Académie, école et mathématiques

Jean-Pierre Kahane

Au début de l'année 2005 un texte signé de sept académiciens et intitulé « Les savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique » a fait grand bruit. Comme il continue à en faire, je désire apporter ma contribution à son histoire et présenter mon point de vue lorsqu'il était en gestation.

En juillet 2004 l'Académie des sciences a émis un avis sur l'enseignement scientifique et technique dans l'enseignement obligatoire que certains mathématiciens ont considéré comme inadmissible. J'en connais les défauts et les lacunes, puisque j'en étais l'un des rédacteurs. Certains de ces défauts avaient d'ailleurs été corrigés à la suite du débat précédant le vote, auquel d'autres mathématiciens avaient participé (je me souviens d'une excellente intervention de Bernard Malgrange). Mais les opposants n'avaient pas pris part au débat. Il est apparu au bureau de l'Académie qu'une contribution a posteriori de la section de mathématique serait bienvenue, et pourrait relancer la discussion au sein de la compagnie (comme on dit). La section de mathématique, dont le délégué était alors Alain Connes, s'est réunie en septembre, a recueilli des avis divers, et a chargé un petit groupe, constitué de Jean-Pierre Demailly, Laurent Lafforgue et moi, de rédiger un projet qui puisse exprimer la position de la section sur les problèmes en cause. Un courriel a suivi, entre nous trois, qui a contribué à enrichir et pour une partie à rectifier certaines des positions initiales, mais n'est pas parvenu à un accord : le texte préparé par Demailly et Lafforgue ne pouvait pas avoir mon agrément, et la version que j'avais rédigée ne leur convenait pas. La section de mathématique a juste tiré un bilan de faillite. Quelques semaines plus tard paraissait dans une revue bien répandue dans les milieux politiques un texte reproduisant, à peine remaniée, la dernière contribution de Demailly et Lafforgue à notre correspondance électronique. Je n'ai pas jugé bon à l'époque de m'engager dans une controverse publique. Mais comme le débat se poursuit à partir de ce texte, cosigné par Roger Balian, Jean-Michel Bismut, Alain Connes, Pierre Lelong et Jean-Pierre Serre, il me parait utile maintenant de verser au débat ce que j'avais écrit il y un an en cherchant à tenir compte le mieux possible de l'avis de Demailly et Lafforgue, mais sans aucunement travestir mes propres positions. Ce n'est pas l'ensemble de ce que je peux dire du sujet, parce que j'ai l'avantage sur la plupart de mes confrères d'avoir travaillé avec d'autres sur les perspectives de l'enseignement des mathématiques, en particulier, depuis dix ans, au comité scientifique des IREM puis à la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (dont, je dois le dire, le physicien Roger Balian a été un membre actif et écouté). Mais je ne vois pas de raison de conserver ce texte hors du présent débat. Voici donc ce matériau brut, à la disposition de qui veut en prendre connaissance.

Il y a des époques où l'avenir semble tracé, même s'il est tracé de façon très différente pour les uns et les autres. Les jeunes y cherchent leur voie, l'enseignement les y prépare.

À notre époque, l'avenir est brouillé et incertain, les jeunes le sentent, l'enseignement s'en ressent. Le phénomène est mondial, mais se traduit de façon différente suivant les pays. Nous n'avons pas la prétention d'apporter des solutions incontestables et universelles, mais de poser quelques jalons.

L'avis de l'Académie sur l'enseignement scientifique et technique dans la scolarité obligatoire s'est borné pour l'essentiel à répondre à la question que lui avait posée Claude Thélot, sur le socle de connaissances nécessaires, sans trop s'enfermer dans ce cadre, et en tirant largement parti de l'expérience acquise par l'Académie avec le lancement et le succès de « la main à la pâte ». Nous souhaitons faire éclater ce cadre pour dire notre opinion sur d'autres sujets que l'enseignement des sciences, et pour ajouter quelques éléments qui nous semblent importants sur l'enseignement des mathématiques.

Le préambule de l'avis nous ouvre la voie, en déclarant qu'*« aucune des branches de la science ne se déboîte des autres composantes d'une éducation idéale : humanités, philosophie, histoire, éducation civique, géographie, langues modernes, langues anciennes... toutes ont des résonances intimes avec tel ou tel fragment de la science, comme elles en ont les unes avec les autres. »* Il donne d'ailleurs une perspective tonique pour l'enseignement à partir même de nos incertitudes : *« dans l'impossibilité où nous sommes de prévoir les évolutions de nos sociétés, le meilleur viatique que nous puissions donner aux enfants est de développer chez tous, et de façon solidaire, les facultés qui ont permis dans le passé la survie et l'évolution de l'espèce humaine : la curiosité qui vise à connaître et à comprendre, la capacité de formaliser et de transmettre les savoirs qui est à la base de tous les progrès passés et futurs, et l'inventivité qui permet de nous outiller dans tous les domaines. »*

Le rôle de l'école et le rôle des familles

Sans nier d'autres aspects, l'école doit développer les potentialités intellectuelles des enfants, en leur transmettant des savoirs fondamentaux, en leur donnant l'habitude et les outils de la réflexion, en leur faisant découvrir par la main et par la tête des choses belles et stimulantes. Les richesses intellectuelles, au contraire des richesses matérielles, peuvent être accumulées simultanément par un nombre de personnes arbitrairement grand. L'abaissement des exigences ne se justifie pas par une incapacité congénitale du plus grand nombre à accéder aux savoirs, et il a pour conséquence de rendre plus difficile aux enfants socialement les moins favorisés l'accès aux études supérieures. L'école doit être exigeante pour tous les élèves - sous peine de pénaliser les moins favorisés - et permettre en même temps l'épanouissement des talents particuliers. L'école n'a pas vocation à courir après toutes les nouveautés, mais à évoluer, en se gardant des effets de mode, pour inclure les nouveaux acquis fondamentaux du temps présent. La formation des professeurs des écoles et des collèges mérite par conséquent une grande attention, de la part même des scientifiques ayant la vue la plus large des développements contemporains. Il ne faut pas opposer, ni même distinguer, le rôle de l'école pour instruire et son rôle pour éduquer : il n'y a pas de bonne instruction sans apprentissage de la vie en groupe , sans développement de l'esprit critique ni de la capacité à communiquer. Cependant l'école ne peut se substituer aux parents, et c'est parfois une véritable éducation des parents qui serait à faire pour qu'ils valorisent les études . Là encore, une forte interaction entre scientifiques respectés et associations de parents d'élèves pourrait être bénéfique.

L'enseignement le plus fondamental

Nous déclarons que l'enseignement le plus fondamental est celui du français. Comme mathématiciens, nous n'avons pas de compétence particulière en matière d'enseignement du français. Mais nous constatons que notre langue maternelle nous est indispensable pour penser et pour vivre-et cela n'est pas particulier aux mathématiciens. Nous constatons, jusque parmi nos étudiants, que ceux qui ne lisent pas et qui ne savent pas écrire sont infirmes dans la vie comme dans les études. À l'école élémentaire, rien n'est plus important que l'apprentissage de la lecture et de l'écoute, de l'écriture et de la parole. La décomposition en syllabes, les dictées, les récitations de poèmes, la compréhension des règles de l'orthographe et de la diction préparent utilement à tous les autres apprentissages. Nous reviendrons sur l'importance du calcul (lire, écrire, compter). Pour le moment, remarquons seulement que compter et conter se prononcent de la même façon, et sont des mots de la même famille. Le calcul n'est pas étranger à la langue, et il est très bon qu'il soit enseigné par le même professeur que le français.

D'autres enseignements fondamentaux

Les sciences expérimentales donnent l'occasion aux enfants d'allier le contact avec des objets concrets, la réflexion, l'échange avec les autres enfants, l'utilisation des nombres et des figures, et la pratique du français écrit et parlé. En particulier, les expériences donnent lieu à des mesures de grandeurs, en liaison étroite avec l'apprentissage du calcul. Dès l'école élémentaire, l'histoire et surtout la géographie donnent aux enfants des repères culturels essentiels. Dessiner des cartes, interpréter des plans de ville sont une des voies d'appréhender l'espace, ce qui est aussi l'un des buts de la géométrie. Les langues autres que le français et l'anglais devraient avoir leur place à l'école et au collège, et la perspective du multilinguisme devrait nous séduire plutôt que nous effrayer. Notre situation en Europe devrait permettre aux petits Français de parler plusieurs langues, et ce serait un grand atout pour l'avenir.

Les mathématiques

On constate, en France comme ailleurs, ce que les Anglo-saxons appellent « innumeracy ». Ne pas savoir faire mentalement les opérations les plus simples, se tromper grossièrement dans des ordres de grandeurs, ne rien comprendre aux nombres et aux figures, ce sont des handicaps fréquents et graves. À un autre niveau, l'ignorance de ce qu'est une démonstration mathématique a de sérieux inconvénients culturels et pratiques, et nous sommes confrontés à cette situation jusque parmi nos étudiants. Devant ces constatations beaucoup d'idées ont été lancées, d'excellentes initiatives ont été prises pour rendre l'enseignement des mathématiques plus efficace et attrayant, et des réflexions d'ensemble ont été menées à différents niveaux. On peut se référer aux rapports établis par la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques depuis sa création en 1999, qui eux-mêmes faisaient suite à d'excellents travaux menés au cours des années 1980, par la COPREM en particulier pour les collèges et par la COPIRELEM pour les écoles. Nous allons reprendre ici très brièvement certaines de ces idées et en ajouter d'autres. L'atout pour leur réalisation est l'existence en France d'un nombre considérable de professeurs d'école et de professeurs de mathématiques compétents et désireux d'oeuvrer à une rénovation de l'enseignement. L'obstacle majeur a été et reste que les pouvoirs publics ont réduit anarchiquement horaires et programmes, de sorte que la rénovation fait plutôt figure de reconquête.

Le calcul

Chez les Chinois de l'époque classique comme chez Platon, l'apprentissage des nombres est fondamental dans l'éducation. Il l'est resté, en devenant plus important aujourd'hui que jamais. Il s'est simplifié au cours des âges . Un enfant d'aujourd'hui sait répondre mieux qu'Hippias à la question que lui pose Socrate : *« toi qui es si savant, tu saurais répondre avec la plus grande célérité et la plus grande exactitude à la question que font trois fois sept cents ? »* (Hippias répond : *« oui, je le saurais »*). Il apprend les nombres négatifs, et il faut qu'il les apprenne parce qu'il connaît déjà les thermomètres et les ascenseurs, alors que Lazare Carnot les excluait de l'enseignement, sinon des mathématiques elles-mêmes. Il manie des développements décimaux, et même de longs développements décimaux, qui donnent une première idée de ce qu'est un nombre réel, dès qu'il a en mains une calculette. La calculette lui rend également familiers l'usage des puissances de 10, le maniement de très grands nombres, et la réalisation de toutes les opérations usuelles. On est loin d'avoir tiré parti, dans l'enseignement à tous les niveaux, des ressources des calculettes et des ordinateurs pour introduire ou réintroduire des notions mathématiques importantes (les fractions continues, les nombres irrationnels par exemple).

Cela dit, savoir compter signifie autre chose que savoir manier une calculette. C'est d'abord être entraîné au calcul mental, ce qui nécessite de connaître la table de multiplication et un peu plus. Nous savons par les travaux de Stanislas Dehaene que la table de multiplication occupe beaucoup de place dans notre cerveau, et on peut être tenté de ne plus la considérer comme indispensable. Ce serait une erreur. Nous avons besoin de mobiliser rapidement des connaissances-réflexes, et les premiers résultats concernant les opérations sur les petits nombres entiers sont de celles-là.

Le terme de « savoir » n'est d'ailleurs pas bien adapté à l'apprentissage du calcul. Cet apprentissage doit être permanent, et articuler convenablement tous les outils à notre disposition : le calcul mental, le calcul sur papier, le calcul assisté par les outils informatiques. Tous les professeurs le savent, et des efforts louables ont été faits, dès les petites classes de l'école, pour lier le calcul et le raisonnement sur les nombres. Mais l'exercice du calcul comme gymnastique de l'esprit n'est pas pratiqué comme il se devrait, de manière continue au cours des études. C'est là, sans doute, la défaillance principale de l'école en matière de calcul.

Les nombres sont pour les enfants -comme pour nous autres mathématiciens- d'une richesse infinie. Nous savons que nous avons des manières différentes de les appréhender, et par exemple que chaque individu a sa manière propre de visualiser les petits nombres et les grands nombres. Heureusement la numération décimale permet une unification des points de vue des individus et aussi des peuples ($97+5=102$ se comprend partout de la même façon, même si on l'exprime de façon bien différente en français et en allemand). Grâce à la numération décimale un enfant peut découvrir par lui même, ou apprécier si on le lui montre, qu'on peut toujours ajouter 1 à un nombre donné, si grand soit-il : c'est une excellente approche de l'infini. Lorsque s'introduisent les nombres décimaux et les fractions, c'est un nouvel univers qui s'ouvre. Le calcul sur les fractions mérite d'être connu, compris et pratiqué comme un des beaux acquis culturels de l'humanité.

Et les nombres sont encore bien autre chose ; ils interviennent dans une foule d'activités humaines : dénombrements, mesures de grandeurs, repérages. La mesure des grandeurs mérite une mention spéciale. Elle est importante dans toutes les sciences, et elle doit être pleinement assumée en mathématiques, en particulier au sujet des grandeurs géométriques : longueurs, aires, volumes. La relation entre mesure et dimension est elle aussi d'une très grande richesse, et la géométrie fractale en dépend complètement. Au niveau élémentaire, il est très heureux que l'on se permette à niveau d'écrire 1m=100cm sans craindre de s'entendre dire que l'on ne comprend rien aux nombres. À un niveau plus avancé, la meilleure conceptualisation du résultat d'une mesure est de le considérer comme une variable aléatoire .

Enfin, mais on peut aussi commencer par cela, le calcul des ordres de grandeurs et le calcul approché jouent en pratique et en théorie un rôle essentiel, en complément du calcul exact. C'est par là que le calcul mental permet les évaluations rapides qui parfois remplacent et parfois contrôlent les machines. En présence de données chiffrées, le développement de l'esprit critique passe par ce calcul rapide. Comme nous baignons dans un monde numérisé, il est plus important que jamais.

L'entraînement au calcul approché et à l'appréciation des ordres de grandeurs devrait commencer très tôt et se poursuivre tout au cours des études. À une étape assez avancée, le calcul exact se formalise dans l'algèbre et le calcul approché dans l'analyse. Le va-et-vient entre les deux pourrait être l'un des fils conducteurs de l'enseignement des mathématiques.

La géométrie et les probabilités, et une remarque générale

Un mot d'explication est nécessaire pour une présentation jointe des deux domaines. Les deux, à un niveau avancé, reposent sur des théories axiomatisées. Mais les deux, à un niveau élémentaire, éclairent en les conceptualisant une expérience commune, une pratique (regarder, jouer) et un premier répertoire de langue (les figures de la géométrie, les chances et les bonnes stratégies de jeu). La géométrie, sous la forme de l'examen et de la classification des figures, s'introduit très tôt à l'école et c'est très bien ainsi. Il faut maintenir et développer son apprentissage à tous les niveaux, en renforçant la place de la géométrie au lycée. Il est bon de réviser constamment les sujets et les méthodes, et par exemple d'introduire aujourd'hui explicitement les groupes de transformations et leurs invariants (qui en géométrie euclidienne permettent de restaurer les cas d'égalité des triangles comme très bon instrument). Il sera bon demain d'initier aux géométries non euclidiennes, sphérique et hyperbolique, et aux groupes correspondants. La géométrie a toujours été une discipline où se marient imagination et rigueur, et l'esprit géométrique est un atout dans une foule d'activités humaines.

Le calcul des probabilités, sous la forme simple de dénombrements (dés, cartes à jouer) et de marches au hasard (pile ou face), introduisant rapidement le conditionnement qui facilite le calcul, aurait sans doute sa place au collège. À ce niveau, il faut se garder (comme en géométrie) de présenter une théorie axiomatique. Il s'agit, à l'aide d'exercices bien menés et reposant sur l'expérience commune, de permettre aux enfants de calculer tout seuls des probabilités dont ils saisissent bien le contenu intuitif (exemple pour tester l'intérêt du conditionnement : calculer la probabilité pour qu'en lançant dix dés la somme des points marqués soit paire). Plus tard, au lycée, les élèves rencontrent la statistique, en économie et en mathématiques. Probabilités et statistiques jouent un tel rôle dans le monde contemporain que leur place dans l'enseignement doit être reconnue (nous avons de retard : Laplace demandait déjà qu'on enseigne les probabilités, comme lui même les avait présentées dans ses leçons à l'École normale de l'an III).

Nous n'allons pas passer en revue toutes les matières importantes. Une remarque s'impose néanmoins. Quels que soient les progrès accomplis depuis l'Antiquité dans l'enseignement des mathématiques, les simplifications, les méthodes puissantes et générales, les concepts unificateurs, il a fallu, à toutes les époques, renoncer à enseigner une partie de ce qui était enseigné précédemment. Il en est de même aujourd'hui. Un grand nombre de calculs à la main, que ce soit des opérations sur les entiers à l'école élémentaire ou de longs calculs algébriques au lycée, sont abandonnés à juste titre, et il faut sans cesse examiner ce qui a vieilli et ne doit plus être enseigné (cette recommandation vaut particulièrement pour l'enseignement supérieur, où quantité de choses sont abandonnées sans réel examen). Inversement, il arrive souvent que ce qui a été oublié par une génération resurgisse comme un sujet actuel et important (exemple : les fractions continues). Il semble à plusieurs d'entre nous que la notion de fonction est éclairée par celle d'application d'un ensemble dans un autre ; ne convient-il pas d'introduire à nouveau cette notion et ce point de vue ? À tous égards, une réflexion permanente doit être menée sur l'enseignement de mathématiques pour éclairer les choix d'avenir dans une perspective à long terme.

Les laboratoires de mathématiques

L'idée date d'un siècle et elle a été exprimée d'abord par Emile Borel. Borel souhaitait un laboratoire de mathématique par lycée, avec du matériel, et un menuisier. La seule réalisation a été celle du laboratoire de mathématiques de l'ENS, sous la direction d'Albert Chatelet, et la « salle des modèles » en a longtemps gardé la trace.

Les raisons données par Borel demeurent : il s'agit d'*« amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne. »* Ces raisons sont renforcées par de nouvelles exigences scientifiques et pédagogiques. Les laboratoires doivent être des salles pourvues de matériel (ordinateurs, livres, objets et instruments de construction et de mesure), et leur mise en place devrait se faire en fonction des plans de rénovation des établissements. Une partie du service des professeurs de mathématiques devrait s'y faire, et ce serait aussi l'occasion de faire se rencontrer professeurs de lycée, chercheurs et ingénieurs. Le programme serait libre, avec des suggestions qui s'inspireraient des réalisations déjà existantes dans le cadre périscolaire (clubs, rallies, math en jean, jeux mathématiques, expositions etc.). Ce seraient des lieux d'expérimentation aussi bien de sujets nouveaux que de méthodes nouvelles, impraticables en classe. On peut rêver qu'une partie des services des mathématiciens des universités ou du CNRS se fasse dans ces laboratoires. En tous cas, la définition des sujets possibles (qui renouvelleraient les TEP actuels) nécessiterait le concours d 'universitaires. Nos collègues déjà impliqués dans la « fête de la science » ou dans « Animath » ont des idées à exploiter dès maintenant.

Le rapport Thélot nous donne une nouvelle raison de souhaiter la réalisation de ces laboratoires. Le rapport exige plus des professeurs, mais ne prévoit pas explicitement de leur donner de nouveaux moyens de travail. La présence des professeurs au lycée sera une excellente chose s'ils trouvent au lycée les mêmes conditions de travail que les universitaires scientifiques trouvent dans leurs universités : bureaux, laboratoires, ordinateurs, bibliothèques. Les laboratoires sont un passage obligé pour une meilleure implication des professeurs de mathématiques dans la vie de leurs établissements.

La formation des enseignants

C'est une question décisive. Nous appuyons chaudement la proposition de l'Académie, contenue dans son rapport sur la structure de la recherche, de réintroduire un système analogue à celui des IPES pour un prérecrutement de professeurs de mathématiques. C'est la meilleure manière de préparer le remplacement massif des futurs retraités. Nous pensons que la formation des professeurs d'école nécessite une sensibilisation, par des mathématiciens actifs en recherche si possible, sur l'intérêt culturel et pratique des mathématiques du niveau élémentaire. Nous estimons que, pour la formation des professeurs de mathématiques des collèges et des lycées, le niveau M est souhaitable, tout en reconnaissant la difficulté de réalisation de ce souhait à l'heure actuelle.

La formation continue est à l'ordre du jour. Elle a des composantes variées. Nous insistons sur l'importance d'un réexamen périodique des notions acquises lors de la formation universitaire. C'est en se remettant périodiquement dans la situation d'étudiants que les professeurs se préparent le plus utilement à leur métier. Nous parlons là d'expérience : nous enseignons très souvent d'autres choses que celles que nous avons apprises comme étudiants. Le charme de les enseigner les fait mieux comprendre, et le charme de les apprendre à neuf les fait mieux enseigner. Pour nos collègues professeurs des classes préparatoires, des années sabbatiques dans les universités seraient bienvenues. Pour tous les professeurs, un crédit de formation à utiliser au cours de leur carrière jouerait un rôle analogue.