'autre foncé. On en déduit alors que chacun des 4 sous rectangles est constitué pour moitié d'un triangle clair, pour moitié d'un triangle foncé et que le partage est donc équitable. Il est aussi possible de recourir à la formule d'aire d'un triangle. On peut ainsi considérer que le triangle supérieur de couleur vert clair à une aire égale à la largeur du rectangle multipliée par une partie de la longueur du rectangle, le tout divisé par 2 ; et que le triangle inférieur de la même couleur a lui une aire égale à la largeur du rectangle multipliée par le complément de la longueur du rectangle, le tout là aussi divisé par 2. La somme de ces deux aires est donc égale à la largeur du rectangle multipliée par la longueur de ce rectangle, divisée par 2. L'aire de la surface en vert clair correspond donc à la moitié de l'aire totale du terrain.

Analyse de la cinquième activité RPP : « Animal à découvrir »

Voici l'énoncé de la cinquième activité RPP que nous avons sélectionnée.

Kim doit découvrir le nom d'un animal (en cinq lettres). Elle a proposé les noms ci-dessous, et a obtenu ces renseignements :

Noms d'animaux	Lettres justes bien placées	Lettres justes mal placées
CHATS	0	2
LIONS	1	0
TIGRE	2	0
PAONS	0	0
BŒUF	1	1
CHIEN	0	4

Quel est le nom de l'animal que Kim doit découvrir ?

Ce problème met en jeu un raisonnement par implication logique.

On déduit en effet par exemple de l'information donnée par la ligne correspondant à PAONS qu'aucune des lettres P, A, O, N et S n'apparait dans le nom de l'animal que Kim doit découvrir. On déduit alors de la dernière ligne que les lettres C, H, I et E sont toutes présentes dans le nom cherché mais toute à une autre place que celles qu'elles occupent dans le mot « chien ». On poursuit alors de telles déductions jusqu'à en arriver aux cinq lettres formant le mot cherché, à savoir « biche ». Il n'y a ici aucune propriété, aucun théorème ni aucune définition mathématique à utiliser, il s'agit seulement de faire opérer le raisonnement déductif.

Analyse de la sixième activité RPP : « Puissances »

Voici l'énoncé de la sixième activité RPP que nous avons sélectionnée.

Quel est le dernier chiffre du nombre 2^{2021} ?

Ce problème met en jeu une démarche expérimentale et un raisonnement hypothético-déductif.

Les élèves peuvent ici procéder en cherchant le dernier chiffre des premières puissances de 2 et en repérant ainsi une régularité qu'il s'agit alors de généraliser au cas 2^{2021}. Les élèves doivent alors remarquer que les puissances de 2 se terminent successivement par 2, 4, 8 ou 6, et ce de manière régulière. La période étant de 4, ils doivent ensuite recourir à la division euclidienne de 2021 par 4 pour déterminer le dernier chiffre de 2^{2021}.

Ces différents exemples nous donnent l'occasion de souligner que ces différentes démarches et raisonnements ne sont pas forcément à l'œuvre de manière isolée dans un même problème mais peuvent être imbriqués les uns dans les autres ou bien se succéder au cours d'une même résolution.

Nous donnons maintenant un exemple d'opérationnalisation de ces éléments dans le cadre d'une formation continue.

Exemple d'opérationnalisation en formation continue

Éléments de contexte

Pour présenter le contexte de la formation continue, il convient de préciser que le programme scolaire de mathématiques est le même dans toute la suisse romande pour le primaire et le secondaire I. Cependant, certains cantons présentent des spécificités. Par exemple dans le canton de Genève, un cours spécifique qui cible exclusivement le développement des compétences des élèves en résolution de problèmes a été créé. Ce cours porte l'acronyme DMS pour « Démarches Mathématiques et Scientifiques » et est dispensé en 10e et 11e c'est-à-dire l'équivalent de la 4e et 3e du collège en France. En classe de 10e, il est orienté spécifiquement sur les mathématiques. Il est proposé à la fréquence d'une séance de 45 minutes par semaine. La formation continue que nous présentons ici d'adresse à tous les enseignants qui donnent ce cours pour la 1e fois.

Le point de départ de ce recyclage repose sur plusieurs constats : des difficultés des enseignants à définir des objectifs d'apprentissage pour ce cours de DMS, à organiser leur enseignement, à évaluer les apprentissages des élèves ; et une ressource peu claire, consistant en une liste de problèmes non organisée. Notre objectif de formateur est donc de proposer un outil pour choisir des problèmes et organiser la planification pour ce cours.

Description du contenu et du déroulé de la formation

La formation s'organise ainsi en différents temps que nous décrivons brièvement :

Tout d'abord une phase visant à montrer les limites de la ressource actuelle, notamment du point de vue de la classification des problèmes telle qu'elle est proposée. En effet, les problèmes de la ressource sont organisés par domaine mathématiques mais aussi en fonction des éléments associés aux stratégies de résolution. Or cela nous semble peu pertinent car certains intitulés sont peu explicites, comme par exemple « initiation à la démonstration » qui est un intitulé très général et donc *in fine* peu opérationnel. La catégorie regroupant « Exemple / Contre-exemple » ne nous semble là encore pas opérationnelle. Pour illustrer ces difficultés auprès des participants, nous leur demandons de travailler sur quatre problèmes qui sont tous classés dans cette rubrique (voir annexe 1). On montre alors que dans le premier, il s'agit de faire des exemples jusqu'à trouver un contre-exemple ; dans le deuxième on fait quelques exemples qui permettent de tester la conjecture avant de passer à la validation de cette conjecture ; dans le troisième les exemples vont permettre de s'approprier le problème mais il sera nécessaire de passer à un raisonnement ; et dans le quatrième on peut faire le calcul et cela permet de trouver la réponse. En résumé, on constate des rôles très différents des exemples / contre-exemples et que les types de raisonnements mathématiques et de preuves ne sont pas les mêmes. En conclusion, nous montrons qu'il y a une grande diversité des objectifs travaillés à partir de ces problèmes pourtant classés dans la même catégorie.

Dans un deuxième temps, nous présentons des éléments théoriques qui nous amènent à caractériser les différentes démarches et modes de raisonnements, de manière plus synthétique par rapport à la manière dont nous les avons présentés plus haut dans ce texte.

Nous proposons ensuite quelques problèmes que les participants doivent résoudre et pour lesquels ils doivent identifier les démarches et raisonnements en jeu de manière qu'ils se les approprient. Cela correspond à ce que nous avons présenté dans la partie précédente.

Nous arrivons alors sur un temps de travail autour de la question de la planification. Nous proposons alors, pour chaque démarche ou type de raisonnement, un certain nombre de problèmes (5 ou 6) issus des ressources institutionnelles ou non. On divise les enseignants en autant de groupes qu'il y a de démarches et de raisonnements. Chaque groupe travaille ainsi sur un ensemble de problèmes relevant d'une démarche ou d'un type de raisonnement, l'objectif étant de réfléchir à une organisation de ces problèmes d'un point de vue temporel (dans quel ordre les proposer). Il est ainsi demandé aux enseignants de : résoudre les différents problèmes en gardant des traces des solutions ou de leur recherche ; sélectionner un ou des problèmes pour l'évaluation certificative ; proposer une organisation possible pour les autres problèmes.

Nous donnons ci-dessous un exemple de ce qu'un groupe travaillant sur les problèmes mettant en jeu une démarche expérimentale a produit (Figure 1). On voit l'ordre prévu des problèmes et l'utilisation envisagée de chacun d'eux (entrainement ou évaluation) ainsi que quelques éléments complémentaires.

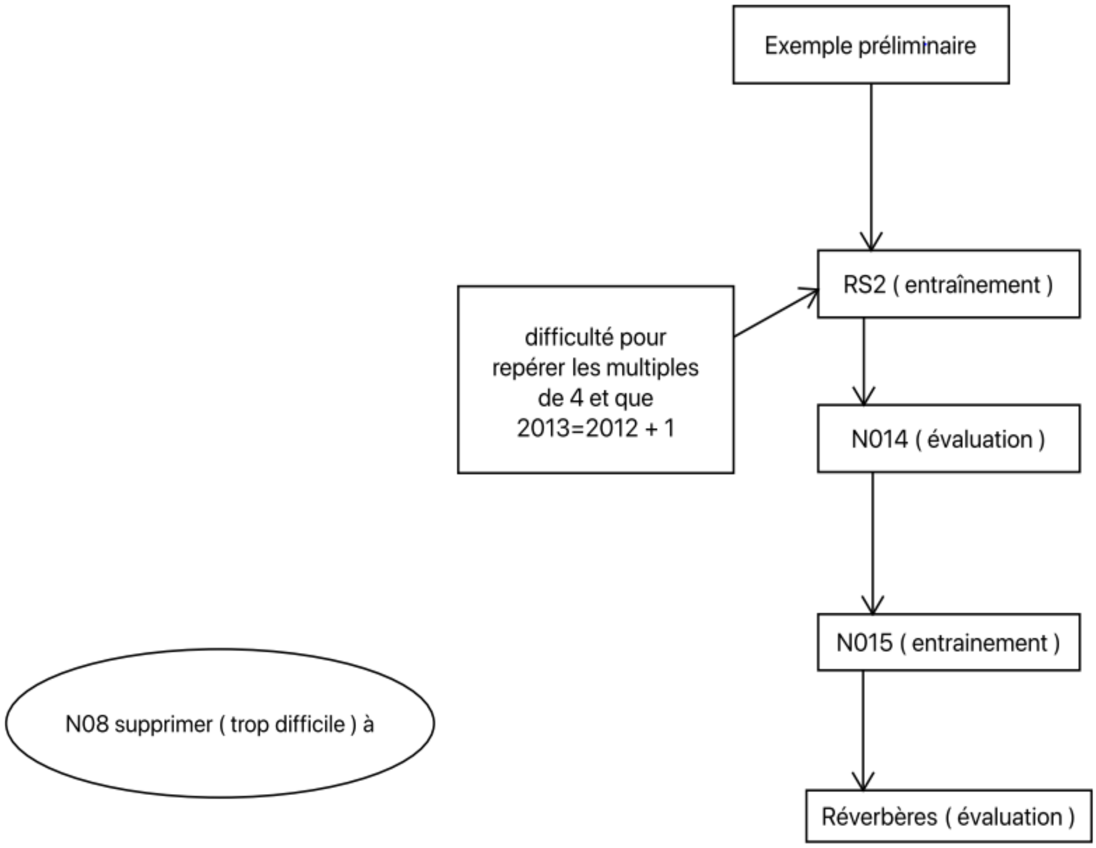


Figure 1. Exemple de planification locale d'un groupe d'enseignants travaillant sur des problèmes mettant en jeu une démarche expérimentale

A l'issue de ce travail, les productions des groupes sont mutualisées de telle sorte que chaque participant dispose des 25 problèmes accompagnés d'éléments de résolution et de pistes de planification telles que proposées par chaque groupe.

Pour finir nous évoquons la question de la planification à l'échelle d'une année. Nous envisageons plusieurs options, sans que cela ne soit exhaustif, pour travailler ces différents démarches et raisonnements :

- Option 1 : Proposer consécutivement plusieurs problèmes qui mettent en jeu la même démarche ou raisonnement avant de passer à un autre type de démarche ou raisonnement ;
- Option 2 : Alterner à chaque nouveau problème les démarches ou raisonnements en jeu, en veillant à changer l'ordre ;
- Option 3 : Regrouper les problèmes par démarche ou raisonnement en jeu, en travaillant cependant tout au long de l'année la démarche expérimentale de sorte qu'elle constitue un fil rouge.

Nous schématisons ces différentes options dans la figure ci-dessous (Figure 2), chaque couleur représentant un type de démarche ou de raisonnement.

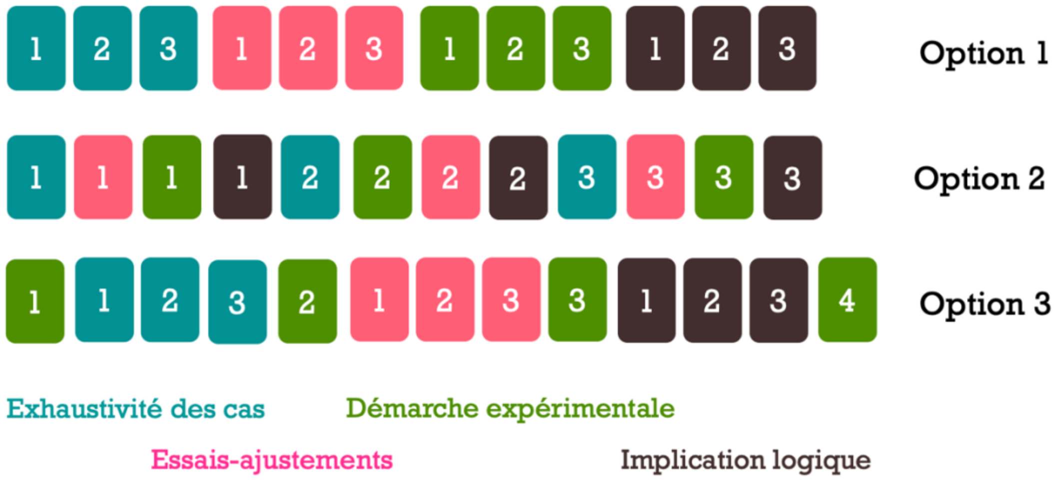


Figure 2. Différentes options pour la planification

A l'issue de cette formation, les participants repartent donc avec des critères mathématiques de classement et d'organisation des problèmes qu'ils ont pu s'approprier et qui sont en lien avec des apprentissages pouvant être visés en résolution de problèmes ; et avec une sélection de problèmes issus de diverses ressources, notamment institutionnelles, classés en fonction de ces objectifs d'apprentissage.

Sondage auprès des enseignants à l'issue de la formation

Notre objectif à l'origine de cette formation était que les enseignants soient ainsi mieux outillés pour enseigner la résolution de problèmes dans le contexte spécifique d'un cours centré exclusivement sur cet aspect du travail mathématique.

Des sondages effectués plus tard dans l'année auprès des enseignants ayant suivi la formation montrent que, parmi les enseignants ayant répondu au sondage (12 répondants sur les 18 participants à la formation), une majorité (9 sur 12) déclare avoir utilisé les démarches et raisonnements pour sélectionner les problèmes à proposer aux élèves au cours de l'année. Un peu moins (7 sur 12) s'en est servi pour organiser sa progression annuelle. Seuls 3 enseignants déclarent ne s'être basés ni sur la planification élaborée pendant la formation, ni plus largement, sur les démarches et modes de raisonnement pour élaborer leur planification annuelle. Enfin, la moitié des enseignants déclare en avoir fait usage pour déterminer des éléments à institutionnaliser.

Conclusion

La prise en compte des démarches et raisonnements en jeu lors de la résolution des activités RPP nous semble permettre de soutenir l'activité des enseignants à travers le choix des problèmes sur lesquels faire travailler les élèves, leur planification, l'évaluation, l'identification d'apprentissages possibles et les processus d'institutionnalisation associés.

Nous souhaitons maintenant engager une recherche de type collaboratif avec des enseignants dispensant le cours de DMS à l'appui notamment, outre les raisonnements et démarches, de différents éléments ayant fait l'objet de précédentes recherches (régulations, heuristiques) en vue d'étudier finement deux processus complémentaires, la dévolution et l'institutionnalisation, avec une perspective d'élaboration d'un outil pour la formation.

Références bibliographiques

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren édition.

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique* [Didactique des Mathématiques]. Université Paris 7 Diderot.

Bonafé, F. (1993). Les narrations de recherche, un outil pour apprendre à démontrer. *Repères IREM*, *12*, 5-14.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La pensée sauvage.

Chevallier, A. (1992). Narration de recherche : Un nouveau type d'exercice scolaire. *Petit x*, *33*, 71-79.

Conférences Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP). (2019). *Aide-mémoire*. LEP.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* (Peter Lang).

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres* [Thèse de doctorat en mathématiques générales]. Université Claude Bernard - Lyon I.

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques]. Université Paris Diderot.

Grenier, D. (2012). La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SiRC). In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : Enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF2012* (p. 1354-1364).

Grenier, D., & Payan, C. (2002). Situation de recherches « en classe » : Essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand Guerrier & C. Tisseron (Éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 189-205).

Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *14*, 31-59.

Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat en éducation]. Université du Québec.

Pólya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible* (L. Couffignal & R. Vallée, Trad.). Gauthiers-Villars.

Sauter, M. (1998). Narration de recherche : Une nouvelle pratique pédagogique. *Repères IREM*, *30*, 9-21.

1. Toujours premier ?

Dans l'expression $n^2 - n + 1$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre premier ?

2. Le carré d'un nombre pair

Si n est un nombre pair, n^2 est-il toujours un nombre pair ? Justifie ta réponse.

8. Les nombres glissants

Un nombre glissant est un nombre qui peut se décomposer en la somme de deux entiers naturels non nuls, pas nécessairement distincts, tels que la somme de leurs inverses s'écrive avec les chiffres du nombre de départ, dans le même ordre et précédés de 0 et d'une virgule.

Exemple : $20 = 10 + 10$ et $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0{,}20$ → 20 est donc un nombre glissant.

Quels sont les nombres glissants à deux chiffres ?

10. 2010

Nicolas a additionné les entiers successifs, de 1 à p, avec sa calculatrice. Il a trouvé 2010. Son professeur lui déclare : « Tu en as oublié un ! ». Lequel ?

10. 2010

Nicolas a additionné les entiers successifs, de 1 à p, avec sa calculatrice. Il a trouvé 2010. Son professeur lui déclare : « Tu en as oublié un ! ». Lequel ?

PROXIMITES DISCURSIVES OU COMMENT APPRECIER LE RAPPROCHEMENT DES ACTIVITES DES ELEVES ET DE LEURS CONNAISSANCES

Fabrice VANDEBROUCK, Aline ROBERT

Résumé. Dans cette communication, nous développons la notion de « proximités discursives » pour analyser le déroulement d'une séance de cours visant à introduire auprès des élèves de la classe de seconde du lycée la définition formalisée de croissance d'une fonction numérique. Nous dressons un bilan à la fois sur la difficulté des analyses didactiques des moments de cours et sur les difficultés spécifiques d'enseignement de la définition du sens de variation. Nous dressons des conséquences pour la formation des enseignants.

En didactique des mathématiques, plusieurs entrées théoriques sont proposées pour l'analyse des activités des élèves et des pratiques enseignantes dans la classe. Notre entrée est ancrée en Théorie de l'Activité. Nous cherchons à opérationnaliser des outils théoriques et méthodologiques proposés par cette théorie pour comprendre les pratiques et les activités dans le cadre de la classe ordinaire de mathématiques.

Dans cet article nous développons la notion de « proximités discursives » pour analyser le déroulement d'une séance de cours visant à introduire auprès des élèves de la classe de seconde du lycée en France (grade 12) la définition formalisée de croissance d'une fonction numérique. Dans toute la suite le mot « cours » est utilisé dans le sens restrictif de « exposition des connaissances en classe ». Cette analyse donne à voir à la fois la démarche que nous adoptons pour étudier ces moments de classe particuliers et les difficultés spécifiques à introduire une telle notion, qui porte en elle-même un caractère formalisateur, mettant en difficulté l'enseignant dans ses pratiques et les élèves dans leur compréhension

Dans la première partie nous précisons notre positionnement théorique ainsi que notre méthodologie générale d'analyse des activités des élèves en cours, utilisant les proximités discursives. Dans la deuxième partie, nous introduisons ce que nous appelons le relief sur la notion à enseigner, en nous restreignant d'emblée à l'exemple choisi, ici la définition formalisée de la croissance d'une fonction numérique. Nous développons ensuite l'analyse du déroulement d'une première séance de cours observée intitulée « Surface Agricole », ce qui est le titre de la tâche introductive proposée. Nous contrastons avec l'analyse plus rapide d'une deuxième séance dans une autre classe et avec un autre enseignant. Nous dressons un bilan à la fois sur la difficulté des analyses didactiques des moments de cours et sur les difficultés spécifiques d'enseignement de la définition du sens de variation, avant de conclure plus généralement sur la formation des enseignants.

Positionnement théorique et proximités discursives

Nous nous plaçons en Théorie de l'Activité (Léontiev, 1984), ce qui implique que nous prenons comme entrée pour étudier les relations enseignement apprentissage d'un contenu mathématique donné, ce qui se fait dans la classe de mathématique ordinaire, dans son contexte institutionnel relatif aux savoirs en jeu mais aussi son contexte temporel (l'inscription de la séance dans un scénario global), voire culturel et social (type d'établissement). Dans cette perspective théorique, les interactions dans la classe, et donc les déroulements de séances de mathématiques, sont aussi cruciaux que les analyses des contenus en jeu, des scénarios et des tâches proposées aux élèves. Au centre de notre approche, nous plaçons les « activités mathématiques » des élèves (on dira juste « activités »), processus cognitifs individuels qui nous permettent d'apprécier leurs apprentissages (Rogalski 2008).

Nous analysons dans cet article deux séances de classe de seconde ordinaire pendant lesquelles, après qu'un exercice d'introduction à la notion de variation des fonctions (appelé « activité introductive » dans les manuels) ait été travaillé par les élèves, l'enseignant expose le cours sur le sens des variations des fonctions numériques. Nos méthodologies d'analyses de tâches et de déroulements ont été largement présentées dans des écrits précédents (Vandebrouck 2008, Robert et al., 2012). Nous distinguons notamment les activités attendues des activités possibles des élèves, issues respectivement des analyses de tâches et de celles des déroulements. Nous dégageons différents types d'aides de l'enseignant qui interviennent dans les activités des élèves, procédurales qui donnent des pistes et souvent réduisent la tâche, ou constructives qui, au contraire, amènent les élèves un peu « plus loin » que ce qu'ils ont fait. Nous repérons également les activités a maxima, développées d'emblée par des élèves et associées à toute la complexité des tâches prescrites, des activités développées a minima, sur des tâches redéfinies pour/par les élèves ou avec des aides procédurales proposées par l'enseignant pendant les déroulements. Nos analyses se font à partir des transcriptions de vidéos tournées dans les classes, une caméra étant généralement placée au fond de la salle en l'absence de tout observateur.

Dans cet article, ces outils d'analyse servent peu. Nous illustrons comment nous les complétons pour étudier les moments d'exposition des connaissances, c'est-à-dire le déroulement du cours qui, dans notre cas, suit le travail sur une tâche d'introduction à la notion visée. Ce moment est à comprendre dans un sens assez large, qui dépasse notamment le sens d'institutionnalisation sur une connaissance nouvelle, au sens de la théorie des situations didactiques TSD (Brousseau, 1997), dans la mesure où le processus en jeu peut être moins complet que ce que recouvre le terme en TSD.

Nous utilisons pour cette étude la notion de « proximités discursives » qui correspond à une opérationnalisation en didactique des mathématiques de la notion de zone de proche développement (ZPD) de Vygotski (1934/97).

Dans les moments d'exposition de connaissances, qui suivent éventuellement des tâches d'introduction, les activités possibles des élèves sont très difficilement accessibles, notamment par nos méthodologies d'observation directe des actions des élèves (rendues visibles sur nos vidéos). Il n'y a plus de tâches mathématiques explicites, sauf exception. La tâche des élèves est en partie liée à l'écoute de l'enseignant en train de présenter un bilan ou même une notion de façon générale (ou un théorème ou une propriété ou une méthode…), avec souvent des réponses à des questions limitées, intégrées au fil de la présentation. On ne peut étudier que ce que l'enseignant et les élèves disent ou montrent. Nous cherchons alors la manière dont l'enseignant peut « agir » (indirectement) sur les activités des élèves liées à cette exposition de connaissances. Nous nous demandons comment, pendant ce cours, l'enseignant s'appuie sur ou prolonge des activités antérieures des élèves, notamment en évoquant lui-même ou faisant évoquer par les élèves des éléments contextualisés, déjà travaillés, pour repositionner ces éléments à un niveau plus général. Nous interrogeons aussi la manière dont, pendant ce moment de cours, il prépare ou accompagne des activités ultérieures des élèves en explicitant (ou faisant expliciter) le passage de connaissances présentées à un niveau général à des activités les mettant en jeu de manière contextualisée, à partir de questions ou de petites tâches qui peuvent être résolues pendant le cours, collectivement. En particulier nous étudions toutes les occasions repérées dans le discours de l'enseignant (et des élèves entre eux) de s'appuyer sur ce qui vient des élèves. C'est ce que nous appelons des « proximités discursives ». Ce sont des apports spécifiques, éventuellement associés à des questions obligeant les élèves à répondre en dépassant ce qui vient d'être dit ou fait.

Les proximités discursives sont ainsi des rapprochements explicites, dans le discours de l'enseignant, entre ce qui est visé et ce qui vient des élèves (Robert et Vandebrouck 2014 ; Vandebrouck et Robert 2017). Leur étude se fait à partir des transcriptions, permettant de pointer les éléments dans le discours de l'enseignant qui s'appuient sur des activités des élèves ou leurs connaissances supposées tout en abordant les connaissances visées. Ce qui est précisément en jeu dans ces proximités, c'est la possibilité de familiariser les élèves avec les mots généraux qui sont introduits et les formalisations nouvelles qui sont présentées et de faire activer ensuite (grâce à ce qui s'est passé avant) des connexions, des liens explicites, entre mots (formules…) et activités mathématiques en contexte.

Pour mieux qualifier et interpréter ces rapprochements, on introduit une distinction entre proximités ascendantes, descendantes et horizontales. Les premières sont des rapprochements du contextualisé au général, qui mettent en jeu une démarche inductive, souvent difficile pour les élèves peu habitués à généraliser eux-mêmes. Les secondes sont des rapprochements qui vont dans le sens inverse, du général au contextualisé : ils sont plus déductifs, basés sur des reconnaissances et des substitutions. Les dernières rapprochent des éléments de même niveau de généralité mais associés à des aspects différents, la plupart des changements de registres par exemple. Le travail partagé sur des connaissances proches peut donc se faire par prolongement à partir du connu (l'enseignant met en évidence avec les élèves ce qui est généralisé : proximité ascendante), par insertion du nouveau dans du déjà-connu (l'enseignant met en évidence la manière d'appliquer à des contextes déjà travaillés les nouvelles connaissances : proximité descendante) ou par introduction de liens entre du déjà connu et du nouveau.

Cela dit le label d'une proximité n'est pas toujours clair, il peut dépendre des élèves (et de l'état de leurs connaissances), une même intervention peut avoir le double statut descendant et ascendant.

On reconnait bien dans cette définition et cette catégorisation des proximités une tentative d'opérationnalisation de la notion de ZPD. Elle est cependant adaptée de la notion originelle à deux titres au moins : d'une part il ne s'agit pas de rechercher des rapprochements dans des interactions individuelles mais collectives (souvent), d'autre part il ne s'agit pas de partager des résolutions de problèmes (même au sens large) mais des présentations de connaissances.

En résumé, notre objet d'étude est à la fois le contenu des discours des enseignants et l'insertion effective de ce discours dans les activités possibles des élèves lors des déroulements. L'efficacité des moments d'exposition de connaissances dépendrait ainsi, en partie, à la fois des occasions et de la qualité des proximités discursives, comme nous allons l'illustrer maintenant sur notre exemple.

Relief sur l'enseignement de la variation des fonctions en seconde

Nous nous intéressons à la question suivante : comment peut se faire, en seconde, l'introduction de la définition (nouvelle) formalisée de la notion de fonction croissante (resp. décroissante) - pour tout a, b de l'intervalle d'étude, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) \geq f(b)$) ? Ce qui est en jeu est la traduction ponctuelle universelle doublement quantifiée d'une propriété globale sur les fonctions (Rogalski M, 2008). Quelles motivations l'enseignant peut-il trouver pendant son cours à cette introduction formelle algébrique ? Quelles activités préalables – en termes notamment de reconnaissances, d'organisation ou de traitement - peut-il avoir fait développer aux élèves et comment peut-il s'appuyer sur les connaissances déjà-là et/ou les activités préalables des élèves pour introduire cette définition nouvelle ? Avant d'aborder nos analyses de moments de cours pour répondre à ces questions, nous établissons ce que nous appelons le relief sur l'enseignement de cette notion (Robert et al., 2012). Ce relief nous sert de référence didactique pour toute la suite de notre étude.

Cette notion de relief permet de faire le lien entre la Théorie de l'Activité (qui n'est pas une théorie didactique) et la didactique des mathématiques, les contenus en jeu et les processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques. Il s'agit d'une triple analyse croisée, préalable, mathématiques (et épistémologique), curriculaire et cognitive sur la notion enjeu de l'apprentissage. Cette étude préalable aux analyses des tâches proposées et déroulements en classe, permet de situer par rapport aux contenus visés les activités intriquées des élèves et du professeur. Nous passons en revue les programmes d'enseignement, qui permettent de préciser les mathématiques en jeu à ce niveau et avant. Nous repérons les exercices possibles sur la notion en jeu. Il s'agit également, compte tenu de nos analyses mathématiques et des programmes, de traquer des éléments cognitifs – en termes d'activités possibles - qui balisent le cheminement des élèves jusqu'à la notion visée (ici la définition formalisée de la (dé) croissance d'une fonction), en signalant en particulier les difficultés déjà repérées et prévisibles des élèves. Nous en déduisons des tâches d'introduction envisageables, avec les appuis possibles ou impossibles pour le premier cours qui suit.

Les mathématiques en jeu

La formalisation algébrique de la définition du sens de variations correspond à ce que nous appelons une notion FUG[11](O), compte tenu de ce que savent les élèves au moment où elle est introduite : elle formalise la notion de croissance (resp. décroissance) d'une fonction sur un intervalle, mais de manière nouvelle, algébrique, et hors de portée d'imagination des élèves ; elle unifie cette notion pour toutes les fonctions déjà rencontrées (linéaires et affines, voire autres) ; elle contribue à unifier l'approche graphique et l'approche numérique grâce à l'expression algébrique ; elle permet la généralisation de la notion à d'autres fonctions qui ne sont pas nécessairement encore connues des élèves de seconde. Les approches numérique, graphique et algébrique de la croissance sont ainsi reliées.

Mais le plus important tient au (O) comme opérationnaliser. En effet les descriptions dynamiques des variations d'une fonction en termes d'allures de courbes ou celles, numériques, mettant en jeu des augmentations simultanées de valeurs, ne se laissent pas traduire formellement directement dans le langage mathématique précis attendu, même si on dispose de l'expression algébrique de la fonction. C'est ce qu'ajoute la définition formelle étudiée. Le (O) signale ainsi qu'il s'agit d'opérationnaliser une propriété qui est facilement perçue de manière dynamique – graphique ou numérique - mais traduisible en une expression algébrique, statique, avec laquelle on peut travailler.

Signalons, pour raccrocher le choix de notre thème mathématique à d'autres travaux actuels en didactique, une étude épistémologique récente des formulations successives des variations des fonctions, en relation avec l'étude du signe de la dérivée, qui est accessible dans Cabañas-Ramírez N.O & al. (2020). Elle montre plusieurs formulations successives, historiquement et dans les manuels, et elle confirme le fait que la formalisation actuelle est apparue tardivement (1912), bien après l'émergence du théorème liant signe de la dérivée et variations de la fonction. Les travaux de Hitt et González-Martín (2016) constituent plus globalement une source de références pour l'étude de l'enseignement des fonctions.

Aspects curriculaires (les programmes)

Les séances que nous étudions ici relèvent du programme de seconde de 2009 en France, précédant le nouveau programme entré en vigueur en 2019. En réalité, en ce qui concerne le chapitre des variations des fonctions, il n'y a pas de réel changement à signaler entre les programmes de 2009 et de 2019 (ni d'ailleurs de changements après la parution en 2019).

Au collège, les fonctions sont abordées dès le collège où les élèves ont découvert des premières généralités sur les fonctions à travers différents registres de représentations : algébrique, numérique, graphique notamment. Ils doivent connaitre le vocabulaire de base (image, antécédent, courbe représentative). Ils ont étudié les fonctions linéaires, affines (sans aborder tous les aspects, ils ont les formules et les droites associées graphiquement, sans leurs

[11] FUG : initiales de Formalisation Unificatrice Généralisatrice

équations). Ils ont rencontré depuis plusieurs années des courbes quelconques, associées à des phénomènes ou à des grandeurs, et ont été amenés à reconnaître et interpréter qu'une courbe « monte », « descend », est constante, a un maximum, en référence à l'augmentation, la diminution, la constance de ce qui est représenté en ordonnée. Mais sans aucun formalisme algébrique.

En classe de seconde du lycée, les objectifs affichés dans les programmes sont de consolider les acquis, d'étendre la panoplie de fonctions de références – avec la fonction carré, racine carré, inverse, cube – d'étudier les notions (nouvelles) liées à la formalisation du sens de variation, des extremums et de la parité. Une nouvelle représentation apparaît avec les tableaux de variations.

Ainsi trouve-t-on cités dans le programme « la croissance, la décroissance, la monotonie d'une fonction définie sur un intervalle et son tableau de variations, ainsi que le maximum et le minimum d'une fonction sur un intervalle ».

Ces variations des fonctions peuvent donner lieu, lorsque la variable décrit l'intervalle considéré, à une perception graphique, globale, sur une courbe (« monte » ou « descend »), à une perception numérique, ponctuelle (les valeurs successives de la fonction augmentent ou diminuent) ou à une définition algébrique formelle mettant en jeu un quantificateur (portant sur les couples ordonnés de réels) et une implication portant sur la comparaison de l'ordre des images de ces réels. Mais il y a des grandes différences entre les traductions dans ces trois registres, la troisième, nouvelle, étant plus difficile à cause de l'introduction d'un symbolisme logique. Le seul cas où une formalisation du même type mais plus simple peut avoir été rencontré concerne la formalisation des extrema d'une fonction, souvent donnée avant celle du sens de variation, et peu utilisée de fait.

Les capacités attendues sont les suivantes : décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe ; dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations […] Cependant pour ces capacités, il n'est nul besoin de la définition algébrique pour réussir les tâches correspondantes. Problématiser cette définition algébrique reste donc très difficile pour le professeur.

Des accents spécifiques sont mis sur la modélisation d'une part et sur la résolution d'équations/inéquations fonctionnelles d'autre part ainsi que sur l'usage des outils numériques (logiciels de géométrie dynamique, tableurs, calculateurs formels et calculatrices notamment). Ainsi dans le premier paragraphe « Fonctions » du programme de Seconde (BO n°30 du 23 juillet 2009) l'utilisation des logiciels est largement encouragée mais en même temps, l'élève doit s'interroger sur la façon dont les courbes sont obtenues : en effet, il doit apprendre « à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données ». Plus loin, on indique « il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction. » Il s'agit donc de faire comprendre les limites de ce qu'on peut en déduire des courbes obtenues sur un écran graphique comme avec Géogébra par exemple ou des tableaux de valeurs.

Enfin les commentaires des deux programmes de 2009 et 2019 précisent à un moment donné « Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année ». Notre questionnement sur l'introduction de ces notions rencontre donc bien des pratiques de classes ordinaires.

Aspects curriculaires (les exercices dans les manuels)

Les registres graphiques, numériques et algébriques, déjà en jeu en troisième sont renforcés et augmentés de la définition formelle algébrique des variations, et cela peut alimenter les exercices en classe de seconde.

Cela dit, comprendre et maitriser ces définitions formelles algébriques ne va pas de soi et les tâches qui peuvent y conduire, qui ne sont pas souvent évoquées, sont assez peu nombreuses et peu variées compte tenu des connaissances algébriques des élèves. Si le professeur se contente de décliner les capacités indiquées dans le programme de 2009, on reste bien loin de la maitrise de cette définition. En fait, les deux programmes permettent une certaine latitude, suivant le niveau des élèves et les intentions de l'enseignant, entre des tâches simples et isolées autour de la courbe et du tableau de variation et des exercices plus complexes combinant différents aspects dans de véritables problèmes, utilisant éventuellement la définition algébrique, qui est difficile - on y reviendra plus bas - mais il n'y a pas tellement d'exercices adaptés à faire manipuler cette dernière. A minima, les activités des élèves peuvent être seulement de constater qu'une courbe monte ou descend sur tel ou tel intervalle donné, ou que des valeurs augmentent ou diminuent, et les élèves peuvent en déduire les variations sans jamais utiliser la définition (travail sur une mobilisabilité réduite des connaissances visées). A maxima, les activités portent sur la reconnaissance qu'il s'agit de démontrer algébriquement une (dé)croissance, avec l'organisation et le traitement correspondant (travail pouvant contribuer à la disponibilité de la définition et à sa mise en œuvre grâce à des calculs sur des inégalités algébriques).

Mais, dans les exercices de seconde (cf. manuels) il y a peu d'occasion d'utiliser la définition algébrique de la croissance comme outil. Souvent on s'appuie sur un graphique pour étudier les variations et l'algébrique ne vient qu'en vérification éventuelle, voire pour apporter une précision ou déjouer une fausse perception, mais dans des cas rares. Vu les connaissances algébriques des élèves, qui ne savent pas encore étudier en toute généralité le signe d'un trinôme du second degré, il y a peu de fonctions données par leur expression algébrique pour lesquelles ils peuvent utiliser la définition pour trouver le sens de variation. La démonstration du fait qu'une fonction affine donnée par la formule $f(x) = ax + b$ est croissante si et seulement si a est positif, permettant l'utilisation « outil » de la définition formelle, n'a pas d'enjeu en classe de seconde et elle est rarement observée dans les manuels et les pratiques. Et le fait qu'il suffise, pour avoir le sens de variation d'une fonction affine sur un intervalle $[c; d]$, de comparer $f(c)$ et $f(d)$, peut perturber l'adoption de la formule dans le cas général où on ne peut pas se contenter de comparer les images des extrémités de l'intervalle.

On peut aussi réserver l'usage de la formalisation aux exercices qui suivent l'introduction des nouvelles fonctions de référence du programme, comme les fonctions carré ou inverse, mais cela n'aidera pas plus à établir cette formalisation. En fait c'est le passage au calcul algébrique à proprement parler qui s'avère délicat, vu les difficultés prévisibles des élèves de seconde dès qu'on a affaire à des fonctions un peu compliquées…

Enfin, la notion de dérivée permettra, en classe de première, d'éviter le recours à la définition algébrique, ce qui en minore l'intérêt, au moins pour les enseignants, et justifie de ne pas s'attarder sur ces exercices où la recherche du sens de variation se fait algébriquement.

On pourrait donc s'interroger sur l'utilité de l'introduction de cette formalisation, alors même qu'elle n'est pas très nécessaire dans l'enseignement à ce niveau : nous y voyons un intérêt étant donné que la conceptualisation (Vergnaud, 1990) est un processus long et que cette première rencontre joue un rôle certain de familiarisation.

Aspects cognitifs

Nous détaillons les activités mathématiques, associées aux différents registres en jeu. Le travail sur les variations dans le registre graphique ne met en jeu que la courbe, ensemble de points, et la description correspondante en termes d'allure (montante ou descendante) fait travailler aux élèves la perspective globale sur les fonctions (Montoya et al., 2018). Elle ne fait pas intervenir les deux coordonnées de ces points, ni a fortiori leur dépendance et leur covariation, pourtant en jeu. De plus elle est dynamique, mettant en scène un mouvement qui est ajouté. Or pour une courbe donnée, la fonction qu'elle représente n'est pas visible en tant qu'objet séparé. Il y aura donc à transporter, et ce n'est pas transparent, d'un registre à un autre non congruent, les notions de croissance (la courbe monte), décroissance, variation. Le problème n'est pas qu'une question de vocabulaire : la courbe monte et la fonction croit. C'est une question d'interprétation d'une visualisation (Duval, 2005) dynamique et globale en dimension 2, en une connaissance sur les fonctions, pour laquelle il n'y a plus qu'une dimension, celle portée par la variable indépendante.

En outre que ce qui est interprété visuellement le plus immédiatement est la variation de y, en ordonnée, celle de x, en abscisse, étant « cachée » dans le sens du parcours, de gauche à droite. Il y a donc une inversion avec le fait que, en phrase ou dans le tableau, on commence par x (en première ligne du tableau). Il y a également une « traduction » souvent laissée implicite de « plus haut » ou « à droite » (on regarde la place sur un axe) en « plus grand » (on introduit un ordre sur les valeurs représentées sur l'axe). Enfin, les intervalles concernés peuvent ne pas être précis, les lectures graphiques ne pouvant être qu'approximatives – même si certaines conventions peuvent être adoptées à ce sujet.

Le travail dans le cadre numérique permet quant à lui de dissocier plus explicitement x et $f(x)$, tout en décrivant leur co-variation, par exemple en faisant afficher les valeurs de x et $f(x)$ sur un tableur. La perspective ponctuelle sur la fonction en jeu est concernée, favorisant sans doute un lien avec la définition formalisée qui est ponctuelle universelle. Mais, encore une fois, comment traduire algébriquement que, comme on peut le constater, quand les valeurs de x augmentent, celles de $f(x)$ aussi (pour fixer les idées) ? Et sur quels intervalles ?

Il y a, pour aborder le troisième registre, un double travail mathématique, précisément une double « astuce » mathématique. En effet pour traduire de manière statique la notion de (dé)croissance, sans faire appel à l'augmentation, ni au mouvement, il faut comparer algébriquement les valeurs de $f(x)$ pour deux valeurs a et b de x – perspective ponctuelle dynamique, devenue statique - et, comme c'est évidemment insuffisant, il faut le faire pour tous les couples (a ; b), ou, ce qui revient au même pour un couple « quelconque », c'est-à-dire tel que les valeurs particulières que pourraient prendre a ou b n'interviennent pas. Il y a ainsi un quantificateur sur les couples, et une implication pour un couple donné, qui doit être démontrée de manière générique, sans faire intervenir de valeurs spécifiques : c'est une implication universelle.

Ainsi, en anticipant sur ce qui suit, si une partie de la définition algébrique, en termes d'inégalités - $a < b$ implique $f(a) \leq f(b)$ - est facilement associée au tableau de valeur des couples $(x, f(x))$, voire à la représentation graphique de la fonction (qui « monte »), même si les élèves ne peuvent pas toujours y penser seuls, le fait qu'il est nécessaire que ce soit vérifié pour tous les couples (a ; b) tels que $a < b$ est nettement moins intuitif. Trouver la double astuce précédente nous semble inaccessible à la plupart des élèves de seconde. Mais la comprendre nous semble accessible après des explications suivant la donnée de la formule, notamment si le travail dans les cadres numérique et graphique a été bien avancé. Ainsi, une fois la formalisation établie, les élèves peuvent facilement en visualiser la signification sur la courbe par exemple ou le tableau de valeurs.

Les introductions possibles de la définition formalisée

Il semble donc qu'il est difficile de trouver un problème tel que les élèves « seuls » aient besoin, pour le résoudre, de la formulation algébrique. S'intéresser à la « double » variation simultanée de x et $f(x)$, au lieu de s'appuyer sur la seule courbe, semble en revanche possible et suffit souvent pour un certain type de réponses. Par exemple, les élèves peuvent avoir « besoin » de trouver quand telle grandeur croit en fonction de telle autre, quand il y a des maxima ou minima, quand ne pas dépasser telle valeur, etc. S'ils ont une courbe ils peuvent répondre. S'ils disposent des valeurs sur un tableur, ils peuvent aussi donner des réponses (approximatives cependant, comme avec une courbe). Sinon, s'ils n'ont que des informations algébriques par exemple, ils n'ont aucun moyen pour le faire, si ce n'est à se ramener à une courbe…tracée par un logiciel ou par eux à partir de valeurs, mais approximativement (sauf si c'est une fonction affine).

De ce fait, les activités sur la tâche introductive nécessitent sans doute une intervention complémentaire de l'enseignant (et des proximités) pour aller jusqu'à l'expression algébrique des variations de la fonction, en s'appuyant sur les acquis antérieurs. Pour alimenter ces moments d'expositions de la connaissance nouvelle, nous avons trouvé deux grands types de tâches introductives (appelées souvent « activités d'introduction ») dans les manuels selon la façon dont on envisage ce lien courbes/fonctions.

Le premier type permet de faire travailler sur des graphiques directement fournis aux élèves, permettant de réviser les descriptions des courbes et les interprétations correspondantes sur la co-variation – extrema, intervalles où la courbe monte ou descend. Ce sont souvent des situations non mathématiques qui sont en jeu, et on ne connait pas les fonctions associées. Souvent la variable est le temps. Rien dans ce type de tâches n'amène au besoin d'une formulation plus précise, si ce n'est, éventuellement, une certaine approximation des lectures, mais qui ne peut pas être résolue au sein de la tâche. Les activités des élèves, même a maxima, peuvent donc n'embarquer que la perspective globale sur les fonctions, si tant est qu'elles soient développées dans le cadre fonctionnel. Elles peuvent rester dynamique et rien ne favorise des proximités discursives vers la définition nouvelle visée.

Le deuxième type d'introduction permet d'aller un peu plus loin. Les élèves ont à modéliser (mathématiser) eux-mêmes la situation de départ et disposent donc d'une expression algébrique. Les activités des élèves sont développées dans le cadre fonctionnel. Cela permet d'aborder la traduction algébrique de la croissance (par exemple), soit en tant que telle, en l'appliquant à la fonction en jeu, soit pour gagner en précision – ce qui reste difficile au vu des connaissances algébriques à mobiliser - soit pour introduire une problématique plus générale où on ne disposerait ni d'une courbe ni des valeurs de la fonction étudiée. Le premier exemple étudié est du deuxième type et il est donc plus susceptible d'amener les élèves sur le chemin de la définition. Le deuxième exemple étudié relève du premier type et la suite de l'exposé justifiera la présentation dans cet ordre.

Le premier exemple : une activité d'introduction (surfaces agricoles) suivie d'un cours (Robert & al., 2020)

Dans cette tâche, l'étude de la variation d'une grandeur (la surface d'un champ) en fonction d'une autre (la longueur du côté), liée à une figure géométrique (rectangle modélisant le champ), est introduite. On cherche s'il y a un maximum de cette surface. Nous n'analysons pas le déroulement du travail des élèves sur la tâche introductive (figure 1) : il se déroule en demi-classe et ne permet d'aborder que le tout début du problème.

NOM :

Classe :

Prénom :

Date : ..../ ..../ ....

Surfaces agricoles

Le long d'une rivière dont les bords sont rectilignes, il a été décidé de délimiter des champs destinés à l'agriculture. Ces champs seront tous de forme rectangulaire, l'un des côtés du rectangle étant le bord de la rivière, ce qui permettra facilement l'arrosage des cultures.

Pour délimiter son champ, chaque famille d'agriculteurs reçoit une clôture de longueur égale à 750 mètres, ainsi que tout le matériel pour installer solidement la clôture. Chaque famille peut donc choisir les dimensions de son champ, pourvu qu'il respecte les contraintes indiquées et soit entouré par les 750 mètres de clôture.

Les champs ainsi délimités auront-ils tous la même surface ?

Si la réponse à la question précédente est négative, existe-t-il une façon d'installer la clôture qui délimite un champ de surface maximale ?

Figure 1 : énoncé distribué aux élèves

La modélisation et l'exploration sont laissées aux élèves sur le temps de la séance en demi-classe. Les élèves doivent reconnaître et travailler dans le cadre fonctionnel, d'où l'introduction d'une fonction du second degré explicite, qui pourra permettre un traitement algébrique (obtention de la fonction $x(750 - 2x)$ avec des aides procédurales de l'enseignant, x longueur du côté perpendiculaire à la rivière). Dans cette première séance, les élèves démarrent plus ou moins selon les groupes une exploration graphique du maximum guidée par l'enseignant. Mais aucun groupe ne va au bout de l'activité mathématique en ce qui concerne les variations, qui ne sont même pas encore évoquées ! Cela permettra toutefois de rapprocher les élèves de questionnements et de réponses possibles sur les variations de la grandeur étudiée quand la longueur d'un des côtés varie. Les élèves pourront répondre en s'aidant du graphique ou d'un tableau de valeurs mais leurs réponses resteront nécessairement approchées (choix adéquat des variables didactiques). Cela peut donc être l'un des prétextes pour faire réfléchir les élèves à une formulation algébrique « exacte ».

A partir du tableur

Dans la deuxième séance (celle de cours), après avoir résumé ce qui a eu lieu dans la première séance et redonné l'expression algébrique de la fonction en jeu, l'enseignant propose d'abord aux élèves de percevoir et décrire visuellement les variations grâce à une animation numérique sur le tableur (affiché au tableau). Les élèves peuvent répondre, en affinant leurs formulations. On obtient l'établissement de la co-variation numérique, facilitée par les deux colonnes du tableur, qui amènent une perception numérique de la co-variation. Voici la transcription de cette phase pour identifier les proximités discursives à ce moment-là (E désigne un élève, pas nécessairement le même ; entre parenthèse le minutage de la séance).

(15) Donc ça nous c'est ce qu'on propose à l'ordinateur, au tableur et il nous calcule les surfaces. *[on voit les deux colonnes du tableur avec x et f(x)]*

(…)

Alors vous allez regarder. ce qui se passe ? Dans la colonne de droite évidemment, silence (7'')

Alors regardez bien parce que…

E. Stop

Quoi stop ?

Alors on peut peut-être s'arrêter là alors qu'est-ce que vous avez remarqué ?

E. Le maximum…

Alors il se trouve que dans la première partie du tableau qu'est-ce qu'on a constaté ?

E. … (inaudible)

Donc j'espère que vous avez noté des choses.

E. Ben oui

Alors vous avez noté que dans la première partie du tableau **on constate que la surface augmente (son doigt suit la colonne en descendant)**

E. Puis diminue

jusqu'à, alors, une valeur qui pour l'instant est maximale

E. en nombre entier

en nombre entier. En tout cas 190 on a 70300 et après on constate que, pour l'instant, on va aller au bout

E. (inaudible)

Ça diminue. Alors est-ce que ça continue à diminuer tout le temps

E. ouais

Et là on est à 0. Alors qu'est-ce qu'on pourrait dire globalement, c'est-à-dire qu'est-ce qu'on a observé ?

Alors pas tout le monde à la fois vous levez la main…

(17) Chut vous écoutez, vous vous écoutez…

E. (inaudible)

On est à la 15ième minute. Le professeur projette le tableur avec les deux colonnes intitulées x et $f(x)$ pour préparer la définition ; comme les élèves ont travaillé sur la modélisation dans la première partie, on peut penser que les activités des élèves embarquent déjà du fonctionnel et donc qu'ils vont reconnaître ce codage. Mais ce sont des inférences. Le professeur pose des questions sur ce que les élèves constatent. D'abord c'est le maximum qui est remarqué mais ce n'est pas repris par le professeur car cela ne contribue pas à l'avancée vers la variation. Le professeur reformule la question et s'appuie sur des activités préalables et supposées des élèves : « on constate que la surface augmente ».

Nous constatons toutefois que les élèves continuent d'emblée la phrase en ajoutant « et diminue » quand le doigt du professeur continue sur la colonne du tableur. On a bien une proximité discursive car les élèves – ou du moins un élève - s'emparent du « augmente » et continuent avec « diminue ». On peut donc considérer que le « augmente », même s'il n'est pas prononcé en premier par les élèves, est bien en appui sur les activités des élèves et constitue un appui pour l'activité suivante.

C'est une proximité horizontale car elle correspond à une lecture descriptive en langage courant du registre numérique, sans changement du niveau de généralité. Cette illustration de la notion de proximité montre que cette dernière est identifiée aussi bien par des activités élèves préalables que par des activités qui suivent (ici une reprise avec « diminue »). On identifie également le début du cheminement cognitif mis à jour dans le relief de l'enseignement de la notion visée. L'interaction continue.

Alors dans la colonne de gauche est-ce que les valeurs augmentent tout le temps ?
E. Oui
Dans la colonne de gauche les valeurs augmentent de 10 en 10 régulièrement de 0 à 375
Dans la colonne de gauche x augmente tout le temps et du coup tandis que x augmente
E….

Dans cet épisode, le professeur provoque de la visualisation sur la colonne de la variables indépendante. L'inconnue « x » apparaît. Le discours n'est plus sur « ça augmente » mais « x augmente ». Comme on l'a déjà signalé, les élèves ont déjà eu des activités sur la modélisation fonctionnelle dans le début de la séance. En outre, dans le tableur affiché au tableau, les symboles « x » et « $f(x)$ » notés en haut des colonnes du tableur sont explicites et l'enseignant s'appuie sur cette projection. Comme dans l'épisode précédent, il faut continuer d'étudier la transcription pour savoir si l'introduction du « x » dans le discours relève bien d'une proximité discursive (ascendante dans ce cas puisqu'on introduit la formalisation algébrique).

Donc dans la colonne de droite .
E. ça augmente
ça augmente
E. et après ça diminue.
et après ça diminue. Donc on a d'abord des valeurs qui sont en augmentation et puis après, alors ici c'est à 190 que ça a l'air de changer, et après c'est en diminution,
E. à partir de 200
voilà à partir de 200 et jusqu'à la fin. J'ai mis 375 parce que ça tombe sur 375 où ça fait 0, bon. Donc **(18)** qu'est-ce qu'on peut déjà dire. Qu'est-ce que ça peut nous permettre de dire cette observation.
Et déjà c'est pas toutes les mêmes valeurs ça on l'a vu, il y en a plein plein de différentes. Et puis de façon plus globale,
E. plus x est grand
plus x est grand
E. plus la surface est petite.
E. non
Alors c'est pas ça. Alors corrigez, J, corrigez
Chut, non vous vous écoutez sinon, comme c'est un peu compliqué il faut vraiment faire un effort
E. Ben ça augmente mais au bout d'un moment ça rediminue
Dans un premier, pour certaines valeurs de x ça augmente
E. Et après ça diminue
Et après ça diminue. Alors est-ce que c'est clair pour tout le monde ça ?
Alors qu'est-ce qu'on pourrait faire comme phrase ? Essayez de faire une phrase, oui une phrase, A.
Alors c'est quelle première partie ? Y a une première partie où la surface augmente.
E : ben sur x à un certain moment (19)
Alors sur x. Précisez sur x justement *[avec un geste de gauche à droite]*

Dans cet épisode, l'enseignant suscite à nouveau de la visualisation sur la colonne de droite pour relier les variations des deux variables. Un élève reprend effectivement « plus x est grand » ce qui nous confirme que le discours du professeur « plus x augmente » de l'épisode précédent est bien dans notre interprétation une proximité ascendante. Plus précisément, la notion d'augmentation des valeurs était déjà identifiée par les élèves dans le premier épisode et ici le « x » est repris par un élève. Donc ce passage au « x » peut bien être considéré comme une proximité ascendante des activités des élèves vers la connaissance nouvelle visée. En outre un autre élève a bien repris à son compte « plus la surface diminue », ce qui nous donné également un élément pour dire que x et *surface* peuvent bien s'installer à ce moment-là dans la ZPD des élèves.

Toutefois, on remarque que le « augmente » a été perdu puisque l'élève dit « plus x est grand ». Le professeur reprend à son compte dans un premier temps mais de suite fait corriger car « plus x est grand » ne sert pas son propos. Le caractère « grand » n'est pas un synonyme de « augmente ». Pour « grand », un seul « x » statique suffit, par rapport à une référence, tandis que pour traduire l'augmentation il vaut un « x » dynamique ou bien deux « x » statiques comparés via la relation d'ordre. Le professeur continue alors de développer son propos « pour certaines valeurs de x, ça augmente » et un élève continue « après ça rediminue ». L'interaction est longue et fastidieuse mais on identifie que le « x » est bien intégré dans les propos des élèves et donc, pour nous, peut relever de la ZPD des élèves. A la minute 19, c'est ainsi bien un élève qui dit « bah sur x à un certain moment… »

E. Sur x ça augmente, jusqu'à un nombre et après ça diminue

Alors on va essayer alors. Jusqu'à 190 pour x. Donc qu'est-ce qu'on pourrait dire pour x ?

E. Ca augmente jusqu'à 190 et à partir de 200 ça diminue

D'accord donc on part de 0 jusqu'à 190. Quand on prend x entre 0 à 190 on constate que la surface semble augmenter et quand on se met entre 200 et 370 la surface

E. Diminue

Diminue. D'accord donc 0 190 c'est un premier **intervalle** *[il montre le tableau déjà écrit à gauche]* (…)

On constate que sur l'intervalle 0 190, quand on prend x entre 0 et 190, on constate on a une surface qui est en augmentation et puis sur l'intervalle 200 370 **(20)** on a des surfaces qui sont en diminution. Vous voyez ça ?

La discussion se poursuit. Un élève dit « sur x ça augmente, jusqu'à un nombre et après ça diminue ». Et le professeur fait une nouvelle proximité ascendante en utilisant le mot « intervalle » en appui sur l'idée « jusqu'à un certain nombre et après ». Ce terme d'intervalle, que les élèves connaissent déjà, sera repris plus loin par les élèves. A ce moment, les élèves ont un début de formalisation de la perception dynamique et ponctuelle, on trouve presque « plus x augmente » dans les propos des élèves mais pas encore tout à fait.

Dans ces épisodes, l'enseignant provoque du « fait » ou du « dit » par des activités puis il pose des questions sur ce qui a été fait ou dit (7 fois de suite : les constats sur le tableur, les valeurs qui augmentent puis diminuent, le passage à x, les intervalles, la formulation, et une question « est-on certain ? » ci-dessous). L'établissement de la co-variation numérique est facilitée par les deux colonnes du tableur, qui amènent une perception numérique dynamique ponctuelle de la co-variation. Les élèves peuvent relier l'observation sur la première colonne à « x augmente » et la deuxième colonne à « la surface augmente sur un intervalle puis diminue sur un autre intervalle ». Sont donc en jeu des activités sur la co-variation (x, *surface*) qui embarquent toujours du dynamique et du ponctuel mais avec la formalisation algébrique x. On est donc à mi-chemin de la covariation $(x,f(x))$ et de fait encore très loin de la formalisation finale qui nécessite un point de vue statique.

Le professeur suscite alors une proximité descendante sur l'intérêt de l'algèbre dans le problème de formalisation.

Bon. Est-ce que ça veut dire que le maximum on l'a de façon certaine ici

E. Ce n'est pas précis

Ca n'est pas précis Pourquoi ?

E. inaudible

Voilà. On a un écart de 10. Est-ce qu'on pourrait avoir, est-ce qu'on pourrait arriver à l'avoir exactement ? J. parlez pour tout le monde en levant la main

E. On fait un écart de 1

Un écart de 1. Chut, Ca suffira ?

E.

En commençant éventuellement à 190 effectivement, en restreignant la zone, M.

E. On résout une inéquation

Ah On résout une inéquation. Donc est-ce que c'est le tableur qui va nous la faire ?

E. Non

Voilà Donc là qu'est-ce que vous pointez comme, comme heu, comment dire comme différences enfin comme options là ? Avec le tableur est-ce qu'on peut avoir un résultat exact ?

E. Non, approximation

On va avoir une approximation alors de plus en plus précise J. a raison parce que plus le pas va être petit (**21**) plus on va peut-être arriver à donner une valeur précise. Mais M. elle voulait résoudre une inéquation donc revenir à de l'algébrique pur. C'est ça (il montre le tableau). Voilà. **Alors effectivement, on avait vu ça que avec l'algèbre on peut peut-être essayer d'obtenir un résultat précis**.

Cet extrait illustre cette fois le fait que l'enseignant propose aussi une proximité descendante à partir de connaissances déjà là à propos de l'algèbre (qui permet d'avoir un résultat précis dans notre situation de surface agricole). Il suscite le questionnement sur la précision « de façon certaine » et ça lui permet de conclure « avec l'algèbre, on peut peut-être essayer d'obtenir un résultat précis ».

A partir du graphique

Dans une deuxième phase, en projetant cette fois le graphique proposé par GéoGébra, le professeur organise le même style de discussion avec des proximités du même type. Nous donnons maintenant quelques extraits discontinus à titre d'illustration :

À votre avis qu'est-ce qu'on peut choisir comme mot pour dire que la courbe monte ou que la fonction prend des *[gestes vers le haut]* valeurs qui augmentent. Alors on a été cherché un **synonyme d'augmenter**

E : ascendant

un autre E : croissant

Croissant

(…), donc là vous pouvez noter **qu'on est encore dans l'exploitation de l'exemple des surfaces agricoles** (…)

(…)

E : Ah ben intervalle 0, 187,5

Voilà si on fait confiance à GéoGébra pour l'instant on n'a pas… *[il écrit et dit]* on va dire que sur l'intervalle [0, 187,5] la fonction *f* est, alors on va mettre en rouge, donc le mot hein **le mot qu'on a choisi**, on aurait pu en prendre d'autres, c'est croissante *[écrit en rouge]*. Bon alors après (…)

Le professeur pose d'abord la question sur le « synonyme d'augmenter » pour provoquer la proximité ascendante avec le mot croissant. Cela fonctionne puisque le mot « croissant » est bien en appui sur les élèves. Une proximité descendante est proposée aussitôt pour ramener le « croissant » dans le contexte de la surface agricole. Le professeur instaure donc la connaissance nouvelle en appui sur les activités des élèves. Le mot « intervalle » est retrouvé dans les propos d'un élève et donc qu'il y a bien une proximité ascendante à nouveau quand le professeur dit « sur l'intervalle [0, 187,5] la fonction *f* est croissante ». De façon parallèle, le professeur accompagne la caractérisation FUG de la définition qu'il cherche à installer par du discours méta mathématique « c'est le mot qu'on a choisi ».

(…) le tableur par exemple, **dans le tableur on a vu que les valeurs augmentaient (32) et ça correspond à une courbe qui monte sur le graphique**. Ca c'est des choses aussi qu'il faut retenir. Ca c'est le mot précis et derrière ce mot c'est bien d'avoir des références. Donc dans le tableur les valeurs augmentent, sur la sur le dessin la courbe monte. Et la fonction on ne dira pas qu'elle augmente ou qu'elle monte, on dira qu'elle est croissante. Ca c'est le mot précis.

Dans cet autre extrait, il y a une proximité horizontale entre ce qui a été établi plus haut sur le tableur et ce qui est en jeu maintenant sur le graphique. Le processus est toujours très long. Nous sommes la minute (32) de la transcription et il y a eu jusque-là un jeu complexe de proximités horizontales, ascendantes, descendantes. Les activités des élèves, associées à ces proximités, embarquent toujours uniquement du dynamique – numérique et graphique - et rien de statique, qui préparerait la définition formalisée. Elle mettent toutefois en jeu la dialectique ponctuel-global, en appui sur le tableur qui met l'accent sur le ponctuel puis sur le graphique qui met l'accent sur le global et l'intervalle.

On n'a cependant toujours pas $f(x)$ même s'il est là en germe car les activités des élèves sont inscrites le cadre fonctionnel grâce à la tâche d'introduction et son exploitation. Le vocabulaire et du méta pour justifier l'aspect FUG(O) sont présents, notamment « on décrit les phénomènes par des mots, des mots précis », de l'ordre de l'importance de la formalisation en fait.

L'apparition de la définition formalisée

On en vient à une troisième phase qui prépare la définition formalisée plus directement.

(**34**) Alors maintenant on n'a pas répondu à sa question : comment ça se traduit ça. **Ca se visualise en courbe qui monte ou qui descend ou bien en tableau où des valeurs augmentent ou des valeurs diminuent**. Maintenant il faudrait qu'on soit capable de dire ça en termes algébriques…

(…) [il montre le mot « croissant » sur le tableau]

E. … inférieur

Mais cette phrase-là **vous êtes d'accord qu'elle n'est pas très opérationnelle en termes de calcul**. C'est du constat, c'est une observation. On utilise le signe comme ça (<) c'est ça ? **(36)**

(…)

(**39)** Dans une fonction, il y a x et il y a y, il y a x et il y a $f(x)$. Oui alors, mais là j'essaie de voir quelque chose qui serait général, c'est-à-dire sur cet exemple de donner une définition de fonction croissante qui soit une définition générale.

E… sur l'intervalle 0, 187,5 plus x augmente plus y augmente aussi

Alors plus x augmente plus y augmente. Est-ce que ça ça vous parait une bonne description ? Voilà. Alors ça c'est nouveau plus x augmente plus y augmente. Ca est-ce qu'on peut mettre ça en algèbre ? C'est-à-dire écrire ça avec des symboles. Peut-être ce symbole-là *[il montre <]* il peut être utile

L'enseignant propose d'abord une proximité horizontale pour relier les deux registres en jeu associé aux deux perspectives en jeu « On visualise en courbe qui monte ou qui descend (global dynamique), ou bien en tableau où des valeurs augmentent ou des valeurs diminuent » (ponctuel dynamique). Le professeur montre le mot « croissant » sur le tableau. C'est à nouveau une façon de relancer et provoquer de l'activité chez les élèves, en l'occurrence de l'activité sur le changement de registre. De fait, l'un des élèves propose « inférieur », ce qui permet à nouveau au professeur de faire une proximité ascendante appuyée sur « inférieur ».

Il est plus incertain de dire si « $f(x)$ » dans « il y a $f(x)$ » arrive dans une proximité parce même s'il a été rencontré dans la première phase avec la colonne du tableur, il n'est toujours pas repris par l'élève à ce moment-là. Ce qui est repris par un élève, c'est « sur l'intervalle 0, 187,5 plus x augmente, plus y augmente aussi ». C'est toutefois déjà un bon appui pour la formalisation. On observe que le professeur reprend la formulation avec le « y » de l'élève et non pas le « $f(x)$ ». Il juge peut-être que c'est encore trop tôt. C'est d'ailleurs là que les élèves décrochent et que le discours ne sera plus en proximité comme l'illustre les passages suivants dans lesquels les élèves ont disparu de l'interaction.

> […] **(41)** Ca *x* augmente, ça veut dire quoi ? **Ca veut dire que *x* est de plus en plus grand ? *[ponctuel dynamique]*… Ça veut dire que quand *x* est de plus en plus grand, en même temps *f*(*x*) aussi *[covariation (x,f(x))]*.** Alors le problème c'est que c'est ça qui est compliqué. Cet x augmente de plus en plus. Comment est-ce qu'on peut traduire ça avec ce symbole là *[montre <]* ? Pour dire que *x* est de plus en plus grand ? Ce symbole là il dit bien plus grand que. Donc entre de plus en plus grand et plus grand que on a l'impression que c'est quand même connecté. Oui (42) ?
>
> (…)
>
> **(45)** Qu'est-ce que ça veut dire x augmente ? Ça veut dire quand je prends **des valeurs de x de plus en plus grandes *[ponctuel dynamique]***, des valeurs de *x* de plus en plus grandes. Là il y a combien de valeurs de x au tableau ? E.
>
> Ben là on a écrit un x – si je dis je prends des valeurs de x de plus en plus grandes, il faut que j'en prenne au moins ***[montre deux doigts] [vers le statique ponctuel]***
>
> E. deux
>
> Deux, **sachant qu'il y en a une qui sera plus petite que l'autre *[statique ponctuel ordonné]*.** Alors deux valeurs de *x* sachant qu'il y en a une qui est plus petite que l'autre comment ça va s'écrire ? Déjà deux valeurs de *x*, comment on les écrit deux valeurs de *x* : si j'ai deux valeurs de *x* différentes, si j'écris ça *x x* est-ce que c'est deux valeurs de *x* différentes ?

Le discours se fait beaucoup plus sans réel appui sur les élèves, ni en amont, ni en aval. Il semble que l'enseignant a été au bout des proximités possibles. Il introduit l'aspect covariation x - $f(x)$ à une dimension mais surtout le passage du ponctuel dynamique au ponctuel statique, puis encore au ponctuel statique ordonné.

Un élève réapparait dans l'interaction et dit « deux » quand le professeur montre deux doigts. A partir de là, on va retrouver des proximités ascendantes, c'est-à-dire des appuis sur les élèves pour continuer la formalisation. En effet, tout le matériel est présent (mais est-ce bien dans la ZPD des élèves étant donné le passage sans proximités ?), deux valeurs de x dans un intervalle, le signe < pour les ordonner, les $f(x)$ qui leur correspondent qui sont ordonnés aussi. Reste la quantification universelle à nouveau problématique (deuxième astuce), ci-dessous.

> (…)
>
> Est-ce que ce que j'ai fait là, évidemment c'est des exemples, **est-ce que c'est valable quels que soient *[vers la quantification]* les nombres *x*1 *x*2 que je prends dans l'intervalle** à condition que *x*1 soit plus petit que *x*2 ? **(50)** Est-ce que si je prends n'importe quel *x*1 plus petit que n'importe quel *x*2 dans cet intervalle, j'aurais à chaque fois *f*(*x*1) plus petit que *f*(*x*2)
>
> E. oui, ben oui, ben oui
>
> Donc ça pourrait être une bonne façon de traduire que **la courbe monte** par exemple et **c'est généralisable à n'importe quelle fonction *[méta sur l'aspect G]*. Autrement dit une fonction est croissante sur un intervalle si quelque que soient les réels *x*1 *x*2 qu'on prend dans l'intervalle, à partir du moment où *x*1 est plus petit que *x*2, *f*(*x*1) est plus petit que *f*(*x*2)**

On est à la minute 48. Le professeur occasionne une proximité descendante même si la formalisation est encore incomplète, par laquelle le professeur rapproche ce qu'il vient d'établir de « la courbe monte ». On trouve enfin la quantification qui reste un nouveau coup de force sans appui sur les élèves - comme on s'y attendait vu le relief - car c'est le deuxième éclat de génie du mathématicien pour retrouver du global par la quantification universelle, qui est trop difficile pour pouvoir venir des élèves et s'y appuyer.

Au final, le professeur introduit l'étude de la variation d'une grandeur (la surface d'un champ) en fonction d'une autre (la longueur du côté), liée à une figure géométrique (rectangle modélisant le champ). Il s'agit de chercher si toutes les surfaces sont égales puis s'il y a un maximum. La modélisation algébrique est laissée aux élèves, même si elle est aidée par le professeur – d'où l'introduction dans leur activité mathématique d'une fonction du second degré explicite, qui va permettre une amorce algébrique. Mais, dans la première séance en demi-groupe, les élèves ne vont pas au bout de l'activité en ce qui concerne les variations, même pas évoquées dans la tâche d'introduction. Dans la deuxième séance, l'activité des élèves les conduit grâce aux questions de l'enseignant à une étude numérique puis graphique – avec alors une inévitable approximation des intervalles en jeu qui peut motiver l'introduction de l'algébrique, même si l'étude ne peut être menée jusqu'au bout. Cette reconnaissance de l'approximation, explicitée, joue comme un prétexte pour faire réfléchir les élèves à une formulation algébrique « exacte ». L'autre prétexte avancé est de s'affranchir de la courbe ou des valeurs pour une étude « intrinsèque » algébrique (*cf.* une élève qui a parlé d'inéquation). Mais les élèves n'arrivent pas jusqu'au bout… malgré les efforts du professeur qui ne se prive pas de nombreuses proximités ascendantes, descendantes et horizontales ! Il tente de faire « sortir » la définition mais en vain. Mais dès que la piste de comparer deux valeurs de x est donnée (il lève deux doigts), c'est repris efficacement par les élèves et l'enseignant conclut en ajoutant « pour tout couple » et en s'appuyant sur la courbe pour « vérifier ».

Le deuxième exemple : un scénario proche à partir d'une activité d'introduction du premier type (ballon sonde) (Chappet-Paries & al. 2017)

L'analyse a priori de l'énoncé

Figure 2 : énoncé du manuel sur lequel les élèves ont travaillé

Dans cette deuxième activité d'introduction, il s'agit de décrire qualitativement l'évolution de deux grandeurs à partir de deux courbes, données, représentant l'altitude et la température d'un ballon sonde lancé, qui finit par exploser. En fait, nous remarquons qu'il n'est pas indiqué dans le manuel que les courbes représentatives sont associées à des fonctions, d'ailleurs le mot n'apparait pas non plus dans l'énoncé. Il y a là une occasion de proximité laissée aux enseignants et des élèves peuvent ne pas être d'amblée dans des activités relevant du cadre fonctionnel.

Dans la première question, il s'agit d'identifier celle des deux courbes qui représente l'altitude (en déduisant que l'autre est la température). Il faut associer une description en français et une courbe. Cela fait appel à des connaissances anciennes supposées disponibles. Dans la deuxième question a), qui fait intervenir le temps comme variable mais de manière vague (au cours du temps), on demande de décrire les variations de l'altitude : cela demande une lecture globale, sur un intervalle, et il n'est pas nécessaire d'associer augmentation du temps et de l'altitude… Il suffit de considérer la courbe (qui monte) sans s'intéresser explicitement aux valeurs des images pour répondre, et encore moins à la simultanéité de l'augmentation du temps et des valeurs des images. La deuxième partie de la question fait réviser le repérage des coordonnées d'un point de la courbe, facilement identifiable grâce aux connaissances antérieures. Pour la température, on demande sur quelles plages horaires la température est croissante (en anticipant l'usage mathématique par un usage courant) : là encore ce qui est activé met en jeu un intervalle (et une vision graphique globale) et non une mise en relation des augmentations du temps et de la température.

Qu'est-ce qu'il y a à généraliser, quel rapport possible avec l'exercice préparatoire ?

A priori il s'agit - au vu du programme de la classe - de donner une (plusieurs ?) définition de fonction croissante valable pour toutes les fonctions. On pourrait décider d'en rester à une définition généralisant ce qui avait été utilisé dans l'exercice dans un cas particulier : une fonction est croissante quand sa courbe monte… Cela resterait global, dynamique, graphique et visuel (donc pas complètement certain, vu ce qu'on apprend aux élèves sur la non-exactitude de ce qui est seulement vu), peu opératoire et partiel. Comment définir alors par exemple la croissance d'une fonction, définie algébriquement par une formule compliquée, dont on n'a pas la courbe ? Cela, qui pourrait faire l'objet d'une proximité horizontale générale, sera-t-il évoqué dans le cours ?

On pourrait s'appuyer sur l'exercice préparatoire, pour introduire le point de vue algébrique (nouveau), et, plus précisément, sur l'étude de la manière dont les ordonnées des points de la courbe (l'altitude, la température) varient quand leurs abscisses (le temps) augmentent. S'introduirait ainsi un double changement de point de vue, faisant passer d'un sous-ensemble de points de la courbe, associés à une portion de courbe qui monte, à l'étude des variations de leurs coordonnées (x, y), considérées séparément, associées à chaque point. La connaissance de l'écriture des coordonnées d'un point d'une courbe représentant une fonction f comme $(x, f(x))$ a été introduite en troisième mais reste plus mobilisable que disponible, même si de nombreux exercices sur images et antécédents sont travaillés. Elle peut être rappelée à cette occasion, donnant lieu à une proximité horizontale locale, donnant lieu à l'interprétation de la courbe comme représentative d'une fonction f. S'appuyant sur le constat visuel que, dans le cas où la courbe monte, les ordonnées augmentent quand les abscisses augmentent, on pourrait demander aux élèves de caractériser, sans faire intervenir de lecture sur la courbe, une fonction dont la courbe monte, en traduisant ce qui vient d'être constaté, dans ce cas ou plus généralement. Il s'agit d'écrire (de commencer à écrire) que pour tous (a, b) de l'intervalle, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

La formule visée aurait alors une origine dans l'exercice et un intérêt, et on peut même justifier le quantificateur à introduire, en donnant des contre-exemples (graphiques) s'il est omis.

Le déroulement

L'enseignant a fait faire aux élèves l'exercice préparatoire ci-dessus. Nous nous intéressons à l'extrait du cours, filmé, au début de la séance suivant le travail sur cet exercice préparatoire, où l'enseignant introduit la notion de fonction croissante sur un intervalle (nous ne répéterons pas à chaque fois « sur un intervalle »). Nous ne donnons ici pour des questions de place que des extraits du discours de l'enseignant. Quelques commentaires immédiats sont entre crochets en italique au sein même des extraits.

Juste un rappel avant qu'on parle des généralités. Rappel sur ce qu'on a vu la semaine dernière. On a étudié le cas du ballon sonde pour lequel on s'intéressait à deux quantités l'altitude et la température.

Donc on avait étudié deux fonctions du point de vue graphique. *[appui sur l'activité a maxima ; est ce que le rapprochement avec les fonctions a été repris a minima par le discours du professeur ?]*

Donc une fonction qui représentait l'altitude et une fonction qui représentait la température. *[Pas de référence à la variable indépendante, temps, cela ne peut pas provoquer des activités élèves sur la covariation]*

Donc ce qu'on voulait décrire qualitativement, l'évolution de ces deux phénomènes. On avait introduit les notions de fonction croissante et de fonction décroissante. Donc c'est ce qu'on va généraliser aujourd'hui. *[On ne sait pas si ce qui a été introduit a trait uniquement aux quantités croissantes ou décroissantes, explicitement ou non « au cours du temps », ou vraiment aux fonctions – risque de saut…]* […].

L'enseignant montre d'abord les courbes de l'exercice (sur le manuel, projeté au tableau) et rappelle qu'on avait introduit les mots fonctions croissante et décroissante pour qualifier les variations de l'altitude ou de la température correspondant à des portions de courbes qui montent ou qui descendent. Il annonce, à la fin du rappel, que c'est ce qui va être généralisé, ou mis en place. On peut remarquer que la variable temps n'est pas citée par l'enseignant dans son rappel. On ne peut pas savoir si le lien courbe/fonction a été fait, il n'est pas rappelé ici. Les activités des élèves peuvent a minima ne pas concerner le cadre fonctionnel même si le mot fonction est dans le discours du professeur.

Alors ce que je vais faire aujourd'hui, je vous projette le contenu du cours identique à ce que vous avez dans les manuels donc il n'y a pas besoin de recopier sauf quelques exemples supplémentaires […]

Donc premier mot important, c'est la notion de fonction croissante.

[...]

Donc premier cas de figure, j'étudie la fonction sur un intervalle, d'accord, donc un certain ensemble des valeurs de x, on va dire qu'elle est croissante, strictement croissante, si lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ c'est-à-dire des images augmentent également. Ça c'est ce qu'on appelle une fonction croissante *[l'enseignant va directement au ponctuel, dynamique, en une seule dimension – Il n'y a pas de rapport direct avec l'activité qui est globale graphique ! Il n'y a a priori pas de proximité ascendante sauf si le prof l'avait bien préparé pendant la situation d'introduction]*

En fait l'enseignant donne d'abord une caractéristique numérique. Autrement dit il ne s'appuie pas directement sur, pas plus qu'il ne généralise, le travail fait dans l'exercice et rappelé au début : il n'est pas question de courbe, et la propriété choisie comme définition, sans le dire explicitement cependant, n'a pas été nécessaire pour répondre aux questions ! La proximité ascendante potentielle correspondante (voir le relief), mettant en regard croissance de l'altitude et augmentation du temps, n'est donc pas activée. On peut se demander si elle n'est pas
« manquante » ou si l'ordre choisi est le plus proche de ce que les élèves ont fait et sont prêts à généraliser.

Graphiquement ça se traduit par quoi ? Ça se traduit par le fait que la courbe est en train de monter *[gestes du bras qui monte]* Comme notre ballon sonde de la dernière fois, au début l'altitude augmente d'accord. Simplement au niveau du vocabulaire mathématique, on ne va pas dire la fonction augmente, on dira qu'elle est strictement croissante. OK. *[C'est donc une tentative de proximité descendante mais sans aller jusqu'au bout de la mise en relation entre la caractérisation ponctuelle dynamique donnée ET le fait que « le ballon monte » (ou « l'altitude augmente ») qui est global graphique dans la tête des élèves. Une référence à la variable de temps serait nécessaire dans le discours pour faire ce lien].*

L'enseignant ajoute donc immédiatement que « graphiquement ça se traduit par « la courbe est en train de monter ». Là l'enseignant active une proximité ascendante, avec des gestes (mais qui suivent la courbe, pas les coordonnées). Cependant l'association précise courbe/fonction n'est toujours pas rappelée, ce qui rend peut-être difficile le lien à la fois avec ce qui précède (aspect numérique) et avec la formule algébrique qui va être donnée ensuite. Si l'ordre des deux premières définitions du cours avait été inversé, il y aurait eu une occasion de proximité ascendante, entre « la courbe monte » et « quand x augmente, $f(x)$ aussi », s'appuyant sur le rappel des coordonnées des points de la courbe et la lecture « séparée » mais simultanée de leurs variations sur chaque axe. L'enseignant précise ensuite, uniquement graphiquement, la différence entre strictement croissante et croissante (avec ou sans plateau sur la courbe, avec ou sans intervalle où la fonction est constante).

Donc premier cas de figure, je répète, fonction strictement croissante ça veut dire quand x augmente les valeurs des images augmentent, ça signifie aussi, je l'écris là au tableau, si a plus petit que b, vous prenez deux nombres dans un certain ordre, alors $f(a)$ est plus petit que $f(b)$

[il écrit si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$]

[Il n'y a pas de proximité non plus entre la caractérisation ponctuelle dynamique et la nouvelle caractérisation formalisée ponctuelle et statique. Cette dernière n'est pas du tout préparé par l'activité sur le ballon sonde, pas préparée non plus dans le discours « plus x augmente… », il n'y a pas de support graphique pour faire une proximité descendante (Et il manque la quantification, seul le manuel donne la définition complète avec un graphique)]

L'enseignant reprend en fait la première « définition » qu'il a donnée : « quand x augmente les valeurs des images augmentent » et sans transition « si $a < b$ [vous prenez deux nombres dans un certain ordre] alors $f(a) \leq f(b)$». Ce passage du dynamique au statique n'est pas du tout facile, comme on l'a signalé au niveau du relief. Autant, là encore, le passage par la courbe rendrait visible cette interprétation (les coordonnées de deux points de la courbe sont d'ailleurs visibles dans le manuel) autant le rapprochement « hors courbe » fait ici nous semble difficile : on particularise deux valeurs, génériques, et on traduit les augmentations globales simultanées de x et $f(x)$ par une conservation de l'ordre des deux images correspondantes.

L'enseignant fait référence au manuel mais ne le recopie pas intégralement. Il manque la quantification. C'est seulement dans leur manuel – qui est affiché au tableau pendant tout le cours –, que les élèves peuvent voir la formule correcte, générale, (pour tous (a, b), si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$). L'enseignant n'en parle pas… Sans la quantification, l'aspect global est gommé. Par contre l'enseignant complète : « ça veut dire que l'ordre des images est le même que l'ordre des antécédents », formule lapidaire, surement inutile à ce moment-là et qui demanderait, elle aussi, beaucoup d'autres explications.

Alors un élève demande à ce moment-là, comme par hasard, en parlant de la formule si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$: « et ça on l'aura au contrôle ? ». Cette question nous semble peut-être en rapport avec le fait que cette inégalité n'a pas du tout été mise en lien avec ce qui précède, rapprochée de ce que les élèves ont déjà pu comprendre ou faire et qu'elle leur apparait difficile…

Quoi qu'il en soit, l'enseignant reprend « je répète, croissante quand x augmente, les valeurs de $f(x)$ augmentent, l'ordre est conservé, la courbe monte ». Et tout ça, ça veut dire la fonction est strictement croissante… Il n'y a aucune distinction entre les différentes façons d'exprimer la croissance, ni aucune proximité avec ce qui sera opératoire pour les exercices…

Puis il aborde la décroissance et, plus généralement, le sens de variation des fonctions. Cela l'amènera à reprendre la notion de croissance et à répondre à des questions d'élèves…

L'enseignant choisit donc une situation d'introduction difficile à exploiter pour introduire la dernière partie de ce qui est en jeu - *Mais on n'a pas eu accès à cette séance*. Il ne questionne pas les élèves, sauf pour des interventions spontanées évidentes pour les élèves. Il y a un appui sur le manuel projeté en permanence mais l'activité de lecture associée des élèves ne peut à elle seule se substituer à l'activité de recherche sur l'exercice introductif. Même si l'enseignant a annoncé qu'il va généraliser ce qui a été fait pendant l'activité sur le ballon sonde, il n'y a pas d'appui explicite dessus mais plutôt une illustration a posteriori. On trouve plutôt une proximité descendante implicite après l'énoncé de la définition dynamique « quand les valeurs de x augmentent, les valeurs $f(x)$ augmentent ».

Autrement dit, dans l'activité des élèves, ce qui est en jeu c'est l'interprétation du fait qu'une certaine courbe monte (global), avec une prise en compte seulement des images de la fonction représentée – le temps, en abscisse n'étant jamais mentionné (première variable « transparente »). Du coup la traduction algébrique n'est pas préparée par l'activité introductrice (elle permettrait cependant de l'illustrer après coup). On peut parler de tension cognitive qui reste (à l'opposé de la notion de proximité), entre l'activité possible des élèves - globale, graphique - et la nouvelle connaissance visée – ponctuelle universelle, statique - tension très difficile à « combler » via des proximités cognitives discursives. Autrement dit, dans le cours, le lien entre l'activité qui a été développée par les élèves – même a maxima - et la définition visée n'est pas beaucoup fait, sans que soit signalé non plus ce qu'on gagne avec la traduction algébrique formalisée de la co-variation des deux variables en jeu x et $f(x)$, *ie* l'aspect FUG(O) mis en évidence dans le relief.

Conclusion

Dans notre approche théorique, l'activité des élèves est étudiée en classe ordinaire, en relation étroite avec les pratiques du professeur, indissociables. Nous avons fait le choix pour cette communication de développer la notion de « proximités discursives », adaptée à rendre compte des liens que l'enseignant développe avec « ce qui vient des élèves » pendant les moments d'exposition de connaissances. L'efficacité de ces moments dépendrait ainsi, au moins en partie, des occasions et de la qualité des proximités discursives, sous forme d'échanges avec les élèves et entre eux, au sein de reprises, d'explications ou explicitations. Sont en jeu les relations avec les activités possibles - voire effectives - des élèves, en amont ou en aval, et leurs connaissances déjà-là liées à des activités préalables, sur une tâche d'introduction par exemple.

Les activités des élèves dépendent ainsi beaucoup de ce qu'organise et dit l'enseignant. Nous n'avons pas développé l'analyse des séances sur les activités introductives « surface agricole » et « ballon sonde » (en demi-groupe pour la première) mais en revanche nous disposons des vidéos des deux cours qui suivent, ce qui nous a permis de vérifier des différences effectivement liées à ces activités d'introduction. En particulier le choix des activités introductives amène à plus ou moins de « préparation » du contenu nouveau (et notamment de possibilités d'appui) mais si l'enseignant développe ces leviers/appuis à fond c'est LONG.

Pour apprécier les apprentissages, c'est cependant un ensemble d'activités (réalisées), prévues dans un scénario, qui est en jeu : c'est ce qui peut impliquer globalement une conceptualisation des élèves. Cela comprend notamment une diversité organisée des tâches à prévoir, dont le suivi du cours, la donnée des liens entre cours et exercices, avec éventuellement une activité d'introduction, des évaluations adaptées (formatives et sommatives). Pour que les activités proposées, dont le suivi du cours, rapprochent les élèves des connaissances visées, on conçoit ainsi que plusieurs conditions sont en jeu. Du côté du scénario, potentiellement, cela met en jeu les conséquences de ce qui a été établi par l'étude du relief, mais pas seulement ; cela met aussi en jeu les contraintes, y compris les conceptions individuelles en présence et les classes. Du côté des déroulements, cela met en jeu la nature du travail organisé (durée, forme – individuel ou non, instrumenté…) et les accompagnements de l'enseignant. C'est ce cadre qui nous permet de poser les questions de marges de manœuvre et d'alternatives pour l'enseignant.

Dans ces accompagnements, nous avons étudié en particulier ce qui dans le discours de l'enseignant, voire de certains élèves, est susceptible de rapprocher les élèves des connaissances visées : que ce soit en termes d'activités ou de cours. En fait c'est le modèle que nous avons adopté de la ZPD qui légitime cette étude. Nous avons donné deux exemples où on voit des différences importantes entre deux cours d'introduction sur le même contenu, appuyés sur deux activités d'introduction différentes. Cela ne préjuge pas des apprentissages mais cela met en évidence des marges de manœuvres importantes.

Il y a ainsi une palette de possibles dans les appuis : à partir d'activités d'introduction comme dans nos deux exemples, mais aussi d'exemples, ou même d'activités pendant le cours. Pour un exemple, on peut le faire traiter avant, pendant ou après le cours (source ou illustration), et ça introduit différents types d'appui, du contextualisé (activités) au général – peut être préparé par des questions, du général au contextualisé, ou encore sans changement de niveau, par exemple explicitation des changements de point de vue ou de registres. Cela correspond à nos proximités ascendantes, descendantes et horizontales.

L'exposition des connaissances sur une notion FUG

Ce qui est spécifique dans cette communication c'est aussi que notre choix de séances met en jeu l'exposition d'un contenu qui présentent un fort caractère FUG. Dans ce cas, le premier exemple de séance « surface agricole » permet de montrer qu'un déroulement truffé de proximités, en tous genre, semble faciliter effectivement le suivi des élèves (un certain nombre en tous cas) ainsi qu'un début de prise de sens, comme en témoignent les réponses des élèves aux questions de l'enseignant et leurs interventions spontanées. Mais cela dévoile aussi les limites de ces proximités lorsque le contenu visé est trop loin de ce que savent les élèves : l'exemple montre que, comme prévu dans le relief sur l'enseignement de la notion visée, c'est un cas où seul l'enseignant peut donner *in fine* la formalisation attendue, quitte d'ailleurs à multiplier ensuite des proximités descendantes et horizontales. On comprend à la lueur de ce premier exemple les difficultés que peuvent éprouver les élèves dans le deuxième exemple « ballon sonde ». Rien d'algébrique n'y est préparé, il n'y a non seulement pas de proximité possible avec la définition formalisée de croissante, mais aussi peu de proximités possibles avec les formulations intermédiaires. Le passage au formalisme n'est pas du tout justifié, simplement ajouté.

Nous pensons cependant que, quel que soit le problème d'introduction choisi, on ne peut pas faire de proximités ascendantes « jusqu'au bout », jusqu'à faire trouver aux élèves la formalisation algébrique : à un moment donné c'est l'enseignant qui doit faire franchir un saut, donner lui-même la traduction algébrique. Celle-ci n'est pas dans la continuité de ce que les élèves peuvent trouver, même avec l'aide du professeur. Il s'agit de préparer le plus possible le passage – ici en ayant fait expliciter les aspects graphiques et numériques, intuitifs, perceptifs, dynamiques, de la croissance et en ayant posé le problème du formalisme algébrique pour se débarrasser des approximations : « sans avoir besoin de la courbe ou des valeurs ». Les élèves peuvent ainsi entendre que les autres approches restent imprécises, presque toujours approchées mais proches des valeurs exactes, au moins pour éprouver un besoin d'associer un intervalle précis à chaque sens de variation. Ils peuvent concevoir aussi qu'on pourrait disposer d'un moyen ne nécessitant pas de dessiner ou de calculer. Mais cela ne les met pas du tout sur la voie de la formalisation à imaginer, à partir des expressions algébriques : il y a un « saut ». De plus, on ne fait pas vérifier sur la formule de la surface que ce qu'on « voit » sur le graphe ou le tableur est bien la même chose que ce qu'on déduit de la formulation algébrique. Une difficulté « cognitive » est que « l'intuition » s'avère valide mais insuffisante pour aller plus loin. Il n'y a donc pas vraiment besoin du détour algébrique, sauf cependant à exhiber des cas où on se trompe en regardant la courbe. Il en existe mais alors, les connaissances algébriques des élèves étant moindres qu'avant, il est nécessaire de beaucoup guider les calculs pour les convaincre, ce qui affaiblit l'argument. On met les élèves face à un problème formel qu'ils n'ont pas les moyens de résoudre.

Une fois la définition donnée[12], pour suivre la démarche que nous défendons pour l'enseignement de FUG, il s'agit de la commenter, de la faire utiliser (y compris sur l'exemple de l'activité d'introduction ou d'autres exemples donnés avant), d'expliciter comment les mathématiciens ont franchi l'obstacle en trouvant un formalisme adéquat (*cf.* ci-dessus). Dans le cas de la croissance sur un intervalle, pour être sûr de ce qu'on voit et pour pouvoir le démontrer, y compris sans courbe ou valeurs, il faut traduire, autrement que graphiquement ou numériquement, l'augmentation des $f(x)$ quand x augmente. Cette traduction est algébrique. L'idée est de remplacer la perception d'une augmentation simultanée de x et f, intuitive mais intraduisible telle quelle sur les formules, par la comparaison de toutes les valeurs de $f(x)$ deux à deux, pour tous les couples ordonnés de valeurs de x, en vérifiant que c'est le même ordre pour f et pour x… Sauf que vu l'impossibilité de le faire pour tous les couples, on le fait en prenant deux valeurs quelconques de x, faisant preuve pour toutes, si possible. La validité de ce passage d'un « x quelconque » au « quel que soit x » dont on a besoin n'est pas évidente à ce niveau, même si les élèves ont déjà rencontré dans des cas plus simples cette propriété cruciale, véritable apanage du calcul algébrique. On conçoit toutes les proximités descendantes envisageables !

Enfin, la difficulté de cet enseignement est souvent accrue par le fait qu'une fois cette définition donnée, on s'en sert peu, nous l'avons déjà signalé. Peu d'occasions de proximités descendantes dans des exercices donc ! Faut-il pour autant s'en passer, vu le temps que demande le cours correspondant, pour peu d'effets évaluables sur des exercices ? Il n'y a pas beaucoup d'exercices à traiter directement avec les définitions, ils sont difficiles algébriquement et en première on disposera des dérivées.

Notre perspective est ici le moyen terme, la construction chez les élèves de représentations « authentiques » des mathématiques, avec leur complexité. En particulier la conceptualisation de la notion de fonction est longue, elle demande de coordonner « intimement » plusieurs registres, plusieurs aspects (dynamique-statique ; ponctuel-global notamment), dont certains ne vont pas de soi – ayant d'ailleurs demandé souvent un long temps aux mathématiciens eux-mêmes. Le sens de variation en fait partie, et c'est à ce titre que son enseignement « complet » pourrait se justifier à ce niveau, notamment en termes de familiarisation avec l'usage du formalisme algébrique.

Retour aux ZPD des élèves

On peut soupçonner qu'il y a deux manières pour l'enseignant (consciemment ou non) de « placer » utilement son discours dans les ZPD[13]. Une première façon consiste à tirer « vers la généralité » à partir des activités ou connaissances : dans ce cas il est important que les élèves réalisent qu'il s'agit de la même chose, prennent conscience de la généralisation, grâce à la

[12] On pourrait évoquer la donnée d'un pseudo-concept, encore peu « rempli » de sens, à faire travailler pour le transformer en concept.

[13] Dans tout ce paragraphe ce mot est utilisé ici à la place de la périphrase « visant des connaissances proches de celles des élèves ».

proximité ascendante, explicitée avec du déjà-là en contexte ; l'enseignant les tire vers de l'inconnu, ce qu'ils ne feraient pas seuls ; ce serait plutôt le sens des nouvelles notions qui serait en jeu, voire leur caractère objet ou au moins la formulation de celui-ci. Une deuxième façon, peut-être plus spontanée, est « de faire descendre » du général vers des applications contextualisées : dans ce cas il est important que les élèves reconnaissent la contextualisation, grâce à la proximité descendante explicitée avec (une partie du) déjà-là général. On pousse les élèves à adapter ce qui est nouveau à un contexte connu, le problème n'est pas lié à l'établissement du nouveau mais seulement à « se retrousser les manches » pour l'adapter. Ce seraient plutôt les techniques qui seraient en jeu, participant aux caractères outils.

On peut aussi remarquer que souvent l'appui de l'enseignant lui est fourni par un seul élève, pas le même selon les moments. On a pu identifier dans le premier exemple – celui où il y a des interactions – au moins 4 ou 5 prénoms différents. Il semble cependant qu'il y ait un élève qui soit particulièrement sollicité quand c'est difficile. On peut alors penser que pour l'élève dont la réponse est reprise, ou qui est questionné, il y a vraiment écho et potentiellement travail dans sa ZPD. Mais pour les autres ? Il y a un problème théorique indéniable ici : tout se passe comme si l'enseignant travaillait sur une ZPD « moyenne », qui n'est éventuellement pas partagée par tous les élèves, et escomptait quand même une certaine diffusion parmi les élèves des bénéfices de ce travail.

On ne peut ainsi pas affirmer que tel ou tel rapprochement est entendu par des (les) élèves ni qu'il contribue à une acquisition. Cela peut être très différent selon les élèves, comme on l'a déjà souligné pour les aides dans Robert & al. (2012). Une grande prudence s'impose…

En fait, en réfléchissant à cette diversité, on peut encore introduire une autre distinction, mis à part les aspects internes et externes dont parle Vygotski, qui décrivent la nécessité d'une internalisation par les élèves d'éléments proches travaillés d'abord avec autrui. Il y a ainsi peut-être deux autres aspects un peu différents à considérer quand on réfléchit à des processus cognitifs relevant d'un travail dans la ZPD. Il y a d'une part l'existence même chez un élève de connaissances « proches » des connaissances visées, à acquérir, et il y a d'autre part le travail que l'enseignant partage avec l'élève, avec ou sur ces connaissances proches, pour le faire avancer vers du nouveau. Les deux seraient en relation mais pas réductibles l'un à l'autre. Dans quelle mesure y a-t-il chez un élève des éléments de connaissance acquis ou en voie d'acquisition, jouant le rôle de connaissances proche, servant de point d'appui à un travail avec l'enseignant vers la connaissance nouvelle visée ?

C'est une manière schématique de dire les choses – le mot connaissance est ici à prendre dans un sens large, comme nous l'avons rappelé au début du texte. Prenons un exemple fictif. On peut se demander si, pour un élève, avoir réalisé numériquement ce que représente un maximum pour une fonction (ses valeurs augmentent puis diminuent) peut toujours donner lieu à l'entrée dans un questionnement algébrique suscité par l'enseignant sur la propriété correspondante de la fonction. Il se pourrait qu'un élève n'étende pas au cadre fonctionnel, même aidé par l'enseignant, la connaissance numérique qu'il a comprise, auquel cas la proximité supposée par l'enseignant ne jouerait pas son rôle de point d'appui. On peut imaginer qu'un intermédiaire soit nécessaire, explicitant davantage le lien entre le cadre numérique et le cadre fonctionnel par exemple.

Est-ce que ce sont les proximités horizontales et descendantes qui contribuent à « alimenter », voire « créer » si ça ne vient pas des élèves eux-mêmes, ce qui peut devenir, chez certains élèves qui n'ont pas fait seuls ce cheminement avant, un certain potentiel de connaissances proches ? Ça irait avec un constat chez l'enseignant du premier exemple de proximités descendantes et horizontales plutôt « objet » ? C'est un peu contradictoire avec une certaine vue intuitive (piagétienne) des apprentissages, qui les conditionnent à des activités de construction, ainsi qu'avec ce qui a été avancé au début de ce paragraphe mais c'est peut-être conforme à une certaine réalité, notamment sociale[14] ? En ce qui concerne le travail s'appuyant sur des connaissances proches, on a tendance (avec Vygostki) à le situer du côté des activités partagées entre élèves et enseignant, et, si on suit ce fil, des proximités ascendantes. Est-ce une affaire d'activités contextualisées, est-ce une affaire d'activités plus liées à la reconnaissance des savoirs, y compris généraux, à leur sens, ou à leur mémorisation ? Ça irait avec notre constat chez le même enseignant de proximités ascendantes plutôt « activités ». Vraisemblablement, il n'y a pas une réponse unique ni univoque, ça va dépendre des notions, des élèves, chacun et leur groupe, de leur engagement dans le processus, mais aussi du professeur et de ses choix de tâches et de déroulements.

Si c'était le cas (s'il existait bien une distinction à prendre en compte entre deux aspects de la ZPD), on comprend la nécessité de faire travailler les élèves immédiatement après le cours pour s'appuyer sur ce qu'on vient peut-être d'engendrer chez les moins autonomes... Et de multiplier alors à la fois les aides procédurales s'il en est besoin, puis les aides constructives, voire les proximités ascendantes... On retrouve cette idée dans Robert et Vandebrouck (2014) des deux étapes nécessaires pour certains élèves, avec selon le contexte, activités a minima, aides procédurales, ou alors proximités descendantes et horizontales - activités normales, aides constructives, ou alors proximités ascendantes...

Vers la formation des enseignants

Les recherches peuvent éclairer les formateurs et les enseignants à partir de leur expérience, en dégageant des régularités qui prennent sens (avec notamment « des mots pour le dire » à partager). Elles peuvent aussi indiquer certains outils d'analyse à utiliser, quitte à les adapter, soit pour préparer et choisir les contenus (relief, tâches) soit au moment des déroulements (nature du travail à mettre en place, vigilance, aides, proximités, tensions…).

L'exposé aura sans doute permis une sensibilisation aux démarches théoriques et méthodologiques mobilisées pour aboutir à la notion de proximités. L'objet n'était pas la formation stricto sensu mais une analyse de pratique très fine, avec un zoom sur deux déroulements particuliers, justifié par un arrière-plan théorique Vygotskien.

On a montré des différences importantes de pratiques en ces termes de proximités, en liens avec des activités préalables, sans pouvoir conclure à des différences d'apprentissage possibles. Ce sont seulement des hypothèses (qui pourraient donner lieu à des « théorèmes d'existence locale ») qui sont en jeu, en lien ici avec le moteur d'apprentissages que peuvent représenter des médiations dans la ZPD des élèves.

Mais ces proximités sont-elles des outils qui peuvent être utilisés en classe ordinaire ? Certes les enseignants font souvent des proximités spontanément, ils peuvent ne pas avoir le temps d'en faire d'autres, dans certains cas il est difficile de trouver des points d'appui chez les élèves… Peut-il en être autrement ? Peut-on enrichir les pratiques là-dessus ? Ce sont autant de questions qui montrent que ce qui est exposé ici est très local et encore partiel…

De façon générale, il convient d'être prudent sur les questions de diffusion et d'adaptation des recherches. Il y a une grande complexité de l'activité dans la classe, une articulation nécessaire entre des niveaux micro, local, global ; la nécessité aussi de prendre en compte le temps long et l'accès difficile enfin à la dimension personnelle dans l'activité.

Enfin, en termes de transmission, comme pour les apprentissages, présenter des résultats, voire des outils comme dans cette communication, ne suffit pas à équiper l'enseignant ou même son formateur. On peut espérer cependant, par exemple grâce à un travail collectif entre enseignants et formateurs, basé sur des études de pratiques, élargir la palette des pratiques possibles (alternatives), notamment sur les contenus à proposer aux élèves (en termes de tâches

[14] Par exemple pour des élèves très éloignés des réflexions inductives

notamment) et contribuer à ajuster les accompagnements des élèves en classe au plus près des acquisitions visées (selon les contextes, les formes de travail, les contenus en jeu…)

Références bibliographiques

Brousseau G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cabañas-Ramírez, N.O., Locia-Espinoza, E., Morales-Carballo, A. (2020). Didactic Engineering in the Study of the Sense of Variation of Functions: Preliminary Analysis. International Electronic Journal of Mathematics Education, 15(2), em0566

Chappet-Pariès M., Pilorge F.& Robert A. (2017) Un scénario de formation de formateurs : les activités d'introduction, les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour la classe inversée, s'appuyant sur le thème « sens de variation des fonctions » en seconde. Document de formation du Laboratoire de Didactique André Revuz n°16. Paris : IREM de Paris.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10, 5–53

Hitt, F. & González-Martín, A.S. (2016). Generalization, covariation, functions, and Calculus. In A. Gutiérrez, G.L. Leder & P. Boero (Eds.), The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues (p. 3–38). Rotterdam: Sense Publishers

Leontiev, A. (1984). Activité, Conscience, Personnalité. Moscou : Editions du Progrès (1ère édition, 1975, en russe).

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R-E., Vandebrouck, F., Vivier, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis, IJRUME International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4(1), 139–160 - https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068-z

Robert, A., Penninckx J., & Lattuati M. (2012). Une caméra au fond de la classe de mathématiques, (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos. Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.

Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 34(2/3), pp 239-285

Robert, A., & Rogalski, J., avec la participation de F. Vandebrouck. (2020). D'un problème d'optimisation d'une surface agricole au cours sur le sens de variation en seconde : une étude de cas. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, n° 22. Paris : IREM de Paris.

Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (dir.), La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants (p. 23-30). Toulouses : Octarès Editions.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. Dans L. Viennot (dir.) Didactique, épistémologie et histoire des sciences (pp.61-87). Paris : PUF.

Vandebrouck, F. (2008). La classe de mathématique : activité des élèves et pratiques des enseignants, Ouvrage collectif, Edition Octarès, Collection Travail et Activité Humaine.

Vandebrouck, F, Robert A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec des technologies, Recherche en Didactique des Mathématiques – Vol 37(2-3), pp 333-382

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2-3), 133-169.

Vygotski, L. (1934/1985). Pensée et langage. Paris : La dispute.

Sylvie GRAU

Résumé
Le cadre de la problématisation apporte des éléments de compréhension de l'activité en considérant cette activité comme une réponse à un problème. Dans ce cadre, deux outils (le losange de problématisation et les espaces de contraintes) permettent d'enrichir l'analyse *a priori* des situations d'enseignement. L'objectif est de mieux anticiper ce qu'il s'agit d'expliciter aux élèves, ce qui doit être institutionnalisé, la manière dont on peut envisager l'étayage. Nous allons expérimenter ces outils et discuter de leur utilisation en formation.

Le cadre de la problématisation

Le cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP) issu des travaux de Fabre et Orange (Fabre & Orange, 1997) vise à penser l'apprentissage comme une enquête et donc analyser comment les connaissances se construisent au cours d'un processus comprenant le fait de poser, construire et résoudre un problème. L'objectif est d'amener l'élève à construire des savoirs apodictiques, c'est-à-dire des savoirs en lien avec les problèmes qui les ont générés et les nécessités qui font que ce savoir est ce qu'il est et qu'il n'est pas autre chose. Le modèle du losange de problématisation résume ce processus par quatre pôles que sont la question, la solution, les données et les conditions, et les différents axes qui les relient entre eux (voir Figure 1). L'axe qui relie la question et la solution correspond à la résolution du problème, celui qui relie les données et les conditions correspond à la construction du problème.

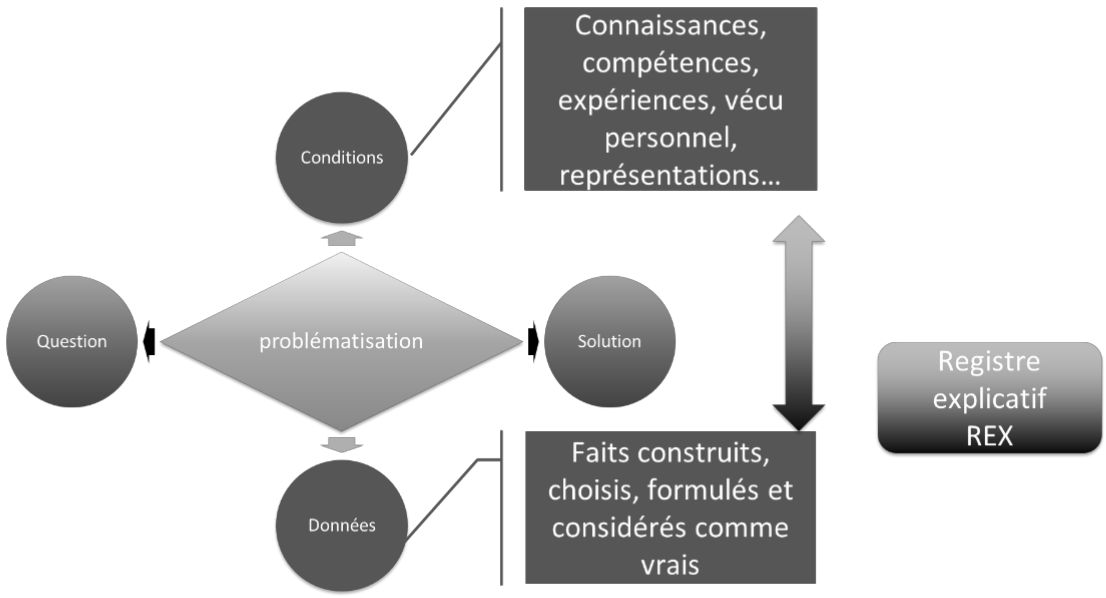


Figure 3 : losange de problématisation (Fabre, 2011)

Les questions peuvent être de différentes natures, elles peuvent être factuelles (on s'interroge par exemple sur l'existence d'un objet, sur une valeur, un critère), analytiques (on s'interroge sur une relation, une catégorisation, un point commun) ou explicatives (on s'interroge sur les raisons, on recherche une preuve). Les solutions peuvent aussi être de différentes natures (un fait, une relation ou une nécessité) sans que question et solution soient systématiquement de même nature. Par exemple une question factuelle (quelle est la solution de l'équation ?) peut amener à répondre par une relation (cette équation est équivalente à telle autre), ou par la formulation une nécessité (la solution ne peut pas être trouvée algébriquement, il faut procéder par approximation). Les données du problème ne sont pas les informations fournies par l'enseignant à l'élève, mais ce que l'élève formule comme des vérités qu'il ne remet pas en question. Ce sont des faits qu'il choisit, construit, et considère comme vrais, du moins temporairement. Les conditions sont quant à elles les connaissances, compétences, expériences, représentations de l'élève. Elles peuvent être issues de plusieurs « mondes » (Tall, 2014) : elles peuvent être scientifiques (savoir mathématique), sociales (savoirs de l'expérience, de la vie quotidienne) ou scolaires (liées au contrat didactique, au savoir scolaire). Par exemple concernant la proportionnalité, nous avons des savoirs mathématiques liés à cette notion (les propriétés de linéarité par exemple), nous pouvons en avoir une pratique sociale (« prix aux kilos », vitesse, recettes…) et nous avons la fréquentation d'objets rencontrés principalement à l'école comme le tableau de proportionnalité.

La mise en tension des données et des conditions fait émerger des nécessités à l'intérieur de modèles. Le savoir construit est donc en lien à ces nécessités et au problème, c'est ce qui le rend apodictique. Par ailleurs, les explications, justifications, argumentations données par l'élève à propos de son activité, relèvent de modèles élaborés dans un certain paradigme appelé le registre explicatif (REX). Dans le cadre du CAP, une situation d'apprentissage est censée amener l'élève à une problématisation qui le contraint à faire évoluer le REX. La construction du problème consiste à tester des possibles, construire des faits, émettre des hypothèses, définir ce qui est en question et ce qui est hors question. L'ensemble doit s'inscrire dans un tout cohérent qui peut relever de trois types de configurations qui ne sont pas exclusives :

- La configuration pragmatique vise le fonctionnement, le côté opérationnel des connaissances apporte une validation de fait.
- La configuration analytique vise une catégorisation basée sur des propriétés ou des caractéristiques communes.
- La configuration théorique vise une cohérence de l'ensemble au sein d'une théorie qui le justifie et donne le sens global à la problématisation.

Face à un même problème, chaque élève construit une question différente, fonction des conditions qui lui sont propres. Si l'analyse *a priori* de situations d'enseignement vise traditionnellement à anticiper les différentes procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre, la problématisation s'intéresse aussi à la caractérisation du problème construit par l'élève. Ainsi l'analyse *a priori* doit étudier différents problèmes, certains pouvant être très éloignés du problème théorique posé par l'enseignant. Nous allons préciser comment nous menons les analyses *a priori* dans le CAP et présenter un premier exemple avant de faire l'analyse *a priori* d'une tâche complexe proposée par une professeure stagiaire en classe de seconde.

L'analyse *a priori* dans le CAP

Le premier niveau d'analyse consiste à identifier la question posée à l'élève et les différentes manières dont l'élève peut être amené à reformuler cette question, quelles sous questions il peut poser. En regard de cette question, il s'agit d'identifier la nature des éléments de solution attendus. Le deuxième niveau d'analyse vise à spécifier les conditions scientifiques, sociales et scolaires que l'élève peut être amené à mobiliser ainsi que les données reconnues comme pertinentes pour résoudre le problème. Cela suppose de s'interroger sur la factualisation attendue (les faits à construire lors d'étapes intermédiaires, ou le choix d'informations, l'inférence, la formalisation de propriétés ou nécessités…). Le dernier niveau vise à identifier les procédures que les élèves peuvent utiliser pour résoudre le problème en lien avec les configurations. Va-t-il faire une représentation graphique parce qu'il maîtrise une technique dans un registre graphique lui permettant de résoudre le problème (configuration pragmatique) ou parce qu'il cherche à reconnaître une classe de situation déjà rencontrée (configuration analytique) ou parce que le dessin est un support lui permettant de raisonner sur un objet théorique (configuration théorique) ?

Pour dresser une vision plus synthétique de tous les possibles, nous pouvons organiser ces informations dans un espace de contraintes. Il s'agit de mettre en relation les faits (qui relèvent du registre empirique), les nécessités au sein des modèles (qui relèvent du registre des modèles) et les paradigmes dans lesquels sont élaborés ces modèles (le REX).

Prenons l'exemple du problème « boîte à bonbons » proposé dans le concours Eurêka Maths Réunion en 2018 (voir Annexe 1). Un schéma de type algorithmique est proposé : il faut choisir un nombre, le tripler et ajouter 4, si le résultat est plus grand que 65, on peut choisir un autre nombre et recommencer, sinon on divise le résultat par 5, si le reste égal à 0 on gagne, sinon on perd. La consigne est de « trouver tous les nombres qui permettent de gagner des bonbons ». Si nous reprenons la grille d'analyse *a priori* que nous venons de présenter, nous obtenons l'analyse suivante. La question est de trouver tous les nombres qui permettent de gagner des bonbons. La solution est donc une liste finie de nombre entiers (raisonnablement, il ne doit pas y en avoir trop si on les demande tous). Cela peut donc amener certains élèves à poser un problème factuel qui est de chercher quel nombre choisir pour gagner et par un certain nombre de tests proposer quelques réponses. Cependant, poser ce problème dans le cadre de l'arithmétique suppose qu'il faut argumenter le fait qu'il ne peut pas y en avoir d'autres que les nombres effectivement trouvés, ce qui transforme le problème en un problème explicatif et donc demande de mettre à jour des nécessités associées à ces solutions. Les conditions sont de différentes natures :

- Conditions du monde scientifiques : connaissance des critères de divisibilité, connaissance sur la division euclidienne, expérience du raisonnement inductif, du raisonnement arithmétique
- Conditions du monde sociale : ce n'est pas un jeu de hasard, il existe une stratégie gagnante. Si l'élève ne pose pas cette condition, il va tester au hasard des nombres sans chercher à tirer des nécessités.
- Conditions du monde scolaire : je peux faire des essais, faire des hypothèses et les tester. Si on me pose la question c'est que je peux trouver plusieurs réponses, qu'il y en a un nombre limité (ce qui ne serait pas le cas au lycée par exemple ou une solution pourrait avoir une forme algébrique et désigner une infinité de nombres solutions).

Les données pertinentes sont les informations portées par l'algorithme, la prise en compte des résultats intermédiaires. La factualisation attendue est que les élèves fassent des essais et qu'ils traduisent les « tests » de l'algorithme en nécessités liées aux connaissances des tables de multiplication et critères de divisibilité. Le REX attendu est celui du cadre de l'arithmétique. Dans une configuration pragmatique l'élève peut se contenter de dire qu'il ne trouve pas d'autres solutions et donc qu'il les a toutes. Dans une configuration analytique, l'élève peut s'appuyer sur les critères et vérifier que cela semble cohérent, par exemple que le nombre obtenu doit être multiple de 5 et inférieur à 65. Dans une configuration théorique, l'élève peut développer une preuve en s'appuyant sur des propriétés mathématiques, par exemple que l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres de la forme $5k-4$ (avec k entier inférieur à 13) multiples de 3. On peut alors construire l'espace de contraintes (voir Tableau 1).

Registre empirique Registre des faits formulés comme vrais et non remis en question	Algorithme de calcul	1 perd, 2 gagne, 3 perd, 4 perd …	Les nombres divisibles par 5 se terminent par 0 ou 5.	Il y a un nombre fini de multiples de 5 inférieurs à 65.

Registre des modèles Nécessité à l'intérieur des modèles	Nécessité d'un raisonnement inductif par « remontée » de l'algorithme. Si je choisis un nombre x, alors $3x + 4$ doit être inférieur à 65. Si je choisis un nombre x, alors $3x + 4$ est multiple de 5. Il existe moins de 13 nombres gagnants.
Registre explicatif	Cadre de l'arithmétique Preuve par traitement exhaustif des cas

Tableau 1 : Espaces de contraintes problème « boîte à bonbons »

On comprend alors que la construction du problème nécessite une analyse des faits construits pour identifier des contraintes qui permettent de diminuer le champ des possibles. Sans la construction de nécessités, un élève peut cependant tester tous les entiers jusqu'à 20 et ainsi trouver toutes les solutions. Le problème n'est donc pas suffisamment contraignant pour que les élèves construisent la nécessité d'un raisonnement inductif ni la nécessité de mobiliser les critères de divisibilité. Les espaces de contraintes permettent de tester la robustesse de la situation vis-à-vis des objectifs d'apprentissage.

Analyse *a priori* d'une tâche complexe

Le CAP est particulièrement intéressant pour analyser les situations complexes. Nous allons en faire l'expérience sur une situation proposée par une enseignante stagiaire en classe de seconde. Elle souhaite mettre en place une tâche complexe visant à ce que les élèves mobilisent la notion de fonction affine. Elle veut construire avec eux, à partir de leurs productions, une trace écrite rappelant la définition d'une fonction affine par son expression algébrique, définition qu'elle estime être acquise au collège. Dans le support distribué aux élèves (voir Annexe 2), la stagiaire propose différents documents : un thermomètre à double graduation, une carte météo d'une chaîne d'information américaine, l'affiche de cinéma du film « Fahrenheit 451 » de Truffaut, la couverture du livre de Ray Bradbury's et un tableau listant des températures remarquables données en degrés Celsius (zéro absolu, fusion de l'eau, auto-inflammation du papier, température à la surface du soleil etc.). Les élèves doivent croiser ces informations pour établir la relation entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius et dire ce qu'ils pensent de la proposition de Mr Icks qui est que : « 451°F correspond à la température d'auto-inflammation du gazole ». Du point de vue de la problématisation, il est à noter que la consigne décompose déjà le problème en deux étapes, la première étant de trouver une relation (question analytique) et la seconde de dire si une proposition est vraie ou fausse (question factuelle). Demander d'établir la relation entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius n'est en fait qu'une manière d'orienter le travail pour répondre à la seconde question qui est de savoir à quoi correspond 451°F dans le titre de l'affiche. On a aussi une question initiale qui est floue lorsqu'il est écrit dans le document distribué aux élèves que « Mr. Icks est interpelé par les valeurs sur la carte météo ». Les élèves peuvent à leur tour poser le problème explicatif : comment se fait-il que les valeurs soient aussi élevées ? Nous avons donc dans le document source plusieurs problèmes plus ou moins posés et dans différents mondes (social avec la carte météo, culturel avec l'affiche de cinéma et scientifique avec les thermomètres et le tableau du dernier document), mais peu en rapport avec le monde scolaire voire même en rupture avec le contrat usuel en mathématiques au lycée, du fait qu'il n'y a pas de problème mathématique explicitement posé et du fait de l'ancrage interdisciplinaire non scientifique. Pour la première consigne qui est de donner une « relation » la solution attendue est aussi floue. Il peut s'agir d'une formule, une description de la co-variation dans un registre sémiotique spécifique (langage naturel, graphique, tableau fléché…). Suivant le cadre dans lequel l'élève travaille, il peut imaginer une relation au sens de « point commun », un lien, une causalité, une loi, une formule, une fonction. Du côté des conditions, on attend une mobilisation de conditions :

- Scientifiques : une relation en mathématique suppose une relation fonctionnelle qui peut s'exprimer par une expression algébrique de la fonction ; savoir que l'état de la matière varie en fonction de la température ; connaître quelques faits (températures à la surface du soleil, du corps humain…).
- Sociales : savoir qu'il existe différentes unités pour mesurer la température et en particulier que les USA utilisent une autre unité que les °C, avoir entendu parler des films évoqués, avoir déjà eu besoin de prendre sa température, d'avoir une idée de la température à laquelle l'eau change d'état par expérience par exemple en cuisine.
- Scolaires : dans un problème de recherche en mathématiques il est possible de prendre des initiatives, d'utiliser différentes procédures, il n'y a pas forcément une seule réponse. On peut utiliser différents registres (tableaux, graphiques). Les grandeurs sont souvent proportionnelles. Un travail interdisciplinaire peut exiger des connaissances dans une autre discipline.

Ici les élèves doivent prendre en compte un grand nombre de données prélevées dans les différents documents, mais une factualisation est indispensable pour mettre en correspondance les mesures dans les deux unités et rendre la covariation perceptible. Cela suppose d'organiser les données dans un tableau ou du moins une liste ordonnée, de calculer des variations, tracer une courbe ou effectuer des calculs pour tester la proportionnalité par exemple.

Plusieurs configurations sont possibles amenant des constructions différentes du problème sachant qu'elles ne sont pas exclusives et que plusieurs peuvent être mobilisées successivement ou en parallèle. La procédure qui consiste à organiser et représenter les mesures relève plutôt d'une configuration pragmatique, le niveau reste local, aucun traitement n'est réellement mis en œuvre, l'élève constate l'alignement ou l'ordonnancement dans le tableau. L'identification d'une covariation permet un travail à différents niveaux (global pour la croissance, locale pour la variation et ponctuelle pour des calculs d'images ou d'antécédents). La recherche d'une fonction affine par détermination du coefficient multiplicateur et de l'ordonnée à l'origine relève d'une configuration théorique, l'élève doit reconnaître les caractéristiques d'une situation modélisable par une fonction affine.

Ici le REX théoriquement visé est celui du cadre de l'analyse, il s'agit de la modélisation de la covariation de deux grandeurs par une fonction mathématique. Cependant ce REX n'est pas nécessaire puisque le problème peut être résolu dans le cadre de l'arithmétique des grandeurs par une analyse de la covariation (une variation de 10 unités de l'une des mesures de grandeurs entraîne une variation de 18 unités de l'autre). La situation n'est donc pas pertinente pour rendre nécessaire l'écriture algébrique d'une relation fonctionnelle, elle est cependant pertinente pour caractériser la relation affine par la proportionnalité des écarts. Cette propriété caractéristique peut être une définition temporaire des fonctions affines qui a le mérite de rendre la définition opérationnelle dans le contexte de la modélisation de la covariation de deux mesures de grandeurs (Grau, 2017).

L'espace de contraintes permet d'identifier les différentes manières de construire le problème :

<table>
<tr><td>Registre empirique
Registre des faits formulés comme vrais et non remis en question</td><td>Tableau de correspondance entre les mesures dans les deux unités.</td><td>Les mesures dans les deux unités ne sont pas proportionnelles.</td><td>Sur le graphique les points sont alignés.</td><td>0°C = 32°F</td><td>Une variation de 10°C correspond à une variation de 18°F.</td></tr>
<tr><td>Registre des modèles
Nécessité à l'intérieur des modèles</td><td colspan="5">On a une covariation de deux mesures de grandeurs, l'une est fonction de l'autre.
Nécessité d'une proportionnalité entre les variations.
La fonction est affine.
Nécessité d'une ordonnée à l'origine de 32.
L'expression de la fonction est de la forme f(x)=ax+b.
La fonction est monotone croissante.</td></tr>
<tr><td>Registre explicatif</td><td colspan="3">Cadre des mesures de grandeurs</td><td colspan="2">Cadre de l'analyse</td></tr>
</table>

Cette analyse pointe la difficulté de trouver des situations didactiquement pertinentes pour problématiser des savoirs attendus par les programmes alors même qu'ils ne sont pas prévus pour être opératoires, c'est-à-dire des outils au service de la résolution d'une classe de problèmes. Cela concerne en particulier les savoirs liés à des objets de l'analyse définis algébriquement sans que ne soient questionnés les changements de niveaux, de points de vue ou de registres que ces définitions supposent. Dans la lignée des travaux de Gueudet et Vandebrouck (2019) sur la variation de fonctions en classe de seconde, la définition de l'objet « fonction affine » par son expression algébrique amène une représentation ponctuelle alors même que le but est de décrire une relation globale (la relation affine) souvent identifiée du fait d'un alignement de points sur un graphique (registre graphique). Elle est donc inefficiente du point de vue de la résolution de certains problèmes et n'est pas porteuse de sens du point de vue du concept de fonction car elle amène à généraliser de manière inappropriée les propriétés de la proportionnalité.

L'analyse des productions des élèves (voir Annexe 3) montre que certaines nécessités ont bien été construites mais que l'expression algébrique de la fonction n'apparait que dans deux groupes, dont un, suite à l'intervention de l'enseignante pour réorienter le travail, ce groupe ayant répondu que la relation entre les deux unités était « l'océan atlantique ». Ce groupe ne mobilise donc pas un registre explicatif mathématique, nous pouvons parler de malentendu socio-scolaire (Bautier & Rayou, 2013) du fait que l'activité cognitive des élèves n'est pas celle attendue par l'enseignant. Pour les autres la covariation n'appelle pas une modélisation par une fonction, la proportionnalité des variations suffit à caractériser la relation et permet de répondre aux questions posées par l'enseignante. La stagiaire n'a pas trouvé dans les productions les appuis nécessaires à l'élaboration du texte de savoir qu'elle avait prévu. Les élèves n'ont donc pas fait le lien entre l'activité proposée et la synthèse. On peut faire l'hypothèse que l'analyse *a priori* que nous avons menées dans le cadre du CAP aurait permis d'anticiper la difficulté rencontrée.

Analyse de l'activité de l'enseignant dans le CAP

Les outils présentés peuvent aussi être mobilisés pour analyser l'activité de l'enseignant (Fabre, 2006; Grau, 2021; Grau & Hersant, 2021; Hersant, 2015). Nous posons l'hypothèse que la pratique est la réponse apportée par l'enseignant à un problème professionnel plus ou moins formalisé et conscientisé. Analyser la pratique revient alors à tenter de reconstruire le problème de l'enseignant à partir des traces de son activité : ses préparations, les observations de la mise en œuvre en classe, les productions des élèves, les interventions et productions de l'enseignant, son analyse réflexive ou les entretiens d'auto-confrontation etc. Le REX est alors caractérisé par les composantes dont relèvent les explications que l'enseignement donne lorsqu'il parle de sa pratique. Ces composantes sont reprises de la théorie de la double approche didactique et ergonomique de Robert et Rogalski (Vandebrouck et al., 2013). Elles sont au nombre de cinq : la composante personnelle (représentation de soi, de l'apprentissage, goût, expérience…), la composante institutionnelle (les programmes, horaires, ressources, manuels…), la composante sociale (relation avec les élèves, le groupe, les collègues, les collectifs…), la composante médiative (l'organisation, le déroulement, le pilotage…) et la composante cognitive (choix des contenus, énoncés, variables didactiques…). Comme pour tout apprentissage, l'objectif est de favoriser une évolution du REX. En formation initiale, il s'agit d'amener les étudiants à développer la part de la composante cognitive, que ce soit lors de la préparation, de la mise en œuvre ou de l'analyse réflexive. L'utilisation des outils d'analyse du CAP permettent de repérer comment les étudiants problématisent leur pratique au cours de leur formation initiale. Nous avons pu identifier une certaine régularité dans la dynamique de problématisation sur l'année avec des enchainements de trois grandes phases (voir Figure 2). La première est une phase de mise en tension. Nous parlons de faits didactiques pour désigner des incidents, paradoxes, incompréhensions qui amènent l'étudiant à prendre conscience d'un écart entre ses conceptions et opinions et ses réalisations en classe. Cette prise de conscience n'est possible qu'à partir du moment où l'étudiant dispose de cadres théoriques, d'outils d'analyse et d'un espace collaboratif d'analyse avec ses pairs. Sinon ces faits didactiques sont expliqués par des causes extérieures comme le niveau faible des élèves, le contexte de l'établissement, les conditions spécifiques comme les horaires, le manque de temps, le manque de matériel etc. La deuxième phase est celle de la problématisation. Il s'agit de positionner et construire des problèmes didactiques professionnels. Pour cela, le collectif est encore nécessaire, il permet de confronter les solutions, d'ouvrir des possibles, de profiter de l'expérience des pairs, des apports des formateurs. La dernière phase est la construction de solutions raisonnées, c'est-à-dire d'une pratique consciente en lien avec les problèmes explicites qui ont été posés et des nécessités formalisées en lien avec les différentes composantes.

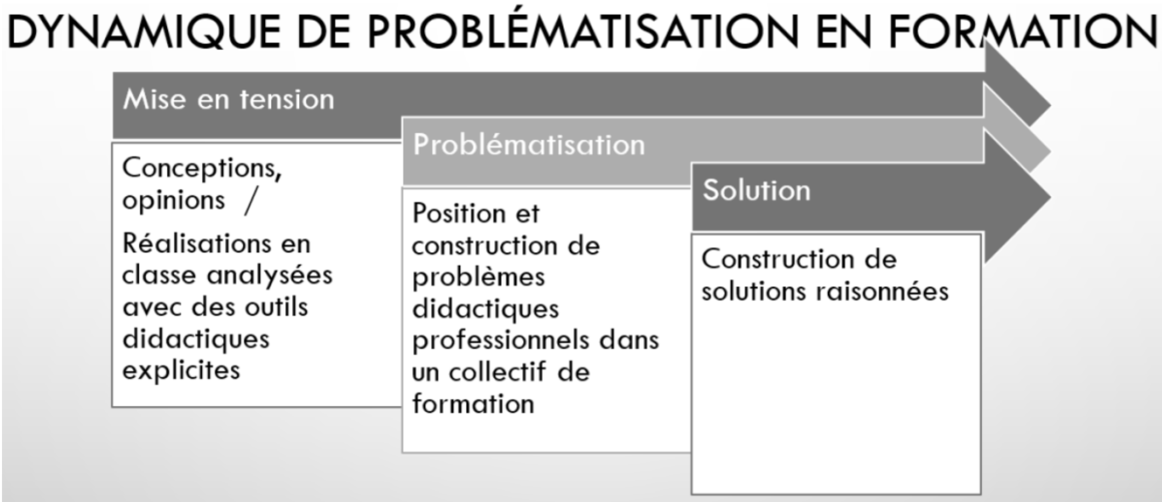


Figure 4 : dynamique de problématisation des pratiques en formation initiale des enseignants de mathématiques du second degré dans le CAP.

Nous allons illustrer cette dynamique à travers l'analyse de la pratique d'une enseignante stagiaire en maternelle. Son problème professionnel est de savoir comment enseigner le dénombrement en petite section (enfants de 3 ans). Lors de la première visite dans sa classe en novembre, cette stagiaire montre une régularité dans sa pratique, elle ne propose pas de situations problèmes aux élèves mais elle les maintient dans des micro-tâches, ils doivent compter par imitation en regardant et écoutant comment fait l'enseignante à différents moments de la journée, l'enseignante valide mais n'explicite pas le sens de l'activité. Sa représentation de l'enseignement en maternelle vient de doxas largement partagées comme par exemple l'idée que l'enfant peut apprendre par la simple activité. Le fait didactique rencontré par cette stagiaire est que certains élèves n'arrivent pas à dénombrer. Elle construit en formation, grâce aux analyses croisées avec ses pairs, la nécessité de mettre l'élève en confrontation avec un milieu et de s'assurer de la dévolution du problème à l'élève. Le dénombrement doit alors apparaître comme une solution efficace pour résoudre un problème. Elle propose donc une situation didactique pertinente. L'élève doit mémoriser une quantité de cercles sur une carte pour prendre la même quantité de cubes dans une réserve. La validation se fait en mettant un cube sur chaque cercle : dans tous les cercles il doit y avoir un cube et il ne doit pas rester de cubes. Surgit un nouveau fait didactique : une élève arrive à mémoriser la quantité 6 alors qu'elle énonce qu'elle doit prendre 3 cubes. En fait cette élève ne sait pas compter au-delà de 3 mais elle sait que la quantité attendue est « 3 et encore 3 ». Elle énonce donc 3 mais prend bien 6 cubes. La stagiaire comprend alors le rôle de l'analyse *a priori*. Elle réalise l'écart entre son objectif d'apprentissage (mémoriser la quantité et non dire la quantité) et les procédures que les élèves mettent en place. Elle prend aussi conscience de l'effet rétroactif du milieu du fait que la situation est auto-validante. Cette stagiaire a construit une solution raisonnée : elle va essayer par la suite de proposer des situations adidactiques dont elle fait une analyse *a priori* afin de bien identifier la pertinence de la situation au regard de son objectif d'apprentissage et d'amener l'élève à apprendre par assimilation et adaptation de ses connaissances. Son REX est donc passé d'une conception de l'apprentissage par imitation à une conception socioconstructiviste. Cependant cette évolution du REX correspond au problème de l'enseignement du dénombrement en petite section, rien ne permet d'affirmer que ce REX sera mobilisé à propos d'une autre notion mathématique ou d'un enseignement du nombre à un autre niveau de la scolarité.

Conclusion

Nous avons présenté le cadre de l'apprentissage par problématisation et montré comment le modèle du losange et les espaces de contraintes peuvent être des outils pertinents pour mener des analyses *a priori*. Ce cadre permet de modéliser la dynamique de problématisation, c'est-à-dire la manière dont un sujet enchaîne la construction de différents problèmes dans un processus de factualisation et défactualisation en lien avec la construction de nécessités. A travers ce processus se construisent de nouvelles connaissances en lien avec des nécessités et le contexte spécifique du problème traité. L'objectif est de rendre le savoir plus disponible car rattaché aux problèmes qu'il peut amener à résoudre, et apodictique car contraint par des nécessités explicitées. Il peut être pertinent de former les enseignants à l'utilisation de ce cadre d'analyse en formation initiale et continue, car il apporte des éléments de compréhension de certaines difficultés professionnelles résistantes : la difficulté à mener des débats autour des productions d'élèves qui ici peut s'expliquer par le fait que les élèves ont sans doute construit des problèmes différents, la difficulté à mener le processus d'institutionnalisation par le fait que les nécessités n'ont pas été construites par les élèves, la difficulté à construire des situations problèmes par le fait que les élèves ont rarement à charge de construire le problème mais uniquement de le résoudre.

Par ailleurs ce cadre est aussi un outil pertinent pour analyser la pratique enseignante. Il permet d'identifier les composantes qui dominent dans les prises de décision. La poursuite des recherches dans ce domaine pourrait aider à penser des dispositifs de formation initiale et continue amenant une problématisation des savoirs professionnels.

Références bibliographiques

Bautier, É., & Rayou, P. (2013). *Les inégalités d'apprentissage programmes, pratiques et malentendus scolaires* (2e édition revue et augmentée). Presses universitaires de France.

Fabre, M. (2006). Analyse des pratiques et problématisation. Quelques remarques épistémologiques. *Recherche et formation*, *51*, 133-145. https://doi.org/10.4000/rechercheformation.511

Fabre, M. (2011). *Eduquer pour un monde problématique : La carte et la boussole*. PUF.

Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *ASTER*, *24*, 37-57.

Grau, S. (2017). *Problématisation en mathématiques : Le cas de l'apprentissage des fonctions affines*. Bretagne Loire.

Grau, S. (2021). Conditions d'une vigilance didactique chez les professeurs des écoles stagiaires. *Actes du 47e colloque COPIRELEM*.

Grau, S., & Hersant, M. (2021, février 10). *Former les enseignants au regard didactique : Deux études de cas au cycle 1*. Séminaire INSPE de Nantes « Former au regard didactique », Nantes.

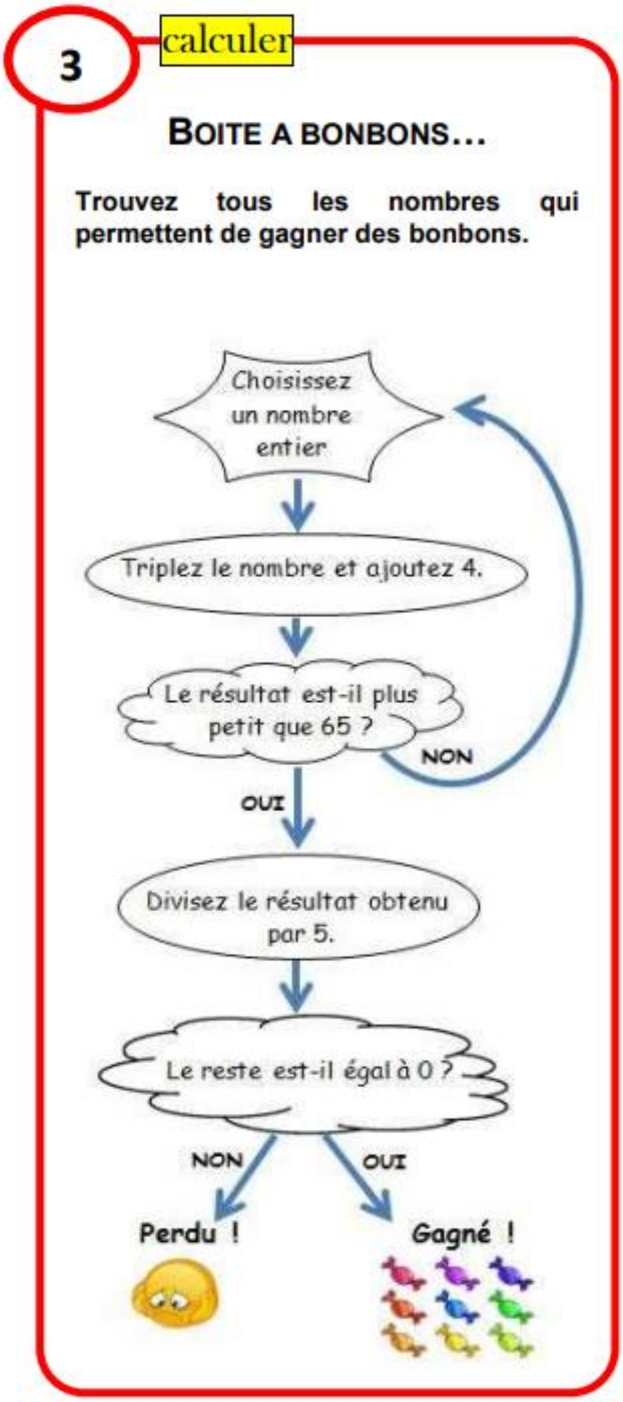
Gueudet, G., & Vandebrouck, F. (2019). *Entrée dans l'enseignement supérieur : Éclairages en didactique des mathématiques* [Rapport de recherche]. CNESCO (Conseil national d'évaluation du système scolaire). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02547063/document

Hersant, M. (2015, novembre 25). *Activité de l'enseignant et des élèves. Contrat didactique, milieu et problématisation* [Conférence invitée]. Journée « Étude des pratiques enseignantes », ESPE Créteil.

Tall, D. (2014). Making sense of mathematical reasoning and proof. In *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (p. 223-236). Springer Science & Business Media.

Vandebrouck, F., Robert, A., Rogalski, J., Abboud, M., Cazes, C., Chesnais, A., & Hache, C. (2013). *Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques.* IREM de Paris. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02110844

ANNEXE 1 : CONCOURS EUREKA MATHS REUNION EPREUVE FINALE 2018[15]



15 https://pedagogie.ac-reunion.fr/fileadmin/ANNEXES-ACADEMIQUES/03-PEDAGOGIE/01-ECOLE/gami/eureka/EMR_2018/EMR_2018_Finale.pdf

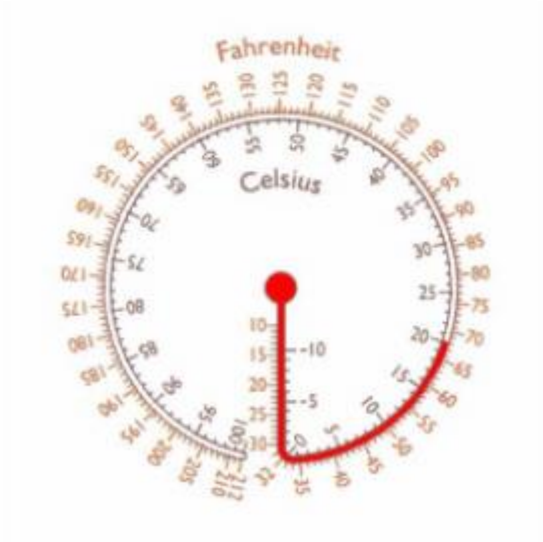
Chapitre 6 : Fonctions affines
Activité 1

En regardant une chaîne d'information américaine, Mr Icks oberve la carte météorologique suivante (document 1). Les températures indiquées le laissent perplexe.

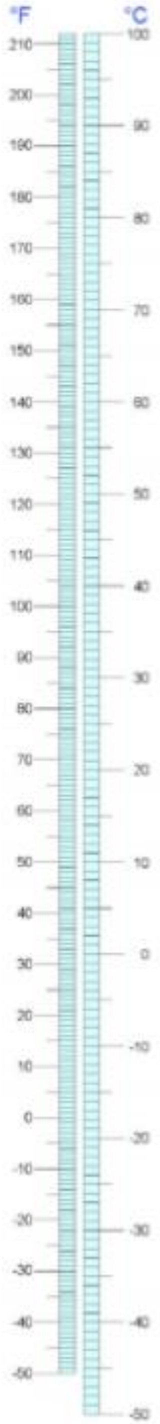
Document 1 :

Il décide de faire une recherche internet sur les températures. Il découvre trois unités : les degrés Celsius, les degrés Fahrenheit et les Kelvins. Il existe des termomètres utilisant deux unités (documents 2a et 2b).

Document 2a :



Document 2b :



Il trouve aussi une affiche de cinéma et une couverture du livre Fahrenheit 451 de Ray Bradbury (document 3)

<u>Document 3 :</u>

Mr Icks cherche alors à comprendre ce que signifie ce titre et trouve des exemples de température (document 4).

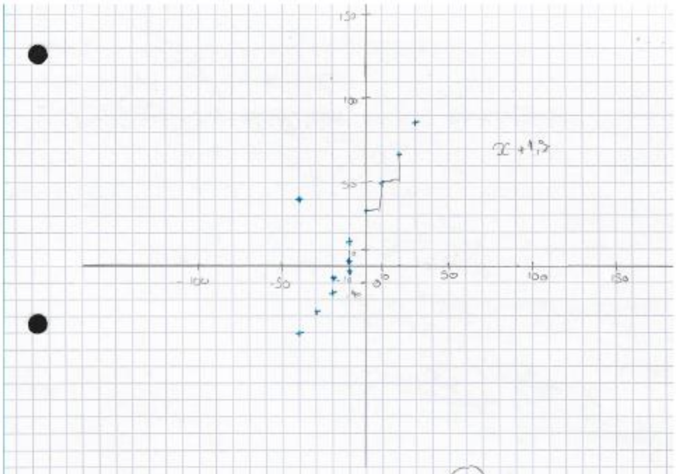
<u>Document 4 :</u>

Commentaire	Degré Celsius
Zéro absolu	-273,15
Plus basse température naturelle enregistrée à la surface de la Terre	-89
Mélange eau/sel de Fahrenheit	-17,78
Température de fusion de l'eau (à la pression standard)	0
Température moyenne à la surface de la Terre	15
Température moyenne du corps humain	36,8
Plus haute température naturelle enregistrée à la surface de la Terre	56,7
Température de vaporisation de l'eau (à la pression standard)	99,975
Température d'auto-inflammation du papier	233
Température d'auto-inflammation du gazole	257
Température estimée à la surface du Soleil	5 526

<u>Problématique :</u>

- **Établir la relation qui existe entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius.**
- **Mr Icks pense que 451°F correspond à la température d'auto-inflammation du gazole. Qu'en pensez vous ?**

Groupe B1



F°	-40	-22	-4	14	32	50	68	104	122	140	158	176	194	212
C°	-40	-30	-20	-10	0	10	20	40	50	60	70	80	90	100

+18

+10

+ 10°C, c'est comme + 18°F

100°F = 38°C 50°F = 10°C

$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

451 = (100 × 4) + 50 + 1

38 × 4 + 10 + 0,5

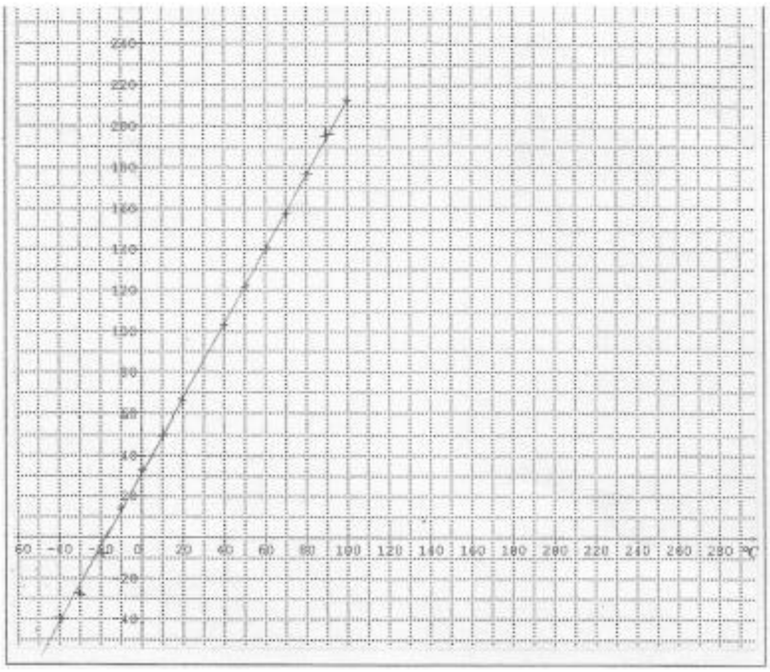
162,5

+1°F

+ 0,5°C

451 × 0,5 = 225,2

$451 \times \frac{5}{9} + 10 \simeq 260{,}6$



Groupe B2

1- $f(x) = x \times 1,8 + 32$ où x représente les degrés celsius. Grâce au doc 2a. On sait que 0C° = 32°F. Il va falloir intégrer +32 à la fonction. Grâce à nos connaissances on sait que 180 °C = 360 °F ~~donc~~, qui représente 2x dans notre fonction.

On teste avec 10°C : 10 × 2 + 32 = 52 mais le document 2a nous montre que 10°C = 50 °F. Donc on réduit la multiplication à 1,8 donc : 10 × 1,8 + 32 = 50 °F.

La relation entre les Farenheit et les degrés Celsius est la fonction $f(x) = x \times 18 + 32$.

2- La première affiche du document 3 nous montre une combustion de gazole. On sait que la combustion du gazole grâce au document 4 est de 257°C. Nous appliquons donc la fonction : f(257) = 257 × 1,8 + 32 = 494,6 °F.

On en déduit que sa supposition est fausse. En revanche la deuxième affiche montre une combustion du papier. Le document 4 nous montre que la combustion du papier est de 233 °C. On applique donc la fonction :

~~f(257)~~ f(233) = 233 × 1,8 + 32 = 451.

On en déduit donc que 451 °F correspond à la combustion du papier.

Groupe B3

températures en °C	0	10	20	30
températures en °F	32	50	67,5	86

Nous avons pu voir, grâce au produit en croix qu'il n'y a pas de rapport de proportionnalité entre le °C et le F°.

• **Aide 2**

…es …us	0	10	20°C	30	40	50	60	70
…ès …enheit	32	50	67,5°F	86	104	~~140~~ 121,9	140	158

On remarque que lorsque il y a 0°celcius les Farenheit demeurent à 32.

• 451°F correspond à la température d'auto-inflammation ?

257 : 3 = 85,6666 puisque 85,6 °C est égal à 186°F

donc 186 × 3 = 558 °F

×J

Donc nous pensons que Mr Icks s'est trompé dans son raisonnement

Groupe B4

• Degrés Celsius = Français
Degrés Fahrenheit = Etats-Unis

Les degrés Celsius et Fahrenheit calcule la Température

Degrés °C	-10	-5	0	30	60	80	100
Degrés °F	14	23	32	86	140	176	212

× ÷

(18 : 10 = 1,8)

$$°C \quad 10 \xrightarrow{10} 20 \xrightarrow{10} 30 \xrightarrow{10} 40 \rightarrow 50 \rightarrow 60$$
$$°F \quad 50 \xrightarrow[18]{} 68 \xrightarrow[18]{} 86 \rightarrow 104 \rightarrow 122 \rightarrow 140$$

oui — Les degrés Celsius commence à zéro alors que les degrés Fahrenheit commence à trente deux.

oui — Les degrés Celsius augmente de dix en dix ou diminue de 10 en dix alors que les degrés Fahrenheit augmente ou diminue de 18 en 18.

oui — Les °C et les °F ne sont pas proportionnels.

• $60 + 10 \times 19 = 250 + 7 = 257$

$140 + 18 \times 19 = 482 + 7 \times 2 = 494$

Nom car 257 °C est égal à 494 °F

Groupe B5

Problématique :

- **Établir la relation qui existe entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius.**

On prend des températures au hasard et on calcul la différence qu'il y a entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius.

0°F = −18°C 0°C = 32°F

Quand les degrés Celsius augmentent de 10°, les degrés Fahrenheit augmentent de 18°.

- **Mr Icks pense que 451°F correspond à la température d'auto-inflammation du gazole. Qu'en pensez vous ?**

100+10=110	212+18=230
110+10=120	230+18=248
120+10=130	248+18=266
130+10=140	266+18=284
140+10=150	284+18=302
150+10=160	302+18=320
160+10=170	320+18=338
170+10=180	338+18=356
180+10=190	356+18=374
190+10=200	374+18=392
200+10=210	392+18=410
210+10=220	410+18=428
220+10=230	428+18=446
230+10=240	446+18=464
240+10=250	
250+10=260	

451°F selon Mr Icks

257°C selon doc4

Nous avons augmenté de 10°C en 10°C jusqu'à 260°C afin de voir si quand nous augmentions de 18°F, les températures étaient égales dans leurs unités respectives. Nous avons remarqué que la supposition de Mr Icks n'est pas cohérente avec nos calculs. ... Quand nous sommes à 451°F, nous sommes à environ 233°C. Alors sa supposition serait correct s'il pensait que c'était la température d'auto-inflammation du papier.

Bonne idée.

oui.

Groupe A1

Etant donner que au Etat-Unis ils utilisent le Fahrenheit et que en Europe ils utilisent le celsius nous supposons que l'Océan Atlantique relie les deux* températures

*mesure de

Fahrenheit	32	50	68	86	104	122	140
Celsius	0	10	20	30	40	50	60

$f = x + 18$

x = celsius

18 = la différence entre celsius et fahrenheit c'est la différence en fahrenheit entre 10° celsius

+18

F	50	68
C	10	20

+10

bien

25×18=450

18:10=1,8

donc 25+1,8=26,8

26,8°C

Donc en réfléchissant nous en avons déduit que 451 F ne correspond pas à la température d'auto inflammation du gazole

Groupe A2

• Aide 2

Degrés Celsius	-40°C	10°C	20°C	60°C	70°C	80°C	90°C	100°C
Degrés Fahrenheit	-40°F	50°	67,5°F	140°F	158,5°F	176°F	193,5°F	211°F

+10   +10   +10   +10   10 ×30   300

+17,5   +17,5   +17,5   +17,5   +17,5   ×30   525

• 451 °F ne correspond pas à la température d'auto inflammation du gazole car celle ci est comprise entre 150° C et 160° C ce qui n'est pas le cas dans le document 4. Il s'agit donc d'autres choses.

bien.

• La relation est la mesure de température. Pour chaque dizaines ont rajoute 17,5 pour arriver à la dizaine supérieure.

Groupe A3

1)

32 °F = 0 °C ~~41~~ 105°F = ~~4~~ 41°C

~~35 °F = 1°C~~ 131°F = 55°C

68°F = 20°C

77°F = 25°C

104°F = 40°C

86°F = 30°C

Nous pouvons observer que tout les 10°C, nous augmentons de 18°F.

Nous en concluons donc que tout les 1°C, nous augmentons de 1,8 °F. Ceci est donc la relation entre les Fahrenheit et les Celcius. Pour trouver l'équivalent en °F d'un nombre en °C, il faut faire 1,8 x x + 32 avec x = nombre en celcius, le 32 étant les 32°F du 0°C.

2)

1,8 x 257 + 32 = 494,6 °F.

Mr Ichs a donc tort car la température d'auto-inflammation du gazole est à 494,6 °F et non a 451°F. En effet,

451 °F = ~~218,56 °C~~ 232,78

~~$\frac{451}{1,8}$ x 32 = 218,56~~ $\frac{451-32}{1,8}$ = 232,78.

Ce qui est donc presque la température d'auto inflammation du papier.

COMMENT ANALYSER LES PRATIQUES ENSEIGNANTES LORS DE SÉANCES FONDÉES SUR UNE INVESTIGATION ?

Chantal TUFFÉRY-ROCHDI[16]

Résumé. Ce texte rend compte d'un atelier mené à la CORFEM 2021. Après avoir été confronté à la résolution d'un problème dit *à prise d'initiative* conçu pour des élèves de seconde, les participants ont eu à réfléchir aux pratiques enseignantes attendues lors de la préparation et la mise en œuvre de ce type de problème en classe. Cet atelier s'inscrivait dans le thème 2 et visait à outiller les formatrices et les formateurs pour décrire, comprendre et analyser les pratiques enseignantes.

Des recherches antérieures (Gandit et al. 2014, Tufféry-Rochdi 2017) avancent l'impact positif d'une réflexion des enseignants sur l'évaluation des élèves lors de séances fondées sur une démarche d'investigation (DI), impact ressenti aussi bien sur les méthodes d'enseignement que sur les apprentissages des élèves. Nous émettons l'hypothèse que cet effet au niveau n pourrait se reproduire au niveau n+1. C'est-à-dire qu'amener les formateurs à réfléchir sur l'analyse des pratiques enseignantes lors de l'observation de séances fondées sur une DI pourrait leur permettre une meilleure appropriation de cette méthode d'enseignement mais également une meilleure capacité à expliciter leurs attentes auprès des professeurs qui participent à leurs formations. Cette explicitation devrait, dans un second temps, guider les professeurs formés vers la conception et la gestion de séances fondées sur une DI. C'est sur cette hypothèse que repose cet atelier.

Il vise à amener des éléments de réponses aux problèmes professionnels suivant :

- Comment observer et évaluer un professeur qui mène une séance fondée sur une investigation en mathématiques ?
- Quels sont les éléments qui permettent de considérer que la séance est bien menée et que l'objectif visé, qu'il soit disciplinaire ou autre, est atteint ?
- Quels sont les retours sur la séance que l'on peut faire lors de l'entretien ?

Nous avons fait le choix de confronter dans un premier temps les participants de l'atelier à un problème qui sera l'objet de la première partie ce cette communication. Nous montrerons ensuite dans une deuxième partie comment le problème choisi s'inscrit dans un ensemble de dispositifs visant à préconiser un enseignement fondé sur l'investigation en sciences et en mathématiques. Nous avons ensuite amené les participants de l'atelier à réfléchir aux problèmes professionnels détaillés ci-dessus et qui s'inscrivent dans la continuité d'une recherche antérieure débutée avec les formateurs du premier degré (Tufféry-Rochdi 2018). Ces réflexions seront l'objet de la troisième partie de cette communication.

Une activité introductive : un problème à prise d'initiative

Nous avons fait le choix de confronter dans un premier temps les participants de l'atelier à un problème *(Figure 1)*. Ce problème est extrait du sujet zéro[17] de la nouvelle épreuve écrite

---

[16] Formatrice, INSPE de Paris, Sorbonne-Université

LDAR, Université de Paris, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN

chantal.tuffery-rochdi@inspe-paris.fr

[17] https://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid157873/sujets-zero-2022.html

disciplinaire appliquée du CAPES de mathématiques. Il est identifié dans le sujet zéro comme un exercice à prise d'initiative.

Énoncé de l'exercice 2

D'après la Compétition mathématique sans frontières

Pour traverser un centre commercial Victorien emprunte un trottoir roulant sur lequel il marche de son pas habituel.
Il va ainsi d'une extrémité à l'autre de ce trottoir en 1 min 12 sec.
Il fait ensuite l'expérience de remonter ce trottoir à contre-sens en marchant toujours de son pas habituel. Il lui faut alors 6 min pour le parcourir complètement.

Le lendemain, le trottoir roulant est en panne. Combien de temps Victorien met-il alors pour se déplacer d'une extrémité du trottoir à l'autre en marchant de son pas habituel ?

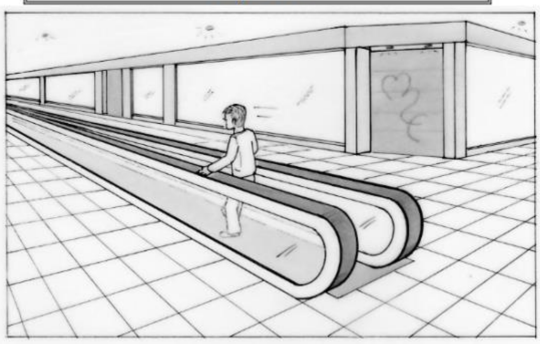
Figure 1 : Exercice à prise d'initiative extrait du sujet 0 du CAPES de Mathématiques

Le problème reprend quasiment à l'identique, sans l'illustration, un exercice du sujet[18] 2019 du concours « Mathématiques sans frontières Alsace ». Cette compétition est organisée par l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg. Elle s'adresse aux élèves des classes de troisième et de seconde. Il s'agit d'un problème portant sur la grandeur vitesse qui a été conçu à destination des élèves de seconde *(Figure 2)*.

Exercice 13 pour les secondes GT
10 points

À pied

Mathématiques sans Frontières



Pour traverser un centre commercial, Victorien emprunte un trottoir roulant, sur lequel il marche, de son pas habituel, pour gagner du temps. Il va ainsi d'une extrémité à l'autre de ce trottoir en 1 min 12 s.
Un jour, il fait l'expérience de remonter ce trottoir à contre-sens, en marchant toujours de son pas habituel. Il lui faut 6 min pour y parvenir.
Le lendemain, le trottoir roulant est en panne.

Combien de temps Victorien met-il alors pour aller d'une extrémité du trottoir roulant à l'autre en se déplaçant, bien sûr de son pas habituel ? Justifier.

Figure 2 : Exercice issu du sujet Mathématiques sans frontières, Alsace, 2019

Nous avons confronté à ce problème des formateurs en mathématiques ou en sciences physiques de l'INSPE de Paris en amont du colloque sans limitation de temps ainsi que les participants à l'atelier sur un temps imparti. Nous reprenons ici une partie des méthodes de résolution proposées en commençant par une méthode *(Figure 3)* que l'on pourrait qualifier d'experte et dans laquelle les valeurs numériques n'interviennent qu'à la dernière étape.

[18] http://maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/FichPDF/MSF_19_Epr_dec.pdf

Soit D la longueur du trottoir roulant en mètres
Soit v_T la vitesse du trottoir roulant en mètre par seconde
Soit v_M la vitesse de marche de Victorien en mètre par seconde
Soit t_1 le temps en seconde mis à l'aller en marchant sur le trottoir
Soit t_2 le temps en seconde mis au retour en marchant sur le trottoir
Soit t_3 le temps en seconde mis le lendemain sans le trottoir

À l'aller, la vitesse de Victorien est : $v_M + v_T$
Au retour, la vitesse de Victorien est : $v_M - v_T$
Comme la $vitesse\ moyenne = \frac{distance}{temps}$, on obtient : $v_M + v_T = \frac{D}{t_1}$ et $v_M - v_T = \frac{D}{t_2}$
D'où : $2\ v_M = \frac{D}{t_1} + \frac{D}{t_2} = \frac{(t_1 + t_2)D}{t_1 \times t_2}$ et $v_M = \frac{(t_1 + t_2)D}{2t_1 \times t_2}$

Le lendemain, sans trottoir roulant, la vitesse de Victorien est : v_M
Le temps de parcours est : $t_3 = \frac{D}{v_M} = \frac{D}{\frac{(t_1 + t_2)D}{2t_1 \times t_2}} = \frac{2t_1 \times t_2}{(t_1 + t_2)}$
Comme $t_1 = 72s$ et $t_2 = 360s$
On obtient $t_3 = 120s$

Figure 3 : Méthode de résolution experte proposée par des formateurs confrontés au problème

Une méthode équivalente a également été proposée dans laquelle les valeurs numériques disponibles dans l'énoncé interviennent dès le départ dans les calculs *(Figure 4)*. Une alternative est aussi proposée pour la dernière étape.

Soit D la longueur du trottoir roulant en mètres
Soit v_T la vitesse du trottoir roulant en mètre par seconde
Soit v_M la vitesse de marche de Victorien en mètre par seconde

À l'aller, la vitesse de Victorien est : $v_M + v_T$
Au retour, la vitesse de Victorien est : $v_M - v_T$
Comme la $vitesse\ moyenne = \frac{distance}{temps}$, on obtient : $v_M + v_T = \frac{D}{72}$ et $v_M - v_T = \frac{D}{360}$
D'où : $2\ v_M = \frac{D}{72} + \frac{D}{360} = \frac{6D}{360} = \frac{D}{60}$ et $v_M = \frac{D}{120}$

Le lendemain, sans trottoir roulant, la vitesse de Victorien est : v_M
Le temps de parcours est : $t = \frac{D}{v_M} = \frac{D}{\frac{D}{120}} = 120$
Alternative : à partir de $v_M = \frac{D}{120}$ on pourrait écrire $v_M = \frac{D}{t} = \frac{D}{120}$ donc t = 120

Figure 4 : Autre méthode de résolution proposée par des formateurs avec introduction précoce des valeurs numériques données dans l'énoncé

Une troisième méthode *(Figure 5)* s'appuie sur le fait qu'il s'agit d'une situation inversement proportionnelle : Victorien met cinq fois plus de temps au retour lorsqu'il remonte le trottoir à contre sens, il va donc cinq fois moins vite qu'à l'aller.

Soit D la longueur du trottoir roulant en mètres
Soit v_T la vitesse du trottoir roulant en mètre par seconde
Soit v_M la vitesse de marche de Victorien en mètre par seconde

À l'aller, la vitesse de Victorien est : $v_M + v_T$
Au retour, la vitesse de Victorien est : $v_M - v_T$

On peut remarquer que $360s = 5 \times 72s$
Victorien va 5 fois plus vite à l'aller qu'au retour
Donc $v_M + v_T = 5 \times (v_M - v_T)$
D'où $4 v_M = 6 v_T$ et $v_T = \frac{2}{3} v_M$

On en déduit que : $v_M + v_T = \frac{5}{3} v_M$
Or la vitesse et le temps de parcours sont inversement proportionnels :
Le lendemain, le temps de parcours : $\frac{5}{3} \times 72s = 120s$

Figure 5 : Méthode de résolution proposée par les formateurs s'appuyant sur la reconnaissance d'une situation inversement proportionnelle

Les formateurs sollicités pour résoudre ce problème en amont de l'atelier et pendant l'atelier semblent s'accorder sur le niveau de difficulté que pourrait représenter ce problème pour des élèves de seconde. L'une des raisons de cette difficulté reconnue repose sur le fait que la longueur du trottoir n'est pas donnée dans l'énoncé. Afin de dépasser cette difficulté, il est possible d'envisager une autre approche qui consisterait dans un premier temps à fixer une longueur arbitraire pour le trottoir roulant, par exemple 100 m. Le résultat obtenu avec 100 m correspond à la réponse attendue soit 120 s. D'autres essais pourraient être tentés avec d'autres longueurs du trottoir possibles. Ces tentatives permettraient de dégager comme conjecture que la durée cherchée ne dépend pas de la longueur du trottoir et est toujours égale à 120 s. Dans un second temps, afin de vérifier que la réponse est indépendante de la longueur du trottoir, il peut être envisagé une méthode experte qui reviendrait à partir des méthodes des *figures 2* et *3* à remarquer que la formule qui donne le temps cherché ne dépend pas de la longueur D du trottoir. Il est également possible d'envisager une autre approche pour valider la réponse avec l'utilisation d'un tableur comme ci-dessous *(Figure 6)*.

Si on décide que la longueur du trottoir est 100m
Soit v_T la vitesse du trottoir roulant en mètre par seconde
Soit v_M la vitesse de marche de Victorien en mètre par seconde

À l'aller, la vitesse de Victorien est : $v_M + v_T$
Au retour, la vitesse de Victorien est : $v_M - v_T$
Comme la $vitesse\ moyenne = \frac{distance}{temps}$, on obtient : $v_M + v_T = \frac{100}{72}$ et $v_M - v_T = \frac{100}{360}$
D'où : $2\ v_M = \frac{100}{72} + \frac{100}{360} = \frac{600}{360} = \frac{5}{3}$ et $v_M = \frac{5}{6}$

Le lendemain, sans trottoir roulant, la vitesse de Victorien est : v_M
Le temps de parcours est : $\frac{D}{v_M} = \frac{100}{\frac{5}{6}} = 120$

Cela pourrait être une aide apportée aux élèves bloqués sur l'exercice : décider d'une longueur pour le trottoir, changer la longueur du trottoir pour vérifier que la réponse ne dépend pas de la longueur choisie …

	A	B	C	D	E
1	**longueur du trottoir**	**vitesse à l'aller**	**vitesse retour**	**vitesse marche**	**temps cherché**
2	**"A2"**	**"=A2/72"**	**"=A2/360"**	**"=(B2+C2)/2**	**"=A2/D2"**
3	10	0,139	0,028	0,083	120
4	15	0,208	0,042	0,125	120
5	20	0,278	0,056	0,167	120
6	25	0,347	0,069	0,208	120
7	30	0,417	0,083	0,250	120
8	35	0,486	0,097	0,292	120
9	40	0,556	0,111	0,333	120
10	45	0,625	0,125	0,375	120
11	50	0,694	0,139	0,417	120
12	55	0,764	0,153	0,458	120
13	60	0,833	0,167	0,500	120
14	65	0,903	0,181	0,542	120
15	70	0,972	0,194	0,583	120
16	75	1,042	0,208	0,625	120
17	80	1,111	0,222	0,667	120
18	85	1,181	0,236	0,708	120
19	90	1,250	0,250	0,750	120
20	95	1,319	0,264	0,792	120
21	100	1,389	0,278	0,833	120
22	105	1,458	0,292	0,875	120
23	110	1,528	0,306	0,917	120
24	115	1,597	0,319	0,958	120

Figure 6 : Proposition d'une autre approche de résolution du problème

Cette dernière approche nous semble davantage correspondre à ce que l'on pourrait attendre d'un exercice à prise d'initiative destiné à des élèves de seconde. Nous sommes alors dans un raisonnement par *induction et présomption*. Ce type de raisonnement est présenté dans le document d'accompagnement des programmes, *Raisonnement et démonstration au collège*[19], produit dans le cadre du programme de 2008 mais identifié sur Éduscol comme conforme aux programmes du cycle 4 de 2016. Ici, à partir de l'étude de plusieurs exemples concordants nous avons déduit, par présomption, une propriété générale à savoir que le résultat attendu ne dépend pas de la longueur du trottoir et qu'il est toujours égal à 120 s. Dans le même document d'accompagnement des programmes, il est précisé que, si dans le domaine des sciences expérimentales, le raisonnement par induction peut se suffire à lui-même, en mathématiques il ne se conçoit, en général, que comme une première étape pour conduire à une conjecture et qu'il reste ensuite, par un raisonnement déductif, à démontrer la véracité de cette conjecture. La poursuite du travail que nous proposons avec le tableur s'inscrit davantage dans une démarche expérimentale mais, comme déjà dit, une approche plus rigoureuse du type de celle décrite dans les *figures 2* et *3* peut également être envisagée.

Nous avons également demandé aux mêmes formateurs de préciser les prérequis pour cet exercice. Les principaux prérequis identifiés sont les suivants :

- Comprendre que si l'utilisateur avance sur le trottoir roulant dans le sens de fonctionnement, sa vitesse par rapport au sol s'obtient en ajoutant à sa vitesse de marche la vitesse du trottoir alors que, si l'utilisateur prend le trottoir dans l'autre sens, il faut soustraire la vitesse du trottoir.
- Connaitre la formule de la vitesse moyenne en fonction de la distance et du temps : Vitesse moyenne = distance/temps.
- Maitriser le calcul sur les fractions.
- Maitriser le calcul algébrique : résolution de système, résolution d'équation.

Enfin, une résolution erronée a été anticipée *(figure 7)* :

> Si on part de l'idée d'un aller-retour sur le trottoir roulant :
> Victorien fait un aller-retour et met : 72s + 360s = 432s
> S'il a un copain qui fait l'aller-retour en même temps que lui à côté du tapis en marchant à la même allure que lui, ils doivent revenir en même temps au point de départ, puisque la vitesse "en plus" de l'aller et la vitesse "en moins" du retour sur le trottoir en marche se compensent.
> Le copain qui a marché à côté du trottoir (à vitesse constante) a mis le même temps à l'aller et au retour soit 432s / 2 = 216s !

Figure 7 : Une résolution erronée anticipée

Cette tâche d'anticipation de différentes méthodes de résolution possibles, d'identification des prérequis et de conceptions erronées représente une partie importante du travail de préparation d'un enseignant qui souhaite proposer cet exercice à ses élèves. Bien que toute séance se doit d'être préparée en amont, la tâche nous semble plus ardue pour ce type de problème.

Nous allons dans un deuxième temps apporter des éléments permettant de situer ce problème en termes d'attentes institutionnelles et en référence à d'autres dispositifs.

Situer les problèmes à prise d'initiative en termes d'attentes institutionnelles

[19] Raisonnement et démonstration (education.fr)

Comme déjà écrit, ce problème est identifié dans le sujet 0 de la nouvelle épreuve écrite disciplinaire appliquée du CAPES de mathématiques comme un exercice à prise d'initiative. Nous tentons ici de préciser en quoi consiste les exercices à prise d'initiative.

Dans l'introduction du programme[20] actuel de mathématique du cycle 4, on peut lire :

> La diversité des activités concerne aussi bien les contextes (internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines) que les types de tâches proposées : « questions flash » pour favoriser l'acquisition d'automatismes, exercices d'application et d'entraînement pour stabiliser et consolider les connaissances, exercices et problèmes ouverts favorisant la prise d'initiatives, débats et mises au point collectives d'une démonstration, production d'écrits individuels formalisant une démarche ou un raisonnement, etc. (p.128)

Le problème proposé ici peut être considéré comme issu de la vie quotidienne mais aussi de la discipline des sciences physiques. Sur les différents types de tâches identifiés, il semble correspondre à un *problème ouvert favorisant la prise d'initiatives*. Nous pouvons noter que dans ce texte les termes *problème ouvert* et *à prise d'initiative* sont associés. Nous y reviendrons plus tard dans ce texte.

Dans le document d'accompagnement des programmes[21] intitulé « *Types de tâches »* on trouve un paragraphe sur les activités avec prise d'initiative :

> Les activités exigeant une prise d'initiative sollicitent l'autonomie et l'imagination des élèves. Elles peuvent conduire à modéliser une situation et consistent toujours à résoudre un problème. La résolution de ce problème peut être utilisée dans des situations d'enseignement variées :
> • la découverte d'une notion nouvelle, à travers l'identification d'un obstacle qu'elle permet de franchir ;
> • le réinvestissement de notions antérieurement installées.

Il est également précisé que :

> Afin de ne pas déconnecter les activités à prise d'initiative des contenus du programme, les savoirs mathématiques (notions, méthodes ou stratégies) sollicités dans chaque activité de ce type doivent être formalisés au cours d'une phase d'explicitation, de structuration ou d'institutionnalisation.

Le problème travaillé en début d'atelier ne semble pas correspondre à la découverte d'une notion nouvelle en mathématiques mais concerne plutôt le réinvestissement de notions antérieurement installées.

Le dernier paragraphe nous amène à nous questionner sur les savoirs mathématiques (notions, méthodes ou stratégies) sollicités dans notre résolution du problème et qui pourrait être formalisés à la suite d'une résolution avec des élèves. Nous avons déjà répondu à cette question. Concernant les notions nous avons identifié le fait que les vitesses s'ajoutent dans un sens et se retranchent dans l'autre sens, la formule de la vitesse moyenne en fonction de la distance et du temps, le calcul sur les fractions et le calcul algébrique. Concernant la méthode, nous avons identifié un raisonnement par induction et présomption qui nous a conduit après des essais à émettre une conjecture puis à une validation de la conjecture.

Cette demande institutionnelle de formalisation des savoirs mathématiques fait en particulier écho à des travaux de Gandit (2017) qui préconisent pour les séances fondées sur une investigation une institutionnalisation en deux temps et de deux ordres. L'ordre 1 concerne les objets mathématiques et l'ordre 2 concerne les méthodes de travail sur ces objets.

[20] Programme2020_cycle_4_comparatif_1313377.pdf (education.fr)

[21] RA16_C4_MATH_types_de_taches_547938.pdf (education.fr)

Les activités avec prise d'initiative sont donc explicitement associées aux problèmes ouverts dans le programme. Les problèmes ouverts initiés par une équipe de l'IREM de Lyon au début des années 1980 vérifient les caractéristiques suivantes :

> L'énoncé est court.
> L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que »). En aucun cas cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.
> Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.
> (Arsac, Mantes et Germain 1988, p.7)

La résolution d'un problème ouvert doit conduire les élèves à essayer, conjecturer, tester, prouver. Le problème à prise d'initiative proposé peut répondre pour des élèves de seconde aux caractéristiques des problèmes ouverts. Son énoncé est court et il n'induit ni la méthode, ni la solution qui ne découle pas d'une application immédiate d'un résultat du cours. Les élèves peuvent comprendre facilement la situation et devraient pouvoir s'engager dans la résolution. Cette résolution peut passer par des essais, l'émission d'une conjecture et une validation de cette conjecture.

Nous pourrions également rattacher les exercices à prise d'initiative aux démarches d'investigation. En France, un enseignement des sciences à l'école élémentaire fondé sur le questionnement et l'investigation a été mis en place à partir de la rentrée 2000 dans le « Plan de Rénovation des Sciences et de la Technologie à l'Ecole[22] ». Ce plan s'inspirait de l'expérimentation du projet « La main à la pâte[23] » initié par Georges Charpak à la fin des années quatre-vingt-dix. À la suite de réflexions menées par l'Académie des sciences en 2004 et 2005, la démarche d'investigation (DI) est apparue dans les programmes[24] de collège de 2006. Elle y est présentée, dans l'introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques dont les mathématiques, comme une démarche qui privilégie la construction du savoir par l'élève. Elle s'appuie sur le questionnement des élèves relatif au monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques). Des spécificités liées aux objets d'études de ces différents domaines et à leurs méthodes de preuve sont précisées : formulation respective d'hypothèses explicatives et de conjectures, validation par l'expérimentation d'un côté et par la démonstration de l'autre. Les investigations réalisées avec l'aide de l'enseignant, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications sont censées déboucher sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques.

Sept moments essentiels d'une DI sont identifiés même s'il est précisé que ce canevas n'a pas la prétention de définir « la » méthode d'enseignement, ni celle de figer de façon exhaustive un déroulement imposé. L'ordre dans lequel ces moments se succèdent ne constitue pas une trame à adopter de manière linéaire et un aller-retour entre ces moments est envisageable en fonction des sujets.

- Le choix d'une situation-problème par le professeur.
- L'appropriation du problème par les élèves.
- La formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles expérimentaux possibles.

[22] https://www.education.gouv.fr/bo/2000/23/ensel.htm

[23] https://www.fondation-lamap.org/

[24] https://www.education.gouv.fr/bo/2005/hs5/default.htm

- L’investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves.
- L’échange argumenté autour des propositions élaborées.
- L’acquisition et la structuration des connaissances.
- L’opérationnalisation des connaissances.

Ici encore, bien que le problème proposé ne soit pas envisagé comme une situation-problème (Brousseau 2004) visant à introduire une nouvelle connaissance mathématique, il conduit les élèves à investiguer, formuler une conjecture et la valider.

Dans le programme[25] actuel de mathématiques du cycle 4, il est demandé aux enseignants d’amener les élèves à développer des compétences. Parmi ces compétences, figurent en particulier :

> Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d’autrui ;
> S’engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter, (sur une feuille de papier, avec des objets, à l’aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre- exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture ;
> Tester, essayer plusieurs pistes de résolution. (p.129-130)

Dans la suite de ce texte, nous assimilerons ces différents types de problèmes (problèmes à prise d’initiative, problèmes ouverts, démarches d’investigation) aux problèmes fondés sur une investigation.

Réfléchir à l'évaluation des pratiques enseignantes lors de séances fondées sur une investigation

Nous avons ensuite amené les participants de l’atelier à réfléchir aux problèmes professionnels suivants : Comment observer et évaluer un professeur qui mène une séance fondée sur une investigation en mathématiques ? Quels sont les éléments qui permettent de considérer que la séance est bien menée et que l’objectif visé qu’il soit disciplinaire ou autre est atteint ? Quels sont les retours sur la séance que l’on peut faire lors de l’entretien ?

La réflexion proposée portait donc sur deux points qui nous semblent essentiels : la gestion de la séance et l’organisation de la rencontre des élèves avec le contenu mathématique. La gestion d’une séance fondée sur une DI repose sur un contrat didactique (Brousseau 2004) bien différent de celui d’un cours traditionnel. L’enseignant n’est plus en charge de dispenser le savoir. Il doit, dans un premier temps, concevoir une tâche qui favorise la rencontre des élèves avec ce savoir. Il doit ensuite guider les élèves tout au long de cette tâche, permettre la dévolution du problème au groupe classe, favoriser le travail d’équipe au sein des groupes d’élèves puis animer la mise en commune pour permettre une confrontation des résultats obtenus et favoriser l’argumentation. Il doit enfin réussir, à partir des résultats obtenus, à structurer les connaissances visées. Les difficultés rencontrées par les enseignants pour mener à bien ce type de séances sont régulièrement mises en avant :

> Le partage des responsabilités mathématiques entre enseignants et élèves que sous-entend cette vision de l’apprentissage est en fait loin d’aller de soi. Il requiert des tâches et un guidage approprié des élèves, ainsi qu’un contrat didactique approprié (Brousseau, 1997). Il requiert des enseignants capables de faire face à l’imprévu et d’identifier le potentiel mathématique d’idées et de productions d’élèves non nécessairement anticipées. Il requiert des enseignants capables enfin d’aider les élèves à relier les résultats qu’ils ont obtenus dans un contexte particulier avec les connaissances visées par l’institution, à la fois dans leur contenu et dans leur forme d’expression. Les besoins en expertise enseignante vont ainsi bien au-delà de ce qui est en jeu dans les pratiques d’enseignement traditionnelles. (Artigue 2011, p.22)

[25] Programme2020_cycle_4_comparatif_1313377.pdf (education.fr)

Pour organiser le travail en atelier, la séance a été découpée en temps d'enseignement qui reprennent les phases habituelles d'une séance fondée sur une investigation : la présentation du problème, la phase de recherche par les élèves le plus souvent en groupe, la mise en commun, la phase de structuration des contenus visés qu'ils concernent les connaissances mathématiques ou la démarche de recherche. L'objectif n'était pas l'élaboration d'une grille d'évaluation du problème cherché par les participants mais celle d'une grille adaptable aux observations des séances de ce type qu'ils mènent dans les classes. Les éléments portés dans le tableau suivant sont l'aboutissement de cet atelier. Dans le tableau ci-dessous, P désigne « professeur des écoles » et E désigne « élève » ou « élèves ».

	RÔLE DU PROFESSEUR CONCERNANT :	
	LA GESTION DE SÉANCE	LE CONTENU DISCIPLINAIRE ET/OU LA DÉMARCHE DE RECHERCHE
PRÉSENTATION DU PROBLÈME	- P pose le cadre : déroulement de la séance, différents moments, travail attendu des élèves, gestion du temps, règles à respecter (bruit…) - P vérifie la compréhension des consignes (reformulation…). - P parvient à susciter l'intérêt des E pour le problème.	- Le problème est pertinent, porteur, adapté au niveau des élèves. - P vérifie les prérequis nécessaires (vocabulaire, concepts…). - P fait émerger les conceptions erronées. - P vérifie que le problème est compris par tous. - P ne « tue » pas le problème.
PHASE DE RECHERCHE	- Temps de recherche individuel avant de passer au travail en groupe. - P organise le travail de groupe : constitution des groupes en fonction de critères explicites, distribution des rôles au sein de chaque groupe… - P a prévu le matériel nécessaire pour la recherche et pour la communication des résultats (affiche, tablette…). - P circule équitablement de groupe en groupe. - P laisse les élèves circuler dans les autres groupes pour récupérer des informations.	- Le matériel, les aides/indices sont pertinents. **Interactions avec les élèves :** - P ne répond pas directement aux questions mais retourne la question ou oriente vers les pairs, les outils… - P identifie la démarche des élèves. - P aide les élèves à se situer dans la résolution du problème. - P invite les E à éprouver les réponses avancées. - P prend des informations pour préparer le bilan. - P met en œuvre une différenciation des tâches.
PHASE DE MISE EN COMMUN	- P recentre l'attention des E. - P choisit les groupes invités à communiquer l'avancée de leurs recherches (tous/uniquement certains). - P organise la gestion de l'espace (tableau), en fonction du support utilisé (affiche, photo, tablette…). - P distribue la parole, s'assure des interactions entre tous les E. - P fait en sorte que les E écoutent les explications des autres groupes.	- P met en commun toutes les réponses et pas uniquement celles qui sont correctes (statut et gestion de l'erreur). - P fait passer les groupes dans un ordre didactiquement porteur. - P fait expliciter les réponses et les stratégies des E. - P favorise les interactions, la confrontation et l'argumentation. - P met en avant les méthodes de recherche et pas uniquement les connaissances.
STRUCTURATION DES CONNAISSANCES	- P parvient à maintenir l'attention des E. - P fait en sorte que les E gardent des traces des résultats obtenus.	- P parvient à faire reformuler les connaissances visées et à généraliser en vue d'une trace écrite. - P parvient à faire expliciter et à structurer les méthodes de recherche mises en œuvre. - Qualité et précision du vocabulaire utilisé. - P met en perspective la suite des apprentissages.

Figure 8 : Grille d'évaluation d'une séance fondée sur un investigation

Bien que les deux colonnes du tableau soient liées, il est possible de scinder en deux les observations. Dans la première colonne, figurent les éléments liés à la gestion d'une séance fondée sur une investigation et menée en groupe : constitution des groupes, organisation du travail, du matériel et du temps, maintien des élèves dans l'activité. Cette colonne ne dépend pas du contenu mathématique et pourrait être utilisée pour analyser une séance de ce type menée dans une autre discipline. La seconde colonne est explicitement associée au contenu mathématique aussi bien concernant la démarche de recherche que les connaissances en jeu.

Le travail de préparation mené en amont de la séance par le professeur est perceptible à différents moments. Le formateur pourra ainsi vérifier que le problème proposé est pertinent au regard de l'objectif visé, porteur d'apprentissages et adapté au niveau des élèves. Le choix du matériel laissé aux élèves, les aides et les indices qui peuvent être proposés lors de la phase de recherche permettent de percevoir que les prérequis, les conceptions erronées, les différentes méthodes de résolution ont été anticipées par l'enseignant. Les capacités de l'enseignant à identifier les démarches suivies par chaque groupe, à faire passer les groupes dans un ordre didactiquement porteur lors de la phase de mise en commun et à mener la phase de structuration des objectifs visés concernant les connaissances mathématiques et les méthodes de recherche seront aussi le reflet du travail de préparation effectué.

Lors de la phase de présentation du problème, l'enseignant doit vérifier la compréhension des consignes aussi bien concernant le problème mathématique que le type de travail attendu de la part des élèves. Il doit être particulièrement attentif à ne pas apporter des informations qui auraient pour effet de transformer ce problème en un problème d'application.

Pendant le temps de recherche, un premier moment de recherche individuelle avant de passer en groupe favorise un engagement de tous les élèves dans l'activité. L'enseignant doit ensuite interagir avec les différents groupes dans un double objectif. Le premier est de maintenir les élèves au travail et de favoriser leur progression dans cette recherche. Le deuxième est de prendre des informations sur l'avancée de la réflexion dans chaque groupe afin d'organiser ensuite le temps de mise en commun.

Lors de la phase de mise en commun, l'enseignant doit d'abord recentrer l'attention des élèves pour qu'ils se montrent attentifs aux résultats avancés par les autres groupes. La gestion matérielle de cette phase est importante : gestion de l'espace, du tableau, des supports utilisés pour permettre l'exposition des travaux de chacun… Si l'enseignant doit favoriser les interactions de tous, il peut décider de faire passer tous les groupes ou seulement certains. Néanmoins, toutes les réponses doivent être mises en commun et pas seulement les réponses correctes et les méthodes expertes. L'ordre de passage des groupes doit être didactiquement porteur et pour cela il doit être anticipé par le professeur à partir d'informations prises en circulant lors de la phase de recherche. Enfin, l'enseignant doit amener les élèves se trouvant au tableau à expliciter à la fois les procédures mises en œuvre et les résultats obtenus afin de favoriser les interactions, la confrontation et l'argumentation.

La phase de structuration des connaissances intervient en fin de séance après un long temps de recherche en groupe et d'échange lors du bilan. L'enseignant doit reprendre la main et maintenir de la part des élèves un niveau d'attention suffisant. Le rôle de l'enseignant est alors de faire reformuler dans un vocabulaire précis les résultats obtenus aussi bien concernant les méthodes de recherche mises en œuvre que les connaissances mathématiques. L'enseignant peut également mettre en perspective la suite des apprentissages.

La gestion du temps par le professeur lors de chacune de ces étapes est un élément d'observation essentiel. Une séance de ce type peut être menée en continu en moins de 55 minutes (durée habituelle d'une séance de mathématique dans le second degré). Il est également envisageable de la mener sur deux séances en la scindant après le temps de recherche en groupe. Il est alors nécessaire d'avoir produit des traces conservables (affiches, photos…) des recherches menées dans chaque groupe. Cette interruption peut permettre à l'enseignant une meilleure prise de connaissance des avancées de chaque groupe et une meilleure anticipation de la phase de mise en commun, voire de la phase de structuration des connaissances.

L'entretien mené à la suite d'une séance de ce type peut porter sur les différents points de vigilance identifiés dans le tableau ci-dessus. Il permet à l'enseignant observé d'expliciter ses choix et les raisons de ses choix.

Conclusion

Cet atelier a été mené en deux temps. Le premier visait à faire résoudre un problème pouvant conduire à une démarche de recherche (essais, conjecture, validation) mais pouvant également être résolu de façon plus experte. L'objectif était d'amener les participants de l'atelier à percevoir le travail de préparation que doit faire un enseignant en amont de la séance avant de proposer ce type de problème à ses élèves. Une anticipation des méthodes de résolution possibles, des prérequis, des conceptions erronées, des aides envisageables s'avère nécessaire et indispensable, encore plus que pour un autre type de problème. Si cette préparation se montre incomplète, l'enseignant pourra se trouver confronté à des productions d'élèves imprévues dont il devra identifier rapidement le potentiel (Artigue, 2011).

Le deuxième temps de cet atelier a permis d'identifier le rôle de l'enseignant lorsqu'il met en œuvre une séance fondée sur une investigation avec ses élèves. La première colonne du tableau concerne la gestion des élèves, du travail de groupe, du matériel et du temps. Elle est indépendante des mathématiques et pourrait être proposée dans d'autres disciplines. La seconde colonne est en lien direct avec les objectifs visés par la séance : le développement de compétences en termes de démarche de recherche le plus souvent associé au réinvestissement ou à l'acquisition de connaissances mathématiques.

À la fin de l'atelier, en complément du travail mené, nous avons présenté le modèle ESFI (Enseignement des Sciences Fondé sur une Investigation) élaboré dans le cadre du projet européen S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods) qui visait à promouvoir l'enseignement des sciences fondé sur des démarches d'investigation (Grangeat, 2013). Ce modèle en six dimensions (origine du questionnement, nature du problème, responsabilité des élèves, diversité des élèves, place de l'argumentation, explicitation des savoirs) permet d'identifier l'activité des enseignants au cours d'une séance fondée sur une DI.

Références bibliographiques

Artigue M. (2011). *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base.* Rapport pour l'UNESCO. En ligne : http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/ 191776f.pdf

Arsac, G., Germain, G., Mante, M. (1988). Problème ouvert et situation-problème. Lyon : IREM de Lyon édition.

Brousseau, G. (2004). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990)*. Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield. Grenoble : La Pensée Sauvage (deuxième édition).

Gandit M. et al. (2014) Evaluation formative et démarches d'investigation en mathématiques, dans le cadre du LéA EvaCoDICE. En ligne : file:///C:/Users/chant/Downloads/Documents/Acte_EvaCoDICE_2014.pdf

Gandit, M. (2017). Débat et institutionnalisation à deux niveaux : deux outils d'évaluation formative, In Symposium Evaluation et Didactique : conditions pour permettre une évaluation au service des apprentissages des élèves en mathématiques, *Actes du 29ème colloque international de l'Association pour le Développement des Méthodologies d'Evaluation en Education*, Dijon, 2017, p. 34. En ligne : https://www.agrosupdijon.fr/fileadmin/user_upload/Axe3.pdf

Grangeat, M. (2013). Modéliser les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : développement des compétences professionnelles, apport du travail collectif. In M. Grangeat (Éd.), *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation. Des formations et des pratiques de classe* (pp. 155-184). Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble.

Tufféry-Rochdi, C. (2017) Comment évaluer les élèves engagés dans l'enseignement d'exploration Méthodes et Pratiques Scientifiques en seconde ? *Actes de l'École d'été de didactiques des Mathématiques* – Paris 2017.

Tufféry-Rochdi, C. (2018) : Proposition d'une grille d'évaluation des pratiques enseignantes lors de séances fondées sur des démarches d'investigation en mathématiques au primaire. *Actes du colloque de l'Espace Mathématique Francophone* – Gennevilliers 2018.

CONSTRUIRE LA DEFINITION DE LA LIMITE INFINIE EN TERMINALE

Sylvie ALORY, Renaud CHORLAY, Vincent JOSSE

Résumé : A la transition entre le secondaire et le supérieur, la rencontre avec une définition de la notion de limite constitue l'un des points de passage obligés pour l'entrée dans le système de preuve de l'analyse. Depuis les années 1970, de nombreuses études didactiques ont construit un corpus cohérent relatif aux défis et difficultés spécifiques à cette notion ; plusieurs ingénieries ont exploré des pistes visant à les surmonter. Nous présentons ici une ingénierie conçue dans le cadre de la théorie des situations didactiques et visant à la formulation – par des élèves de terminale scientifique et dans des conditions d'enseignement ordinaire (2h, en classe entière) – d'une définition mathématiquement correcte de la notion de limite infinie d'une suite numérique. On s'inscrit ici dans la perspective des travaux de Cécile Ouvrier-Buffet, tout en proposant de compléter la gamme des situations de construction de définition en mettant l'accent sur les tâches de différenciation conceptuelle entre concepts à la proximité trompeuse.

Une ingénierie adossée à la recherche, compatibles avec les programmes et des conditions d'enseignement ordinaires

Une séance compatible avec les programmes et des conditions d'enseignement ordinaires

Notre atelier présente une séance en Terminale visant à faire *formuler* et *valider* par les élèves une définition mathématiquement correcte de la notion de limite infinie pour les suites. La séance a été conçue et mise en place durant l'année scolaire 2016-2017 en Terminale S, et reproduite depuis. Elle demeure compatible avec les programmes de la spécialité de Terminale, dont sont tirés les extraits suivants (BO spécial n° 8 du 25 juillet 2019).

Sur le thème spécifique des limites, le programme vise un équilibre entre une robuste intuition appuyée sur la familiarité avec des exemples variés, et une ouverture sur des définitions qui seules permettent de construire des démonstrations :

> Les buts essentiels du programme de la classe terminale sont de donner aux élèves une bonne intuition des notions fondamentales : convergence, limites, dérivées, intégrales et une solide pratique des calculs afférents.
> (…) Les élèves doivent disposer d'un répertoire d'exemples suffisamment riche pour éviter les confusions entre propriétés.

On verra que l'ingénierie vise à l'appropriation active d'un répertoire d'exemple permettant d'inviter les élèves à formuler et distinguer précisément plusieurs propriétés : croissance (y compris « à partir d'un certain rang »), majoration, limite infinie.

Outre les démonstrations de propriétés de cours (limites et comparaison, opérations sur les limites, suites de références), le programme met en avant deux démonstrations exemplaires à travailler avec les élèves et reposant directement sur le bon usage d'une définition de la divergence vers $+\infty$:

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.

Pour atteindre cet objectif, il nous a semblé utile d'aller jusqu'à une définition plus formelle que celle indiquée dans le programme : « La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. »

Au-delà du contenu spécifique de la séance, ses choix de construction et ses objectifs recoupent les objectifs généraux du programme de spécialité de Terminale, par exemple sur la place des échanges oraux dans les situations d'exploration et d'argumentation :

> Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques et la résolution des problèmes. Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales à travers notamment la pratique de l'argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa pensée et à expliciter son raisonnement de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu'à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : la reformulation par l'élève d'un énoncé ou d'une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d'exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs … L'oral mathématique mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calcul).

On verra que la séance est organisée en différents temps dont la plupart vise à permettre des échanges de nature argumentatifs, le plus souvent entre élèves (sous la régulation de l'enseignant), parfois avec l'enseignant. Elle vise non seulement à la production d'un discours vrai, mais aussi à une invalidation argumentée d'erreurs usuelles dont la situation vise l'explicitation, dans l'esprit du programme :

> L'élève doit être incité à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, et à développer sa confiance en lui. Il cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper. Il ne doit pas craindre l'erreur, car il sait qu'il peut en tirer profit grâce au professeur, qui l'aide à l'identifier, à l'analyser et la comprendre. Ce travail sur l'erreur participe à la construction de ses apprentissages.

En outre, la séance s'inscrit dans le cadre des situations de construction de définitions ; situations dont on sait la rareté dans l'enseignement. Elle contribue ainsi à élargir la gamme des tâches mathématiques rencontrées par les élèves :

> La diversité des activités mathématiques proposées doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.

Ce dernier point est ici particulièrement pertinent, puisque les définitions formelles des concepts d'analyse et leur usage dans quelques démonstrations exemplaires constituent sans doute le principal point de contact entre, d'une part, les pratiques et contenus typiques du secondaire, et, d'autre part, les pratiques et contenus typiques d'un enseignement supérieur académique (Licences ou CPGE scientifiques). Cette transition, ses difficultés, ses discontinuités, ont fait l'objets de nombreux travaux. Ses enjeux nous semblent bien résumés par la distinction proposée, à la suite d'Yves Chevallard, par Maggy Schneider, entre une praxéologie « modélisation » (type 1 ci-dessous) et une praxéologie « système de preuve de l'analyse » (type 2) :

> Le premier type de praxéologies concerne la modélisation mathématique de systèmes constitués d'objets que l'on peut considérer comme des objets préconstruits au sens d'Y. Chevallard (1991), c'est-à-dire d'objets dont l'existence résulte, aux yeux de personnes assujetties à une même institution, d'un « croisement d'énoncés du langage et de situations surdéterminées ». Un tel objet « n'est pas construit mais présenté, par une *deixis* qui est un appel à la complicité dans la reconnaissance ontologique ; l'existence de l'objet apparaît alors comme évidente, non douteuse, plus justement non susceptible de doute ; (…) De tels objets préconstruits jouent un rôle indéniable dans l'apprentissage, pouvant constituer des objets mentaux au sens de H. Freudenthal (1973) que j'ai retravaillé personnellement (Schneider, 1988) comme « substituts de concepts

» auxquels sont associés des convictions, des « images » qui peuvent soit faciliter, soit entraver l'apprentissage des concepts mathématiques correspondants. (…) les objets préconstruits, existant d'abord par le truchement d'une désignation, se mettent à exister par le truchement d'une définition au sein d'une théorie, cette définition donnant prise à une organisation véritablement déductive. (…) Entrent en jeu alors les praxéologies de type 2 dont les tâches diffèrent considérablement de celles des praxéologies de type 1. Elles sont en effet propres à la constitution d'une organisation déductive. Il s'agit de reformuler certains concepts pour en faire des *proof-generated* concept[26]s au sens de Lakatos (1985), l'exemple typique étant celui du concept de limite, formulé en termes de quantificateurs et d'inégalités et inspirant un modèle de preuve faisant abstraction de toute considération géométrique ou cinématique. (Schneider, 2007, p.33).

Des choix adossés à la recherche

Ce travail s'appuie à la fois sur la littérature de recherche sur la notion de limite et sur celle, plus restreinte, sur les situations de constructions de définitions (Ouvrier-Buffet, 2015) (Zandieh & Rasmussen, 2010). Une publication de type « recherche » en rend compte en détail, cherche à justifier nos choix, et propose des outils permettant d'affirmer le maintien d'un certain niveau d'adidacticité dans la mise en œuvre de l'ingénierie (Chorlay, 2019). Nous nous plaçons ici dans le cadre des situations à co-didactiques ou à dimension a-didactique (Bloch & Gibel, 2011), au sens où l'on souhaite contrôler la réelle appropriation par les élèves des enjeux de la situation et du rôle moteur de leurs actions dans le cheminement négocié vers une définition. Le présent texte ne peut entrer dans la plupart de ces considérations théoriques : nous visons ici à expliciter nos choix et à donner un aperçu des déroulements typiques observés en classe, en particulier de la définition produite dans le cadre de la phase finale d'interaction entre les élèves et l'enseignante.

La situation combine des éléments déjà utilisés dans d'autres recherches, par exemple des situations de tri visant à faire expliciter un critère de tri qui soit une propriété caractéristique, donc une définition possible (Ouvrier-Buffet, 2015). La combinaison d'un travail sur un petit échantillon de suites aux comportements variés, et d'un travail d'évaluation d'affirmations qui sont soit des candidats-définitions à accepter ou rejeter, soit des briques élémentaires appelées à s'intégrer dans une définition complexe s'inspire, entre autres, des travaux de Robert (1982) et de Roh et Lee (2017). Le travail explicite d'invalidation de propositions erronées est utilisé par Robert (1982) et Przenioslo (2005). Signalons aussi les choix négatifs : la définition n'émerge ni d'une situation de modélisation (comme dans (Bloch & Gibel, 2011)), ni comme *proof-generated definition* – dans laquelle le besoin et les matériaux de formulation d'une définition émergent de la recherche de preuve d'une conjecture. De même, on pouvait imaginer aborder la question des limites par les fonctions plutôt que par les suites ; et par les limites finies plutôt que les limites infinies. Enfin, tout en reconaissant que la notion de limite ne joue dans le supérieur un rôle « Formalisateur – Unificateur – Généralisateur » (Robert, 1998), un scénario s'appuyant sur ces fonctions ne nous a pas semblé pouvoir vivre au lycée.

Un scénario construit autour d'un enjeu de différenciation conceptuelle

La recherche établit solidement que trois propriétés des suites sont souvent associées dans l'intuition des élèves, soit qu'ils n'aient eu des limites qu'une approche intuitive (par lectures

[26] Au sens de concept dont la définition est précisée dans la cadre de la recherche d'une démonstration visant à valider une conjecture relative à une classe d'objets au départ lâchement caractérisée (i.e. sans définition) (Lakatos, 1984).

graphiques ou explorations numériques), soient – ce qui est plus problématique – après que les notions ont été définies en cours. Ces trois propriétés sont :

(1) tendre vers +oo,

(2) être non majorée,

(3) être croissante (au moins à partir d'un certain rang).

Nous faisons l'hypothèse que cet amalgame implicite – qu'on le décrive en tant que *concept image* ou que théorème en actes – est non seulement source de difficultés mais aussi, potentiellement, un levier d'apprentissage. Nous cherchons à construire une situation dont l'enjeu est l'explicitation des liens entre ces concepts ; explicitation qui conduit à revoir utilement les définitions de (2) et (3) et à produire une définition de (1).

Outre cette hypothèse macro, le scénario s'appuie sur des sous-hypothèses :

- La proximité entre (1) et (2) est susceptible d'engendrer de la dissonance cognitive (un sentiment d'insatisfaction envers ce qu'on tient pour des connaissances ou des critères de décisions), permettant d'amener les élèves à ressentir le besoin d'une définition de termes jusque-là utilisés trop librement.
- Problématiser la question de l'unicité de la limite (par exemple : peut-on dire que la suite de terme général $(-2)^n$ tend à la fois vers $-\infty$ et $+\infty$?) est un levier pour engendrer cette dissonance cognitive. L'histoire des mathématiques montre que différentes notions de limites, toutes justes, se sont succédées, certains n'impliquant pas l'unicité (ce qu'on appelle aujourd'hui une valeur d'adhérence). Le choix d'une définition garantissant l'unicité est un choix conventionnel de la communauté des mathématiciens, il ne peut donc pas émerger d'un milieu de manière adidactique. Il sera donc imposé par l'enseignant.
- Du point de vue formel, la définition visée de (1) peut être construite en « bricolant » la définition formelle de (2) : $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x_n > M$

  (2) étant une condition nécessaire mais non suffisante de (1), on demandera comment renforcer (2) pour assurer l'unicité de la limite, ce qui aboutit à définir (1).

Dans l'ensemble, le scenario s'avère assez robuste, et produit en général une première définition correcte un peu inhabituelle. Plutôt que la définition « implicative »

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_M \Rightarrow u_n \geq \mathrm{A},$$

ou sa version sans implication explicite

$$\forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists n_M \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in [n_M ; +\infty[\cap \mathbb{N} \quad u_n \geq M$$

les élèves utilisent l'addition pour désigner les rangs supérieurs ou égaux à n_M

$$\forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists n_M \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n_M+n} \geq M.$$

Aperçus sur les déroulés

Prérequis et vue d'ensemble de la séance

Nous proposons la séance en novembre-décembre. En septembre un premier cours sur les suites a abordé tous les aspects sauf les limites. Des suites atypiques ont déjà été présentées aux élèves ; avec la calculatrice ou l'ordinateur, la tabulation et la représentation graphique d'une suite par un nuage de points ont été fréquemment utilisées par les élèves. Un travail sur la définition d'une suite non majorée a été mené.

Par ailleurs, les élèves ont déjà été mis en situation de recherche en classe, par exemple dans la découverte du raisonnement par récurrence. Les élèves ont aussi été habitués à utiliser les quantificateurs et un travail sur la logique a été mené afin de clarifier l'implication et l'équivalence ; afin de donner un sens précis aux expressions « il faut que », « il suffit que », « condition suffisante », « condition nécessaire ».

Quatre phases dans la séance de 2 heures :

- Tri de suites (élèves en autonomie, 25 min) ; problématisation de la question de l'unicité et reconnaissance de l'absence et du manque d'une définition (cours dialogué, 25 min)
- Production par les élèves de candidats-définitions (élèves en autonomie, 10 min)
- Evaluation des candidats-définitions (cours dialogué, 25 min)
- A partir de la version formelle de (2), la renforcer jusqu'à obtenir (1). (cours dialogué, 20 min)

Dans la suite du texte, nous détaillons quelques moments clés du déroulement de la séance lors de la première expérimentation, en novembre 2016. La séance, avec de petites variantes, a été reproduites 12 fois : dans deux classes de Terminale, chaque année de 2016-2017 à 2021-2022.

Aperçus sur la phase 1

Le professeur distribue le document suivant (appelé par la suite « herbier » ou « bestiaire ») et explique le fonctionnement de la séance, en précisant qu'il ne jouera qu'un rôle de régulateur et de secrétaire en écrivant au tableau certaines choses dites par les élèves, qu'elles soient justes ou fausses. On explique aux élèves le déroulement de la phase 1 et on leur demande de préparer en binômes leurs arguments pour la discussion collective. Le professeur annonce qu'il ne prendra pas parti, et que chaque binôme devra tenter de convaincre la classe de la pertinence de son classement.

Parmi les suites définies ci-dessous, quelles sont celles dont vous diriez qu'elles tendent vers $+\infty$?

Pour tout entier naturel n, on pose :

$a_n = \dfrac{n}{100} - 1000$ $\qquad b_n = 10000 - 1000 \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ $\qquad c_n = \sqrt{\sqrt{n}}$

$d_n = (-1)^n \times n$ $\qquad e_n = 10 \times (-1)^n + n$ $\qquad f_n = \left((-1)^n + 1\right) \times n$

$g_n = \left((-1)^n + 2\right) \times n$ $\qquad h_n = 1000n - \dfrac{n^2}{1000}$ $\qquad i_n = \left|\dfrac{1000}{\cos(n)}\right|$

Rangez ces suites dans le tableau suivant ; lorsque vous rangez une suite dans la colonne du milieu, notez la raison pour laquelle vous le faites.

Je pense que la suite tend vers $+\infty$	Je ne sais pas	Je pense que la suite ne tend pas vers $+\infty$

Document 1. L'herbier – la tâche de tri.

Tous les binômes se sont toujours lancés avec entrain dans le classement. On observe une certaine réticence à utiliser la colonne « je ne sais pas » ; il peut être bon d'inciter les élèves à s'en servir. Certains élèves sont bloqués à l'idée de donner une mauvaise réponse ; il faut alors les rassurer et les inciter à prendre parti. Lorsqu'il y a dissension au sein d'un binôme, il est bon de leur demander de noter leurs arguments respectifs, pour préparer la discussion à venir. Avant de lancer la discussion collective, s'assurer que tous les binômes ont eu le temps d'étudier suffisamment de suites (au moins jusqu'à la suite *f*). Les suites *h* et *i* ne servent qu'à occuper les binômes les plus rapides.

Lors de la discussion collective sur le classement, l'accord arrive rapidement pour les suites *a*, *b* et *c*. Le premier désaccord profond porte sur la suite *d* : certains pensent qu'elle tend vers plus l'infini et vers moins l'infini, donc elle est classée dans la colonne « je pense que la suite tend vers plus l'infini » ; beaucoup la mettent dans la colonne « je ne sais pas » et certains dans la colonne « ne tend pas vers plus l'infini ». Il en va de même pour la suite *f*. Un autre désaccord porte sur les suites *e* et *g*, réparties entre « tend vers plus l'infini » et « je ne sais pas ».

Sur douze séances, il n'est arrivé qu'une seule fois que les élèves soient tous d'accord sur le classement final, en ne mettant aucune suite dans la colonne « je ne sais pas ». En cas de désaccord persistant, si le professeur demande pourquoi on n'arrive pas à se mettre d'accord, les élèves réalisent qu'ils ne savent pas *vraiment* ce que veut dire « tendre vers plus l'infini » ; ce n'est donc pas leur description de telle ou telle suite qui est imparfaite, mais bien le critère de tri qui demande à être explicité de manière à permettre des décisions consensuelles. Parfois, ils vont jusqu'à dire qu'il leur manque une définition. Sinon, le professeur peut poser cette question : « que nous manque-t-il ? » A ce moment, le mot « définition » est prononcé par un élève, ce qui permet de passer à la phase 2.

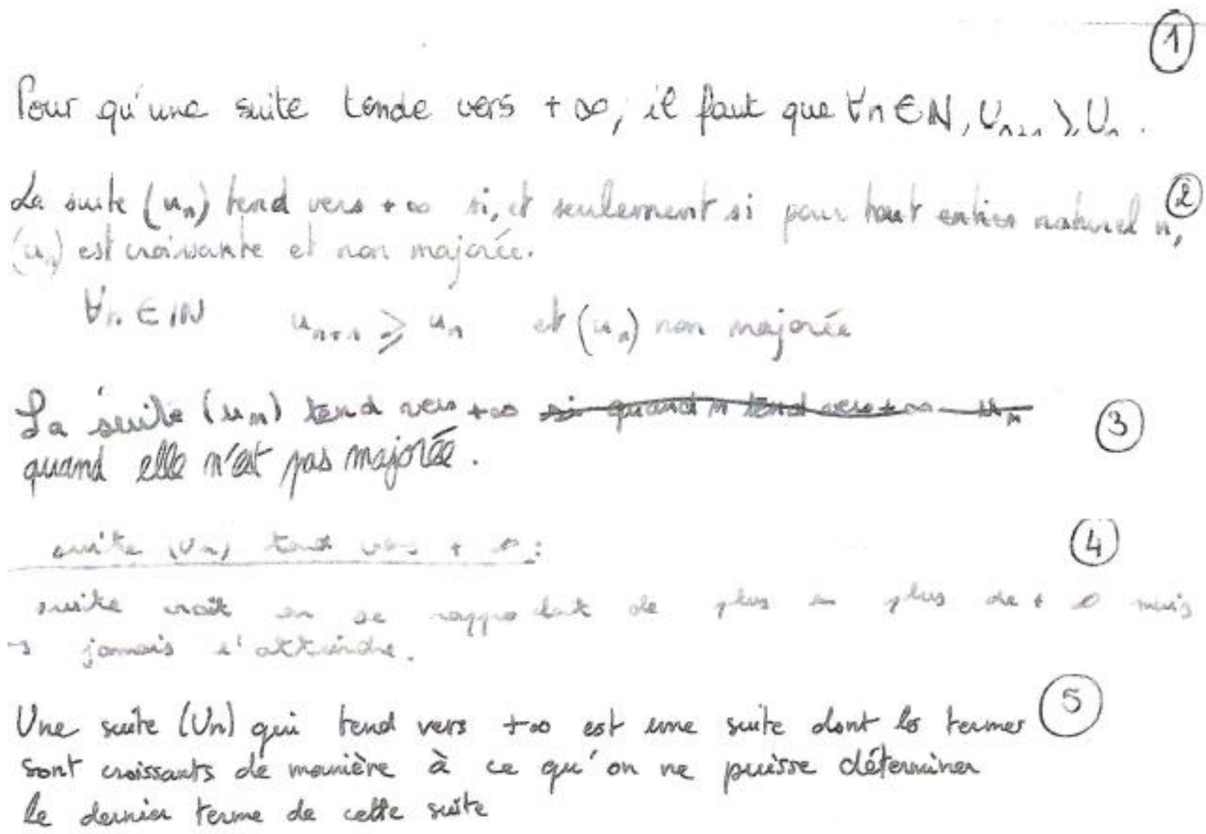
Dans le cas unique où les élèves étaient tous d'accord, le professeur a demandé aux élèves de démontrer qu'une des suites considérées tendait bien vers plus l'infini. Comment faire une telle démonstration ? à partir de quoi ? Le mot « définition » a alors été formulé, ce qui permet de passer à la phase 2.

Aperçus sur la phase 2

Avant que les élèves écrivent leurs propositions de définition, le professeur précise que la définition cherchée *doit assurer l'unicité de la limite* ; par conséquent la définition de « tendre vers $+\infty$ » ne doit pas être vérifiée par les suites *d* et *f*, alors qu'elle doit l'être par *e* et *g*.

En quatorze séances, aucun binôme n'a proposé une définition correcte, ce qui était parfaitement attendu. Les propositions sont plus ou moins formalisées, et montrent des bricolages plus ou moins heureux autour des notions de « non majoré » et de « croissant ». Rappelons que le but de cette phase n'est pas d'obtenir une définition, mais le support du travail pour la phase 3.

Voici une sélection de propositions. Dans le document ci-dessous, l'enseignante a déjà sélectionné une partie des candidats-définitions produits en fin de 1ère heure, et a préparé le document ci-dessous comme support du travail de 2ème heure. Elle a numéroté les candidats pour faciliter la discussion. Pour que la phase 3 s'amorce facilement, on place au début des candidats-définitions que les élèves rejetteront facilement.



(1) Pour qu'une suite tende vers $+\infty$, il faut que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geqslant U_n$.

(2) La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, et seulement si pour tout entier naturel n, (u_n) est croissante et non majorée.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geqslant u_n$ et (u_n) non majorée

(3) La suite (u_n) tend vers $+\infty$ ~~si quand n tend vers +∞ u_n~~ quand elle n'est pas majorée.

(4) suite (U_n) tend vers $+\infty$:

suite croît en se rapprochant de plus en plus de $+\infty$ mais sans jamais l'atteindre.

(5) Une suite (U_n) qui tend vers $+\infty$ est une suite dont les termes sont croissants de manière à ce qu'on ne puisse déterminer le dernier terme de cette suite

Document 2. Proposition de définitions de « $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$ »

Aperçus sur la phase 3

On trouvera dans (Chorlay, 2019) des comptes rendus plus complets des échanges des phases 3 et 4, ainsi que des propositions d'outils théoriques inspirés de (Ouvrier-Buffet, 2015) permettant d'analyser la nature des interactions élèves-enseignante et le degré de dévolution de la tâche de construction de définition. Quelques extraits d'une des deux expérimentations de 2016 permettent d'illustrer la manière dont les élèves avancent dans le travail d'évaluation des candidats-définitions, à accepter ou à rejeter ; assez vite, les rejets conduisent à des propositions de reformulation.

Ainsi, la notion de « croissante » est rapidement affaiblie en « croissante à partir d'un certain rang » :

> Ens. : alors, on y va … (…) on fait des maths. On se concentre à nouveau. Alors Angèle, qu'est-ce que tu penses de la première proposition « pour qu'une suite tende vers +oo il faut que pour tout *n*, *u*(*n*+*1*) soit supérieur à *u*(*n*) »
>
> Angèle : j'pense que c'est faux parce qu'une suite elle peut être décroissante puis croissante

C'est aussi l'occasion de voir qu'une propriété peut être modifiée : ici dans le sens de l'affaiblissement ; on l'espère, plus tard, dans le sens du renforcement (pour passer de « non majoré » à « tend vers +∞ »).

Le rôle de l'herbier est vite saisi :

> Ens. : (…) Est-ce qu'il y en a d'autres qui ont d'autres arguments – il faudrait peut-être noter les arguments, pour évacuer les définitions qui ne vous plaisent pas - … Mattias

Mattias : si on regarde b_n, on peut voir que la suite elle est croissante, et elle tend vers 10000

Ens. : oui, si on prend les suites qui sont dans l'herbier, elles peuvent servir de … de quoi ?

Mattias : d'exemple

Ens. : contre-exemple.

Les échanges suivants montrent le rôle discret mais essentiel de l'enseignant dans la demande d'une explicitation des aspects logiques ; ici des implications, plus loin des quantificateurs.

Ens. : d'accord, OK. Alors, du coup, la 3, qu'est-ce que vous en pensez ? là je peux effacer ça … Alors, la 3 c'est : « la suite tend vers +oo quand elle n'est pas majorée ». Rémi ?

Rémi : ça a l'air pas mal parce que … c'est une condition nécessaire et suffisante.

Ens. : alors, d'abord, est-ce que la phrase c'est une condition nécessaire et suffisante qui est écrite ? … c'est pas très clair ; le « quand » en mathématiques … qui est l'auteur de cette phrase … c'est Rémi ! Rémi, ce « quand » qu'est-ce que tu voulais dire ?

Rémi : je voulais dire « si »

Ens. : alors, tu voulais dire – du coup on va l'écrire : « si $u(n)$ n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$ ». Alors, maintenant qu'elle est écrite de façon à ce qu'on comprenne tout … quelle est la condition suffisante ; du coup qu'est-ce que vous en pensez ? Isabelle

Isabelle : on a vu dans le cas d'une suite que ça faisait [geste décrivant $(-1)^n \times n$] … d'un côté ça tend vers l'infini, de l'autre aussi vers –oo

Ens. : c'était d_n je crois, dans la liste

Isabelle : elle était pas majorée mais elle tendait pas forcément vers +oo, parce qu'elle était pas non plus minorée.

Ens. : alors, il faudrait qu'elle soit minorée pour tendre vers $+\infty$

Isabelle : je pense

On observe ci-dessus la stratégie que Lakatos appelait *monster-barring* (interdiction des monstres) : on rend le candidat-définition plus strict en ajoutant une clause permettant d'exclure une pathologie spécifique (Lakatos, 1984) (Ouvrier-Buffet, 2015). Comme on cherche une définition sous laquelle $(-1)^n \times n$ ne tombe pas, passer de « non majoré » à « non majoré mais minoré » est une manœuvre raisonnable, d'ailleurs souvent observée.

Aperçus sur la phase 4

La phase 4 passe par la reconnaissance du fait que : (a) la notion de croissance (fût-ce à partir d'un certain rang) n'est ni nécessaire ni suffisante à la divergence vers $+\infty$, elle ne peut donc pas jouer de rôle dans la définition ; on peut cependant annoncer aux élèves que leur idée (très présente dans ces échanges) selon laquelle une suite croissante et non majorée tend « forcément » vers $+\infty$ est juste, et que ce sera un théorème prochainement démontré en cours. (b) le fait d'être « non majoré » est une condition nécessaire mais non suffisante de divergence vers $+\infty$. Selon les années, le passage au registre formel vient de l'enseignant ou des élèves ; dans ce dernier cas, la transition entre les phases 3 et 4 est insensible.

Ens. : Alors, du coup, il y a un groupe retardataire qui propose une autre définition ; on va l'appeler 6. Alors, il y a écrit ça sur la feuille [copie au tableau] Alors … Paul, qu'est-ce que vous en pensez de la proposition 6 : « quel que soit …(tout le monde arrive à l'écrire la phrase, comme l'on écrite Maxendre et Georges ?) pour tout M appartenant à **R** il existe n appartenant à **N** tel que u_n est plus grand, strictement, que M »

[écrit au tableau :] $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad u_n > M$

Ens. : Alors, qu'est-ce que ça veut dire ça pour la suite ? … que la suite n'est pas majorée. D'accord, Maxendre et Georges ? On avait dit que c'était … qu'on allait le retenir parce que c'était une condition … [les élèves : nécessaire] nécessaire, mais pas suffisante, d'accord ? Donc ça c'est en fait « $u(n)$ non majorée ». Est-ce que l'idée que ce ne soit pas majoré c'est une idée importante pour dire que ça tend vers +∞ ? Est-ce qu'on le garde ? … on a dit que, si c'est pas une condition suffisante, ça veut dire qu'il faut quoi ? … il en faut une autre, il faut qu'on en rajoute une autre, d'accord ?

[Un élève re-propose d'ajouter "et minorée", explicitement pour éliminer$(-1)^n \times n$]

L'enseignante reformule "non majoré" et souligne le fait que ça ne garantit pas plus que l'existence, pour chaque M, de un rang n pour lequel $u_n > M$. Elle dessine un repère et place un nuage de point de type « suite », deux horizontales de côtes M et M', illustrant sur le schéma le sens de cette existence. Au-delà d'un tel rang n, rien n'est imposé à la suite. La difficulté est que les élèves, pour exprimer le fait que la suite doit « rester au-dessus » de M au-delà du rang n, pensent plutôt à reproposer la croissance (comparaison entre termes de la suite, du type $u_{n+1} \geq u_n$) plutôt que la condition visée (comparaison entre certains $u_{n'}$ et M).

Ens. : Et comme dit Andréa, il ne faut pas … qu'elle repasse en dessous. Il faut qu'on l'oblige à faire quoi ?

Elève 1: à rester au-dessus.

Ens. : à rester au-dessus. Donc qu'est-ce qu'il faut changer dans cette phrase ?

Elève 2 : monotone ?

Elève 3 : strictement croissante

Ens. : non, on a dit que la monotonie, ce n'était pas une condition pour notre définition. Comment est-ce que vous pouvez le traduire : « il faut qu'elle reste au-dessus » ? Allez, je suis sûr que tout le monde peut le faire. … Maxime ?

Maxime : $u(n+1)$ supérieur à M

Ens. : alors attend, écris-moi une phrase complète s'il te plaît. [sous la dictée] « pour tout M appartenant à **R**, (…) » alors on va l'appeler « n indice M » pour dire qu'il dépend, parce qu'à chaque fois que je choisis un M, c'est pas forcément le même, on est d'accord ? [élève : oui] donc « il existe un indice, un rang … » [sous la dictée] « u_n supérieur à M, et u_{n_M+1}supérieur à M ».

Quoique fausse, cette proposition marque un tournant important car, dans le symbole à deux places X_Y, elle initie un travail sur la place de la variable Y. En outre, et cela s'est produit à plusieurs reprises, la proposition « *u(n+1) supérieur à M* » s'avère être un moyen, inspiré de la démonstration par récurrence, pour indiquer une propriété héréditaire :

Ens. : alors, qu'est-ce que vous en pensez ? [silence] … faites des dessins, faites des dessins… tu voulais l'empêcher de redescendre, hein ?

Maxime : mais oui, mais ça veut dire qu'après $u(n+1)$ ça devient $u(n)$ et, le $u(n+1)$ suivant ça sera toujours supérieur…

Ens. : alors, tu es d'accord que comme ça ça va pas, parce que là y'en a qu'un … est-ce que vous voyez ce que veux faire Maxime ?

Maxime : (…) $u(n+x)$

S'appuyant sur le fait que des élèves demandent à Maxime d'expliquer qui est son « x », l'enseignante reformule en demande de quantification : « pour un x » ou « pour tout x » ? On arrive à la définition « additive » :

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_M \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n_M+n} \geq M.$$

Ce candidat définition est accepté par la classe. Le passage à la définition implicative (explicite ou implicite) peut être mené par l'enseignant. En novembre 2016 il a été proposé par les élèves eux-mêmes lorsque l'enseignante leur a demandé de « simplifier » leur candidat-définition. Sous la dictée de Maxendre, l'enseignante écrit au tableau :

$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\, n_M \in \mathbb{N}\ \ tel\, que\, \forall\, n > n_M \quad u_n > M$

Variantes et prolongements

A condition que l'enseignant veille à ne pas orienter les débats qu'il encadre, cette séance permet aux élèves d'explorer la notion de suite qui tend vers plus l'infini de diverses façons, dans lesquelles l'oralité joue un rôle important. Au fil du temps, d'une part les deux enseignants ayant mis en œuvre cette séance ont effectué différentes modifications ; d'autre part, les propositions des élèves ont été plurielles.

Variantes du côté des enseignants

Lorsque la définition d'une suite majorée par une nombre réel est formulée en nommant M le majorant, on retrouve cette lettre M dans la définition d'une suite qui tend vers plus l'infini (comme on l'a vu ci-dessus). Or, à l'oral, cette définition avec les nasales M et N est difficile à bien entendre. Dès la deuxième année, la définition d'une suite majorée a été formulée en disant : il existe un réel A tel que… etc.

L'herbier a été modifié. Les suites h et i de l'herbier ont été remplacées par $h_n = 10^6 \times \cos(n)$ et $i_n = n + 4\sin(n)$. Ces deux suites sont de meilleurs appuis comme contre-exemples aux propositions des élèves.

La première fois où cette séance a été mise en œuvre, l'une des deux classes n'a pas abouti à la formulation de la définition en 2h, l'enseignant n'ayant sans doute pas assez cadré les débats ; il a fallu prendre 20 minutes sur le cours suivant pour conclure. Le cadrage en temps indiqué précédemment résulte de l'expérience acquise, ce qui a ensuite toujours permis d'aboutir en 2h.

Les premières années, les élèves ont eu du mal à se détacher des suites croissantes non majorées ; à partir du moment où l'enseignant a formulé clairement que le fait qu'une suite croissante non majorée tende vers plus l'infini sera un théorème qui sera démontré dans le cours, mais ne peut constituer la définition cherchée, cette difficulté a été levée.

De même, la nécessité d'imposer l'unicité de la limite comme condition pour la définition cherchée n'était pas claire pour les enseignants lors de la première séance ; or, comme expliqué ci-dessus, ceci ne peut pas venir des élèves.

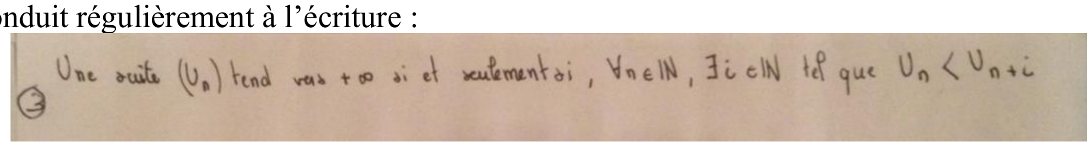
La manière de présenter les candidats-définition à la classe a pris différentes formes selon les années : écriture sur des bandelettes numérotées, collées et photocopiées (attention au crayon à papier qui ne passe pas à la photocopie !), utilisation de posters, définitions écrites par l'enseignant à l'ordinateur puis projetées…

Mener cette séance a été au début une prise de risque assumée et enrichissante pour les enseignants ; leur pratique des débats s'est ainsi affermie et leur manière d'écouter les élèves s'est affinée.

Variantes du côté des élèves

Les classes sont toutes différentes, et les débats s'en trouvent plus ou moins animés ; mais les élèves ont toujours su s'écouter et échanger leurs arguments. Devant la difficulté de parler pour formuler des pensées qui sont d'abord floues, les élèves inventent un vocabulaire original qui varie d'une année à l'autre.

La notion qui revient souvent est celle de suite « globalement croissante » pour décrire une suite non monotone (même à partir d'un certain rang) qui tend vers plus l'infini. Cette notion conduit régulièrement à l'écriture :

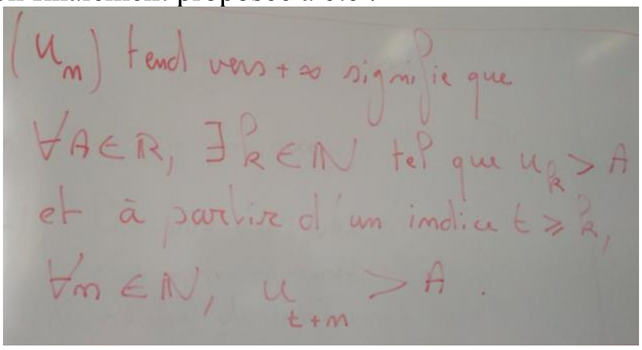

3 Une suite (U_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que $U_n < U_{n+i}$

Avec cette formulation (ajouté à la condition : suite non majorée), l'élève se situe dans un entre deux, entre la condition *suite non majorée* qui est trop faible et la condition *suite non* *majorée et croissante* qui est trop forte. C'est peut-être une des raisons pour lesquelles la définition finale est souvent formulée ainsi : $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{k+n} \geq A$.

Une année, pour exprimer le « quel que soit A » de la définition, une élève a inventé l'expression « A flottant », ce qui a permis à la classe de mieux comprendre cette partie de la définition, et le fait que k (dans la définition écrite juste au-dessus) dépendait de A.

Une fois dans une classe, les élèves ont exprimé la notion de suite qui tend vers plus l'infini de manière dynamique, par exemple avec ce type d'expression (écrite au tableau par l'enseignant sous la dictée d'un élève) : « $(d_n): Si\ (d_n)\ est\ partie\ vers +\infty\ elle\ ne\ peut\ pas\ revenir$ ».

Du coup, la définition finalement proposée a été :



Document 3. Une formulation intermédiaire.

Dans cette définition, l'indice a été noté *t* parce qu'il s'agit d'un temps : la formulation initiale était : quel que soit A, la suite n'est pas majorée par A et à partir d'un certain temps, tous les termes de la suite sont plus grands que A.

Prolongements

A court terme, on peut demander aux élèves de classer les suites qui étaient placées dans la colonne « je ne sais pas » à l'aide de la définition obtenue. On peut aussi proposer de nouvelles suites à classer.

Ce travail effectué sur la notion de suite qui tend vers plus l'infini permet aux élèves de construire assez facilement et assez rapidement la définition d'une suite convergente.

Les démonstrations du cours, bien qu'elles restent difficiles, deviennent accessibles pour les élèves qui n'ont pas de grandes difficultés en mathématiques. Les enseignants ayant mis en œuvre cette séance observent une vraie différence dans leur cours sur les limites de suites lorsqu'ils comparent leurs pratiques avant et après ce travail : les élèves ne subissent plus ce cours, qui n'est plus hermétique.

Une plus grande capacité des élèves à mobiliser la définition a été observée, ainsi qu'une meilleure mémorisation à long terme.

Plus généralement, et c'est essentiel à nos yeux, de nombreux élèves aiment le travail intellectuel original suscité par cette séance, susceptible d'éveiller en eux le goût des mathématiques.

Références bibliographiques

Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques. Etude des niveaux de preuve dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, *31*(2), 191-228.

Chorlay, R. (2019). A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, *5*(3), 267–314.

Lakatos, I. (1984. Edition originale 1976). *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique.* Traduction de l'Anglais : N. Balacheff et C. Laborde. Paris : Hermann.

Ouvrier-Buffet, C. (2015). Modéliser l'activité de définition : vers de nouvelles perspectives en didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *35*(3), 313-356.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 71–93.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *3*(3), 307-341.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(2), 139–190.

Roh, K.H., & Lee, Y.H. (2017). Designing tasks of introductory real analysis to bridge the gap between student's intuition and mathematical rigor: the case of the convergence of a sequence. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(1), 34-68.

Schneider, M. (2007). Entre recherche et développement : quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire ? In J. Traglova, G. Aldon, G. Gheudet and Y. Matheron (Eds.), *Ressources pour l'enseignement des mathématiques : conception, usage, partage* (pp. 21-36). Lyon : INRP.

Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: a framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(2), 57-75.