

**Trois propositions commentées de la
COPIRELEM pour les sujets 0 de l'épreuve
de mathématiques du CRPE session 2014**

Octobre 2013



Introduction

Ce document rassemble trois propositions de sujets rédigés par la COPIRELEM en vue de la préparation à l'épreuve écrite de mathématiques du CRPE 2014.

Notre démarche se justifie par la volonté de fournir aux formateurs plusieurs sujets conformes aux textes officiels (arrêté du 19 avril 2013) et permettant de sélectionner les candidats sur des connaissances mathématiques attendues d'un futur professeur des écoles. Proposer un seul sujet zéro, c'est prendre le risque de voir les formateurs (et les candidats) se référer à une seule interprétation possible. **Quel que soit le sujet zéro proposé, les choix effectués s'avèrent trop modélisants.** Sans préjuger des intentions de ses concepteurs, **le sujet zéro déjà mis en ligne peut laisser penser que les savoirs académiques sont prépondérants dans ce mode de sélection** et que les compétences professionnelles évaluées se limitent à celles intervenant dans des tâches d'analyses de procédures élèves et de repérage des savoirs mathématiques en jeu.

Ces trois propositions de sujets ont été construites conformément à l'idée de la réforme engagée par le ministère : **donner une véritable dimension professionnelle à la formation et au recrutement des enseignants.** C'est dans cette perspective que nous avons décliné une interprétation des textes officiels.

Les sujets que nous proposons s'appuient sur une véritable réflexion de ce que sont les « **mathématiques professionnelles** » pour un professeur des écoles et sur les tâches à proposer amenant à les mobiliser. Nous avons veillé à poser des questions variées et discriminantes : des questions portant sur la pertinence des documents pédagogiques choisis, sur les objectifs visés, les connaissances à mobiliser et/ou à construire, les remédiations à envisager, les traces écrites à prévoir, la maternelle... Ainsi, nos sujets permettent d'évaluer des connaissances relatives à **divers aspects de la profession** pour amener les candidats à prendre conscience qu'enseigner les mathématiques à l'école nécessite un apprentissage spécifique (y compris pour des étudiants issus de cursus scientifiques).

En outre, pour chacun des sujets, nous avons rédigé un **document d'accompagnement** qui présente de façon synthétique l'ensemble des notions évaluées, une explicitation de nos choix et des éléments de réponses aux questions. Ce texte n'est donc pas un corrigé à destination des candidats mais une explicitation des attendus et des intentions des concepteurs destinée aux formateurs, aux futurs correcteurs et aux futurs concepteurs. L'ajout de ces documents d'accompagnement constitue de notre point de vue une véritable valeur ajoutée à nos sujets et témoigne de notre volonté de leur donner **une dimension professionnelle qui soit en accord avec la réalité de terrain d'un enseignant.**

Vous trouverez donc dans ce fichier :

- **Nos trois sujets ;**
- **Leurs documents d'accompagnement ;**
- **Un document interne à la COPIRELEM qui synthétise nos réflexions sur ce que sont les « mathématiques professionnelles » et qui a servi de base à l'élaboration et l'analyse de nos trois sujets zéro.**

Proposition n°1 pour les sujets 0 de l'épreuve de mathématiques du CRPE session 2014

Première partie (13 points)

L'objectif de ce problème est de résoudre mathématiquement différentes situations mettant en jeu des jetons.

Partie A - Disposer des jetons

Voici 16 jetons disposés « en carré »

○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

Maxime possède un certain nombre de jetons et souhaite les disposer « en carré » en les utilisant tous. Il fait une première tentative : il dispose ses jetons en carré, mais son carré n'est pas assez grand et il lui reste 52 jetons qu'il ne peut pas placer.

Il fait une deuxième tentative : il essaie d'agrandir son premier carré en disposant 4 jetons de plus par côté, il lui manque alors 60 jetons pour finir son carré.

- 1) Calculer le nombre de jetons que possède Maxime.
- 2) Maxime peut-il placer tous ses jetons en carré ? Justifier la réponse.
- 3) Sans utiliser la calculatrice, expliquer s'il est possible de placer 2700 jetons en carré.

Partie B - Organiser des jetons

Dans un sac, il y a 84 jetons bleus, 60 jetons rouges et 48 jetons jaunes. Ces jetons sont indiscernables au toucher.

- 1) On souhaite répartir ces jetons dans des boîtes qui contiennent toutes la même quantité de jetons de chaque couleur. Donner le nombre possible de boîtes et pour chaque possibilité préciser le contenu de la boîte.
- 2) On pioche au hasard les jetons dans le sac et on les dépose dans l'une des boîtes.
 - a) Combien de jetons au minimum faut-il piocher successivement pour être sûr d'avoir au moins un jeton jaune ? Justifier la réponse.
 - b) Quelle est la probabilité de « piocher un jeton jaune en premier » ?

Partie C - Jouer avec les jetons bleus et rouges

Dans cette partie, des points sont affectés aux différents jetons.

- les jetons bleus font gagner 3 points,
- les jetons rouges font gagner 7 points.

Un meneur de jeu distribue à ses amis des jetons bleus et des jetons rouges et chacun doit calculer son total de points.

- 1) Bernard a autant de jetons bleus que de jetons rouges. Son total de points est 70. Combien a-t-il de jetons de chaque couleur ?
- 2) Paul dit qu'il a 29 jetons qui représentent un total de 159 points. Trouver la composition de la collection de jetons de Paul :
 - a) par une résolution algébrique ;
 - b) par une résolution arithmétique.
- 3) Céline possède des jetons bleus et des jetons rouges pour une valeur totale de 34 points.
 - a) Combien de jetons de chaque couleur possède-t-elle ? Trouver toutes les solutions.
 - b) Sur l'annexe 1, la droite d'équation $3x + 7y = 34$ a été représentée. En explicitant la méthode, retrouver graphiquement les solutions obtenues précédemment.
- 4) Pierre n'a que des jetons bleus et Jean n'a que des jetons rouges. Pierre doit donner 34 points à Jean. Comment Pierre et Jean peuvent-ils procéder ? Décrire une solution.

Deuxième partie (13 points)

Cette deuxième partie est constituée de questions à choix multiples (partie A) et d'une analyse de productions d'élèves sur les décimaux (partie B).

Partie A - Questions à choix multiples (6 points)

Dans cette partie, aucune justification n'est demandée.

Chaque question appelle une ou deux réponses exactes.

- une bonne réponse rapporte soit 1 point, soit 0,5 point ;
- une absence de réponse ne pénalise pas (0 point) ;
- une réponse fausse enlève 0,5 point.

Vous indiquerez Vrai ou Faux dans les cases qui correspondent aux affirmations A, B, C ou D dans le tableau réponse de chaque question.

- 1) Un quadrilatère ABCD est appelé isocervolant en A si l'angle $\widehat{A}$ est droit et si la droite (AC) est un axe de symétrie de la figure.

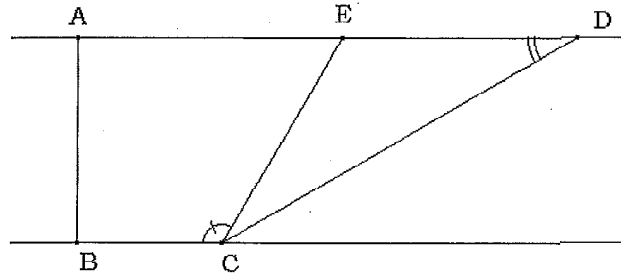
Parmi les affirmations suivantes, indiquer celle(s) qui est (sont) exacte(s).

- A - Tout carré est un isocervolant.
- B - Tout rectangle est un isocervolant.
- C - Tout isocervolant est un carré.
- D - Tout isocervolant est un rectangle.

A	B	C	D

- 2) Sur la figure ci-dessous :

- les points A, E et D sont alignés dans cet ordre ;
- la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AE) et à la droite (BC) ;
- le triangle DEC est isocèle en E ;
- la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{CDE}$ est a et celle de l'angle $\widehat{ECB}$ est $4a$.



Parmi les affirmations suivantes, indiquer celle(s) qui est (sont) exacte(s).

La valeur de a est :

A - 45°

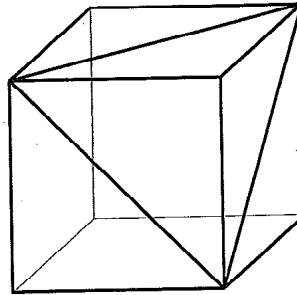
B - 30°

C - 20°

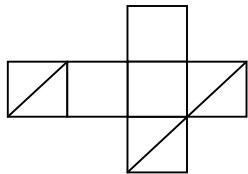
D - 25°

A	B	C	D

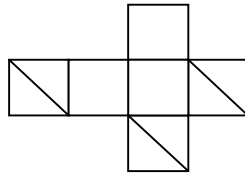
3) On considère le cube ci-dessous représenté en perspective cavalière.



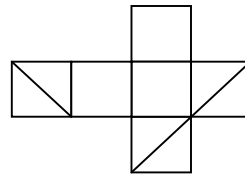
Un seul des patrons suivants correspond à ce cube. Lequel ?



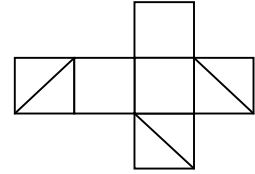
Patron A



Patron B



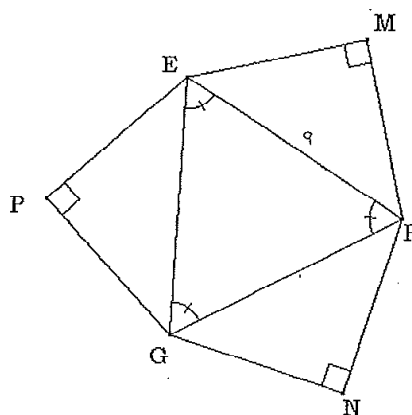
Patron C



Patron D

A	B	C	D

4) EFG est un triangle équilatéral de côté de longueur a . Les triangles EMF, FNG et GPE sont des triangles rectangles isocèles respectivement en M, N et P et disposés comme la figure ci-dessous.



Parmi les affirmations suivantes, indiquer celle(s) qui est (sont) exacte(s).

A – $EM = a\sqrt{2}$.

B – L'aire du triangle EMF est égale à $\frac{a^2}{4}$.

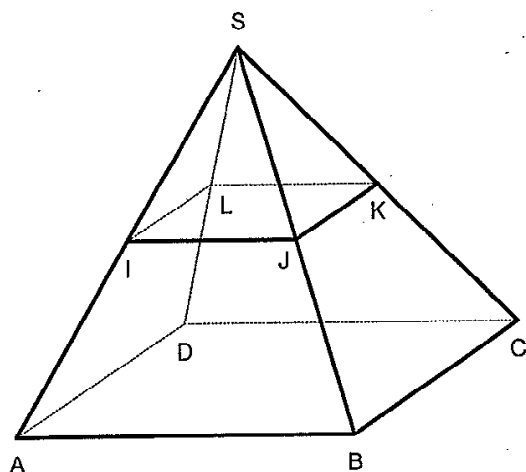
C – L'aire du triangle EFG est égale à $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

D – Le périmètre de l'hexagone EMFNGP est égal à $3a\sqrt{2}$.

A	B	C	D

5) On considère la pyramide de sommet S et de base ABCD représentée ci-dessous.

Les points I, J, K et L sont respectivement les milieux des arêtes [SA], [SB], [SC] et [SD].



Parmi les affirmations suivantes, indiquer celle(s) qui est (sont) exacte(s).

A – L'aire du quadrilatère ABCD est égale à quatre fois l'aire du quadrilatère IJKL.

B – L'aire du quadrilatère IJBA est égale à deux tiers de l'aire du triangle SAB.

C – Le volume de la pyramide SABCD est égal aux huit septièmes du volume du solide ABCDIJKL.

D – Le volume de la pyramide SABCD est égal à trois fois celui de la pyramide SIJKL.

A	B	C	D

- 6) Parmi les affirmations suivantes, indiquer celle(s) qui est (sont) exacte(s).
- A - Tout quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
- B - Tout parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
- C - Tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leurs milieux est un losange.
- D - Tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur est un losange.

A	B	C	D

Partie B - Analyse de productions d'élèves sur les décimaux (7 points)

Cet exercice s'appuie sur les documents proposés en annexes 2 et 3.

Annexe 2 : Les réponses de deux élèves (Jeanne et Tiago) à un exercice extrait des cahiers des évaluations nationales des acquis des élèves de CM2 en janvier 2011.

Annexe 3 : Extrait des programmes de mathématiques de l'école (B.O. du 19 juin 2008).

- 1) Questions concernant l'exercice de Jeanne et Tiago.
- a) Pour chaque question A, B et C de l'exercice de Jeanne et Tiago présenté en annexe 2, identifier de façon précise la connaissance et la compétence issue des programmes de mathématiques de l'école de 2008 qu'elle permet d'évaluer.

Dans une classe de CM1/CM2, voici les résultats obtenus par les 15 élèves de CM2.

Question A		Question B	
$\frac{60}{2}$	8 élèves	3,10	8 élèves
$\frac{62}{10}$	4 élèves	0,3	3 élèves
$\frac{602}{100}$	3 élèves	30,00	2 élèves
		3,00	1 élève
		0,03	1 élève

- b) Dans le tableau de résultats ci-dessus, les réponses $\frac{60}{2}$ à la question A et 3,10 à la question B apparaissent majoritairement. Quel renseignement nous donnent ces réponses sur la représentation du lien entre l'écriture à virgule et l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal pour les élèves qui commettent cette erreur ?
- c) Donner une hypothèse permettant d'expliquer l'absence de réponse de Tiago à la question C.
- d) Au regard de la réponse donnée par Jeanne à la question C, quel type de connaissances mathématiques faudrait-il retravailler ?
- 2) Des réponses argumentées d'élèves à qui il est demandé de calculer : $23,45 \times 10$ sont présentées ci-dessous :

Samia a écrit : <i>23,450 parce que quand on multiplie par dix on met un zéro.</i>	Julien a écrit : <i>230,450 car $23 \times 10 = 230$ $45 \times 10 = 450$ donc ça fait 230,450</i>
---	---

- a) Quelle règle semblent appliquer les deux élèves Samia et Julien ?
- b) Préciser leurs erreurs et formuler une hypothèse sur la représentation du nombre décimal chez ces élèves.

Troisième partie - Analyse d'éléments d'enseignement de la proportionnalité (14 points)

Les différentes questions visent l'analyse de plusieurs énoncés de problèmes et d'une proposition de mise en œuvre en classe.

Partie A - Analyse d'un premier énoncé de problème et de productions d'élèves

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de cycle 3 pour aborder la notion de proportionnalité.

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 mètres de papier, et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 mètres de ce papier.
a- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 mètres de papier ?
b- Quelle longueur de papier lui faut-il pour emballer 50 livres ?
c- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 mètres de papier ?

- 1) Cette situation semble être une situation de proportionnalité. L'énoncé comporte une part d'implicite (non-dit) qu'il serait bon de préciser pour lever toute ambiguïté lors de la résolution de ce problème. Comment peut-on compléter cet énoncé pour lever cette ambiguïté ?
- 2) D'un point de vue mathématique, cette situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire ou par sa réciproque.
 - a) Donner une expression de chacune de ces deux fonctions.
 - b) Donner la réponse attendue aux questions a, b et c du problème en utilisant l'une ou l'autre de ces fonctions.
- 3) Le problème a été proposé à trois élèves, Laurène, Farida et Yann dont les productions sont données en annexe 4.
 - a) Expliciter les procédures utilisées par Laurène pour répondre aux questions en vous référant aux propriétés mathématiques sous-jacentes à ces procédures.
 - b) Donner une explication plausible aux erreurs commises par Farida pour répondre aux questions a et c.
 - c) Comment interpréter la réponse de Yann à la question b ?

Partie B - Analyse d'une séance d'enseignement se référant à deux énoncés de problèmes

Pour introduire la notion de proportionnalité en classe de CM1, un enseignant décide d'utiliser le document suivant :

Valérie reçoit ses amis pour son anniversaire.
Elle a décidé de leur préparer un cocktail : « le Margot-drink »

Voici la recette pour 4 verres :

"Margot drink"
• quelques cubes de glace
• jus de 2 citrons
• jus de 2 oranges
• 1 verre à liqueur de sirop de grenadine
• eau gazeuse

• Combien de fruits de chaque sorte et quelle quantité de sirop de grenadine faut-il prévoir pour préparer :

6 verres
8 verres
10 verres
20 verres de
« Margot-drink » ?

Valérie a acheté 8 citrons, 8 oranges et 1 bouteille de sirop de grenadine (avec cette bouteille, elle peut remplir 9 verres à liqueur).

• Combien peut-elle préparer de verres de « Margot-drink » pour ses invités ?



Il décide de préparer sa séance en se référant au canevas présenté ci-dessous.

Étape 1 : Seule la recette est affichée au tableau. Ensuite la première question portant sur le nombre de fruits et la quantité de sirop est écrite au tableau. Les élèves sont invités à rechercher les informations utiles pour répondre à cette question.

Étape 2 : Les élèves sont répartis en groupes hétérogènes. Ils cherchent une réponse à la question et rédigent une affiche pour présenter leur travail.

Étape 3 : Le maître procède à la mise en commun à partir des affiches rédigées dans chaque groupe. Des explications orales peuvent être demandées aux producteurs des affiches et des arguments portant sur la validité ou la non validité de la réponse sont échangés entre élèves.

Étape 4 : Une synthèse collective permet à l'enseignant de mettre en évidence les éléments pertinents et les erreurs contenus dans les affiches.

a- Il met en place un modèle de présentation qui permet d'écrire les données, les résultats calculés et de schématiser la méthode utilisée.

b- Il organise la correction de la première question en séparant le calcul des ingrédients pour 8 verres et 20 verres de celui pour 6 verres et 10 verres. Il fait intervenir comme intermédiaire le calcul pour 2 verres indiqués par une affiche. Il fait apparaître ainsi les propriétés qu'il veut mettre en place.

Étape 5 : Les élèves prennent connaissance de la deuxième question portant sur le nombre de verres et essaient d'y répondre individuellement. Le maître conduit une correction collective à partir des différentes propositions.

Étape 6 : Les élèves doivent ensuite résoudre trois exercices du même style.

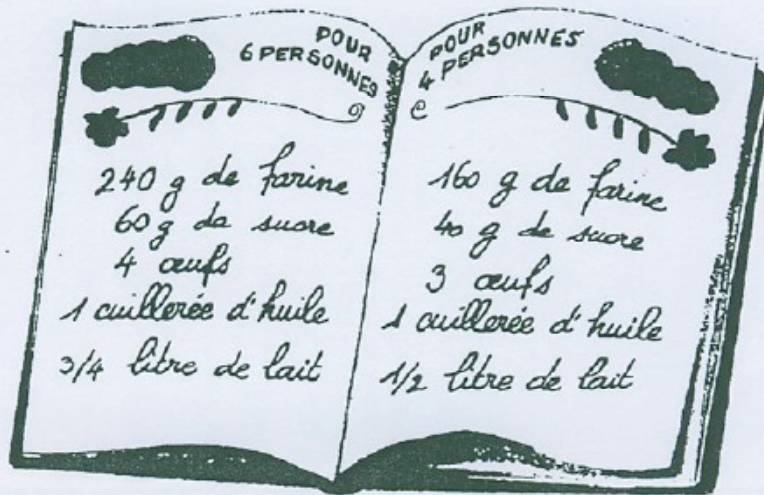
Étape 7 : L'exercice suivant est proposé en fin de séance :

Voici 2 recettes de crêpes

a/ Compare les 2 recettes.

b/ La maîtresse désire faire des crêpes pour les 30 élèves de la classe.

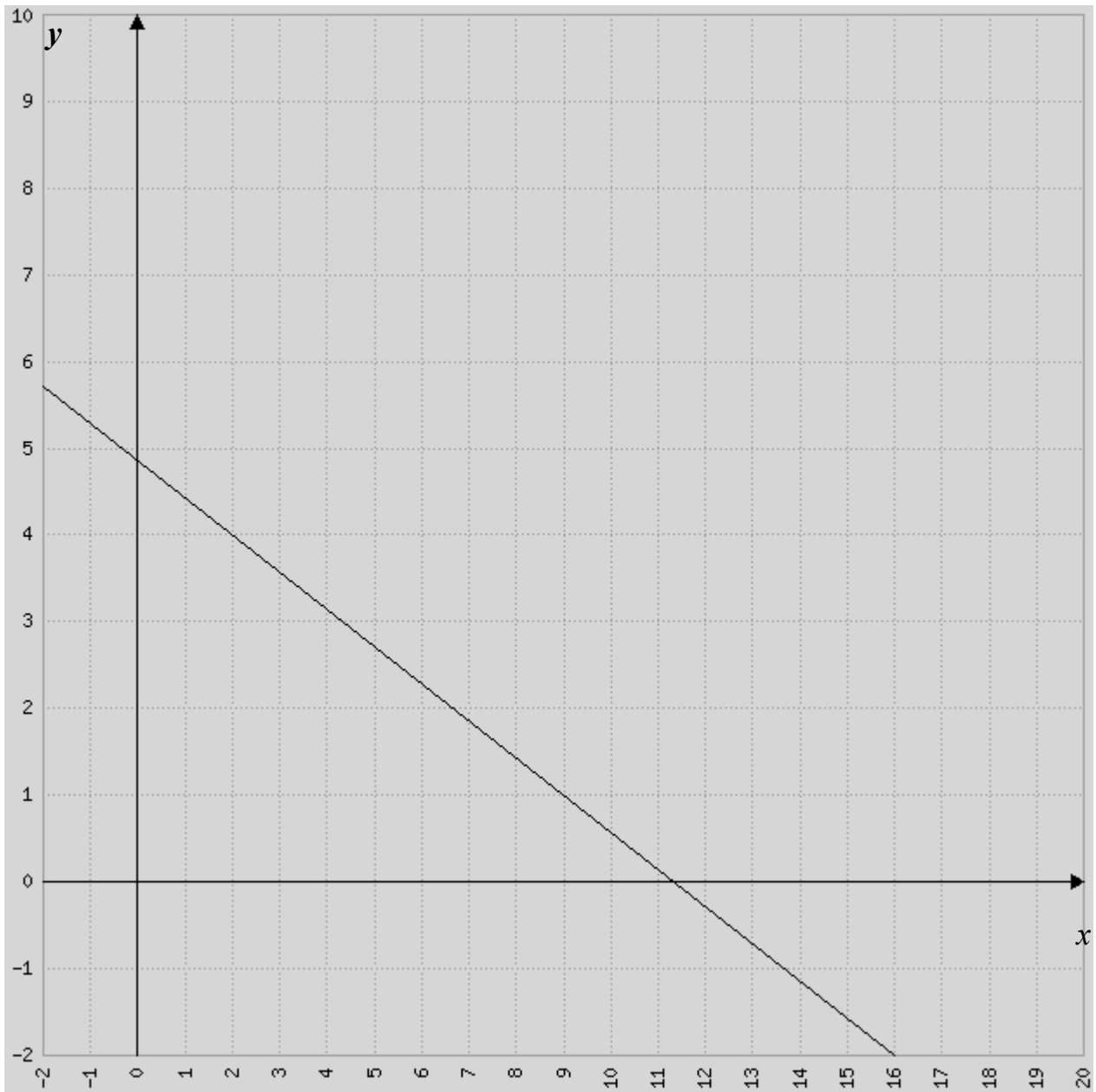
Quelles quantités doit-elle prévoir ?



- 1) Caractériser chacune des étapes de cette séance en précisant leur intérêt spécifique.
- 2) Concernant l'étape 1, recenser les informations utiles que le maître doit mettre en relief.
- 3) Proposer un modèle que l'enseignant peut mettre en place dans la partie a) de l'étape 4. Comment schématiser la méthode utilisée ?
- 4) À l'étape 7, le maître propose un nouvel exercice.
 - a) En quoi cet exercice est-il différent de celui proposé dans l'étape 1 ?
 - b) Décrire une procédure correcte qu'un élève de CM1 est susceptible de mettre en œuvre pour répondre à la question a) de cet exercice.

Annexe 1

Représentation graphique de la droite $3x + 7y = 34$



Annexe 2

Réponses de deux élèves à l'exercice n°2 extrait des évaluations nationales
des acquis des élèves de CM2 en janvier 2011.

Production de Jeanne :

A/ Entoure la fraction égale à 6,02

$$\left(\frac{60}{2} \right)$$

$$\frac{62}{10}$$

$$\frac{602}{100}$$

$$\frac{620}{100}$$

B/ Entoure le nombre à virgule égal à $\frac{3}{10}$

3,10

0,3

0,03

30,00

3,0

3,00

C/ Écris $\frac{1}{4}$ sous forme de nombre à virgule :

$$\frac{1}{4} = 0,4$$

Item 66	Item 67	Item 68
1 9 0	1 9 0	1 9 0

Production de Tiago :

A/ Entoure la fraction égale à 6,02

$$\frac{60}{2}$$

$$\frac{62}{10}$$

$$\left(\frac{602}{100} \right)$$

$$\frac{620}{100}$$

B/ Entoure le nombre à virgule égal à $\frac{3}{10}$

3,10

0,3

0,03

30,00

3,0

3,00

C/ Écris $\frac{1}{4}$ sous forme de nombre à virgule :

$$\frac{1}{4} =$$

Item 66	Item 67	Item 68
1 9 0	1 9 0	1 9 0

Annexe 3

Extrait des programmes de l'école de mathématiques 2008

Les tableaux suivants donnent des repères pour l'organisation de la progressivité des apprentissages par les équipes pédagogiques.

Seules des connaissances et compétences nouvelles sont mentionnées dans chaque colonne.

Pour chaque niveau, les connaissances et compétences acquises dans la classe antérieure sont à consolider.

La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages.

	Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
Nombres et calcul	Les nombres entiers jusqu'au million - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million. - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier. - Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30 et 60.	Les nombres entiers jusqu'au milliard - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard. - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - La notion de multiple : reconnaître les multiples des nombres d'usage courant : 5, 10, 15, 20, 25, 50.	Les nombres entiers
		Fractions - Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. - Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.	Fractions - Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs. - Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.
		Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/1000ème). - Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée, . les comparer, les ranger, . les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, . passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.	Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème). - Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, . les comparer, les ranger, . produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001... - Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.
	Calcul sur des nombres entiers Calculer mentalement - Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication. - Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits. Effectuer un calcul posé - Addition, soustraction et multiplication. - Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre. - Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, ou à l'aide de la calculatrice. - Utiliser les touches des opérations de la calculatrice. Problèmes - Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.	Calcul Calculer mentalement - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat. Effectuer un calcul posé - Addition et soustraction de deux nombres décimaux. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. - Division euclidienne de deux entiers. - Division décimale de deux entiers. - Connaître quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs. Problèmes - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.	Calcul Calculer mentalement - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. - Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. Effectuer un calcul posé - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. - Division d'un nombre décimal par un nombre entier. - Utiliser sa calculatrice à bon escient. Problèmes - Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

Productions des élèves : Laurène, Farida et Yann

LAURÈNE

Pour embeller 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier, et pour embeller 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier.

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?

$$\begin{array}{r} 10 \text{ m} \\ + 4 \text{ m} \\ \hline 14 \text{ m} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \text{ horses} \\ + 25 \text{ horses} \\ \hline 35 \text{ horses} \end{array}$$

Il peut emballer 35 livres.

2- Quelle largeur de papier faut-il pour embaler 50 livres ?

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 10 \\ + 10 \\ + 10 \\ + 10 \\ \hline 50 \end{array}$$

Il faut 20 m de papier.

3. Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier

$$\begin{array}{r} 10 \\ 5 \end{array}$$

Il peut en valloir 15 livres.

FARIDA

Pour emballer 12 livres, on utilise 1 m de papier.
et pour emballer 25 livres, il faut 10 m de ce papier.

1. Combien de livres le libraire peut-il acheter avec 14 m de papier ?

pour 25 livres il lui faut 10 m
pour 16 m de papier 25 lb = 23 livres
10 pour aller à 16 m ajoute 4

2. Quelle longueur x de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

$$2A + 2B = 50$$

$$25 - 24 = 1$$

Il faut 8 m de papier pour 50 livres.

3. Erklären Sie, wie das Gesetz der Erhaltung der Energie in der Physik aussieht.

$40 \text{ L} = 4$

25.6 = 24

Avec 6 m de papier la librairie peut combler 24 livres

YANN

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier, et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier.

1- Combien de livres le libraire peut-il embellir avec 14 m de papier ?

$$25 + 10 = 35$$

Le débris a pu emballer 35 livres dans 16 m de papier.

3- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

$$4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+2 = 125 \text{ m}$$

Il linfor 125 m per anello 50 lire.

3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 3 m de papier ?

Le libraire peut emballer avec 6 mds papier 15 livres

$$10 = 4m \quad 5 = 2m$$

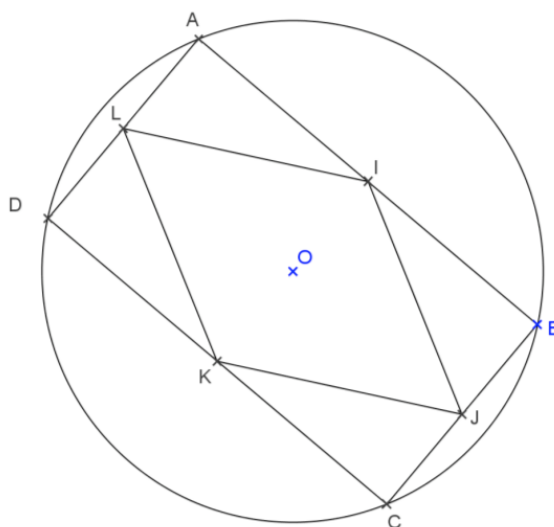
$$10 + 5 = 15 \text{ livres}$$

Proposition n°2 pour les sujets 0 de l'épreuve de mathématiques du CRPE session 2014

Première partie - Un problème de jardinier (13 points)

Un jardinier veut réaliser un parterre circulaire composé de différentes parties comme l'indique le dessin ci-contre.

Une plate-bande est représentée par le rectangle ABCD, inscrit dans un disque, et le quadrilatère IJKL représente un massif aménagé à l'intérieur de la plate bande.



A- Construire le parterre

Le disque qui constitue le parterre a pour centre O et pour rayon r .

- 1) a) Prouver que $AC = BD = 2r$.
 b) Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. Déterminer la longueur des côtés de IJKL en fonction de r . Justifier la réponse.
- a) En déduire la nature du quadrilatère IJKL.
- 2) On souhaite que la largeur de la plate-bande soit égale aux $\frac{3}{4}$ de sa longueur.
 - a) Prouver qu'alors la longueur du rectangle est égale à $\frac{8}{5}r$ et que sa largeur est égale à $\frac{6}{5}r$.
 - b) À l'échelle 1/60, le disque a pour rayon 5 cm.
 Construire à la règle et au compas, le plan de ce parterre à cette échelle. *Les traits de construction resteront apparents.*
 Calculer, en vraie grandeur, l'aire de la toute la plate-bande. Les résultats seront donnés en m^2 au centième près.

B- Fleurir le parterre

Le jardinier décide de planter des tulipes sur le contour de la plate-bande et de semer du gazon à l'extérieur de celle-ci. Comme il souhaite tondre le moins possible, il envisage de changer les dimensions de la plate-bande pour que celle-ci ait une aire maximale tout en conservant son périmètre. Il cherche alors quelles pourraient être les dimensions de la plate-bande.

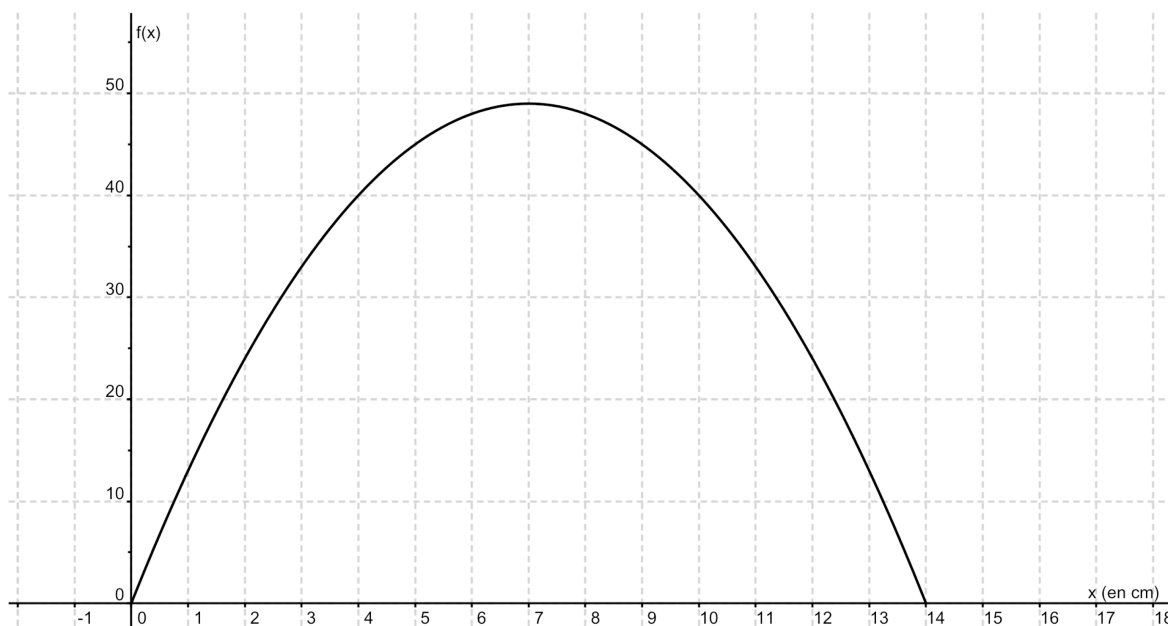
Une modélisation mathématique va permettre de répondre au problème du jardinier.

Ainsi pour les questions suivantes, les calculs se feront à partir des dimensions du plan réalisé précédemment (le rayon du disque est de 5 cm, et le périmètre du rectangle ABCD représentant la plate-bande est égal à 28 cm).

- 3) Montrer que si A'B'C'D' est un rectangle ayant le même périmètre que le rectangle ABCD alors son aire vérifie :

$$\text{aire}_{(A'B'C'D')} = 14x - x^2 \quad \text{où } x \text{ désigne la mesure de la largeur du rectangle } A'B'C'D' \text{ exprimée en centimètres.}$$

- 4) À partir du graphique suivant, déterminer graphiquement pour quelle valeur de x le rectangle A'B'C'D' a une aire maximum.



Représentation de la fonction f qui à un nombre x associe $14x - x^2$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 14]$.

- 5) En admettant que la valeur déterminée graphiquement est exacte, donner la nature du rectangle A'B'C'D' ayant même périmètre que ABCD et une aire maximale, ainsi que la nature du quadrilatère I'J'K'L' associé. Justifier les réponses.
- 6) Le jardinier peut-il construire une plate-bande représentée par ce quadrilatère A'B'C'D' et vérifiant la condition d'être inscrit dans le disque initial de rayon 5 cm? Justifier la réponse.

C- Acheter des fleurs

Finalement, pour des raisons esthétiques, le jardinier choisit une plate-bande rectangulaire de 3,60 m sur 4,80 m et veut planter des tulipes sur le pourtour extérieur.

- 7) Sachant que les tulipes se plantent tous les 10 cm et qu'il y en a une à chaque coin de la plate-bande, déterminer le nombre de tulipes nécessaires. Justifier la réponse.
- 8) Par expérience, le jardinier sait que 25% des tulipes plantées ne fleuriront pas. Combien de tulipes devra-t-il commander pour disposer finalement du nombre de tulipes nécessaires ?

- 9) Les tulipes sont vendues dans des sacs de 100 bulbes de fleurs variées, dont un quart sont des bulbes de tulipes, un autre quart de jonquilles et le reste de jacinthes. On suppose que les bulbes sont indiscernables au toucher.

À partir d'un lot, le jardinier souhaite commencer par planter les tulipes. Il tire au hasard un bulbe : si c'est un bulbe de tulipe, il le plante ; sinon, il le remet dans le sac.

Après avoir tiré et planté quatre bulbes de tulipes, il tire au hasard dans le sac un nouveau bulbe. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un bulbe de tulipe ? Justifier la réponse.

Deuxième partie (13 points)

Cette deuxième partie est constituée de questions appelées « Vrai – Faux- Justifier » (partie A) et d'une analyse de production d'élèves sur du calcul mental (partie B).

Partie A - Vrai – Faux – Justifier (6 points)

Dans cette partie, des affirmations sont proposées. Pour chacune d'entre elles, dire si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier la réponse.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.

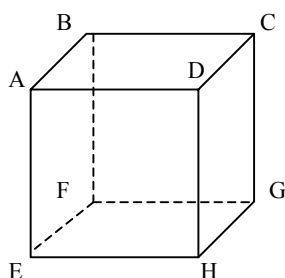
Une réponse fausse n'enlève aucun point.

- 1- Une classe a une moyenne de 9 sur 20 à un devoir surveillé.

Affirmation 1 : La moitié de la classe a eu au moins 9 sur 20 à ce devoir.

- 2- Affirmation 2 : 1 cL de liquide occupe un volume égal à $0,001 \text{ dm}^3$.

- 3- Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, l'arête AB mesure $a \text{ cm}$.



Affirmation 3 : On peut alors affirmer que le volume du solide dont les sommets sont A, B, D et E est égal à $\frac{a^3}{6} \text{ cm}^3$.

- 4- Soit a, b, c trois entiers compris entre 0 et 9.

Affirmation 4 : Les nombres qui s'écrivent $\overline{abcabc}$ en base dix sont des multiples de 13.

- 5- Sur une carte au $1/25000$ deux villages sont distants de 7 cm.

Affirmation 5 : Ces villages seront distants de $\frac{35}{8} \text{ cm}$ sur une carte au $1/40000$.

6- On considère le nombre $10^9 - 9$.

Affirmation 6 : Lorsque l'on fait la somme des chiffres composant l'écriture usuelle de ce nombre, on obtient 73.

Partie B - Analyse de productions d'élèves sur un exercice de calcul réfléchi (7 points)

Lors d'une séance de calcul mental, un enseignant écrit au tableau le calcul. Après un moment de recherche, au signal, les élèves écrivent leur résultat sur l'ardoise et lèvent celle-ci. Afin de faire apparaître les différentes procédures, l'enseignant demande alors à certains élèves d'expliquer oralement comment ils ont obtenu leur résultat.

Les réponses et les explications orales fournies par huit élèves que l'on désignera par les lettres, A, B, C, D, E, F, G et H sont indiquées ci-dessous.

- 1) Relever et analyser les erreurs commises.
- 2) Identifier trois procédures qui ont permis d'obtenir le résultat et qui amènent à mobiliser des propriétés de la multiplication qui seront explicitées.
- 3) Pour chacune des procédures repérées, indiquer les élèves qui l'ont employée.

Calcul : 18×5

Elève A	<i>sur l'ardoise</i> : 90 <i>Explications</i> : 18 c'est presque 20, je calcule 20×5 , c'est 100. Il faut enlever 5 et encore 5.
Elève B	<i>sur l'ardoise</i> : 90 <i>Explications</i> : 18 plus 18 ça fait 36 et encore 36, 72, et encore 18, 90.
Elève C	<i>sur l'ardoise</i> : 45 <i>Explications</i> : je compte 5 fois 8 quarante et 5 fois 1 cinq. Ça fait 45.
Elève D	<i>sur l'ardoise</i> : 90 <i>Explications</i> : 5 c'est la moitié de 10, je fais 18 multiplié par 10 ça fait 180 puis je prends la moitié 50 et 40.
Elève E	<i>sur l'ardoise</i> : 94 <i>Explications</i> : j'ai posé l'opération dans ma tête: 5 fois 8 quarante, 0 et je retiens 4, 5 fois 1 cinq et 4 neuf.
Elève F	<i>sur l'ardoise</i> : 90 <i>Explications</i> : 18 fois 5 c'est comme 9 fois 2 fois 5.
Elève G	<i>sur l'ardoise</i> : 72 <i>Explications</i> : 18 plus 18, 36 plus 18 c'est comme 20 moins 2 ça fait 54, plus 18, 72 plus 18; 90. J'avais faux.
Elève H	<i>sur l'ardoise</i> : 90 <i>Explications</i> : 10 multiplié par 5 cinquante, 8 multiplié par 5 quarante, 40 plus 50, 90.

Troisième partie - Analyse de documents pédagogiques sur l'enseignement de la division (14 points)

I. Analyse d'une séance en CE2 (Annexe 1)

Dans l'annexe 1 figure un extrait du manuel *Cap Maths* CE2 (Hatier, 2011) présentant le support écrit d'une séance. L'objectif de cette séance porte sur la résolution de problèmes de partage.

- 1) Exprimer les solutions de chaque problème de la partie « Chercher » au moyen d'une égalité.
- 2) Citer trois connaissances ou compétences préalables nécessaires à cette activité (partie « Chercher »).
- 3) Les élèves sont mis en équipes de deux. Ils sont d'abord invités à répondre à la première question de la partie « Chercher ». Après un temps de recherche, l'enseignant organise une mise en commun.
 - a) Décrire trois procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour répondre à la question 1 concernant le nombre de rubans de Tim.
 - b) Expliciter deux types d'erreurs envisageables.
 - c) Quel est le rôle d'une mise en commun à l'issue de la première question ?
 - d) De quelle manière peut-on envisager la vérification des réponses ?
- 4) Dans un deuxième temps, les élèves doivent résoudre les deux autres questions de la partie « Chercher ». Le déroulement est identique à celui de l'étape précédente.
 - a) De quelle manière peut-on envisager la vérification des réponses de la question 3 ?
 - b) Analyser le choix des nombres dans toute cette activité.
- 5) Quels éléments de synthèse pourrait-on mettre en avant à l'issue de cette activité ?
- 6) Six exercices numérotés de 4 à 9 sont proposés à la suite de l'activité de recherche. Analyser le choix de ces exercices en relevant un point commun et deux différences.

II. La division en CM2

- 1) Analyse de deux exercices.

Les deux problèmes suivants (ERMEL CM2, Hatier) sont proposés aux élèves :

Problème 1

Michel veut faire des étagères de bibliothèque.
Avec toute une planche de 350 cm, il découpe 8 étagères de même longueur.
Quelle est la longueur des étagères ?

Problème 2

Une planche mesure 350 cm.
Combien de morceaux de 8 cm de long Jean peut-il faire avec cette planche ?

- a) Résoudre les deux problèmes proposés.
- b) Citer une ressemblance et une différence entre ces deux problèmes.
- c) La calculatrice peut-elle constituer une aide pour la résolution de ces problèmes ?

2) Dans le cadre de l'Évaluation nationale d'entrée en sixième, il a été proposé aux élèves d'effectuer, sans calculatrice, la division euclidienne de 4 584 par 8. En Annexe 2 sont reproduits les travaux d'Aliette et Christian.

- a) Décrire pour chaque élève les procédures utilisées pour effectuer la division proposée. Analyser les erreurs éventuelles.
- b) Quelle aide pourrait-on apporter à Christian ?

CHERCHER

Combien de parts ?

Maïa et Tim découpent des rubans dans des bandes de différentes couleurs. Dans chaque bande, ils doivent découper le plus possible de rubans.

Maïa découpe des rubans qui mesurent tous 2 cm de long et Tim des rubans qui mesurent tous 6 cm de long.



- 1** Ils ont chacun une bande rouge de 32 cm. Combien de rubans peuvent-ils découper ?
- 2** Ils ont chacun une bande bleue de 67 cm. Combien de rubans peuvent-ils découper ?
- 3** Ils ont chacun une bande jaune de 248 cm. Combien de rubans peuvent-ils découper ?

EXERCICES

- 4** Une bande mesure 30 cm. Combien de rubans de 5 cm peux-tu découper ?
- 5** Une bande mesure 78 cm. Combien de rubans de 5 cm peux-tu découper ?
- 6** Dans une bande, Maïa a découpé 9 rubans de 7 cm chacun. À la fin, il lui reste un petit ruban de 4 cm de long. Quelle était la longueur de la bande ?
- * 7** Une bande mesure 200 cm. Combien de rubans de 9 cm peux-tu découper ?
- * 8** Un mini-car permet de transporter 8 passagers. Combien faut-il prévoir de mini-cars pour emmener 54 passagers en promenade ?
- * 9** Les 52 élèves de CE1 et de CE2 se répartissent en équipes de 7. Les élèves restants seront arbitres. Combien y aura-t-il d'arbitres ?

Annexe 2

Aliette

$$\begin{array}{r}
 1 \times 8 = 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \\
 2 \times 8 = 16 \quad 16 \quad 16 \quad 16 \\
 3 \times 8 = 24 \quad 24 \quad 24 \quad 24 \\
 4 \times 8 = 32 \quad 32 \quad 32 \quad 32 \\
 5 \times 8 = 40 \quad 40 \quad 40 \quad 40 \\
 6 \times 8 = 48 \quad 48 \quad 48 \quad 48 \\
 7 \times 8 = 56 \quad 56 \quad 56 \quad 56
 \end{array}$$

Christian

$$\begin{array}{r}
 4584 \quad | \quad 8 \\
 - 47 \quad | \quad 573 \\
 \hline
 3964 \\
 - 142 \\
 \hline
 3822 \\
 - 42 \\
 \hline
 3780 \\
 - 71 \\
 \hline
 3709 \\
 - 142 \\
 \hline
 3567
 \end{array}$$

Proposition n°3 pour les sujets 0 de l'épreuve de mathématiques du CRPE session 2014

Première partie - Numération et opérations (13 points)

Dans le tableau ci-dessous, on a écrit quelques nombres entiers avec des hiéroglyphes appartenant à l'écriture égyptienne (vers 3000 av. JC), sans nécessairement respecter scrupuleusement la disposition des chiffres hiéroglyphiques de l'époque.

On nommera ainsi les symboles utilisés :

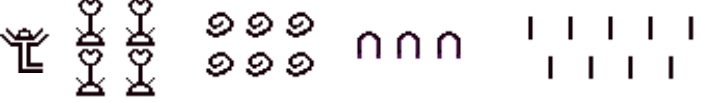
 trait
  spirale
  fleur (de lotus)
  doigt courbé
  têtard
  dieu
  anse

42 209	
120 000	
1 422 000	
400 010	
30 031	

- 1) On admet qu'il existe une écriture unique de chaque nombre entier dans ce système (à l'ordre près des symboles utilisés), chaque symbole étant utilisé au maximum neuf fois. Traduire les nombres entiers suivants :

	
	2 154 813

- 2)
- Expliciter une règle permettant de comparer deux nombres entiers quelconques écrits dans ce système de numération.
 - Citer un avantage de notre système actuel de numération écrite par rapport au système égyptien du point de vue de la comparaison des nombres.
 - Citer un nombre que l'on peut écrire dans notre système de numération mais qui ne peut s'écrire dans le système égyptien.
- 3) Calculer la différence entre les deux nombres A et B suivants, en utilisant exclusivement le système de numération égyptien (on laissera visibles les différentes étapes du calcul).

A	
B	

Exemples : pour effectuer les produits 35×47 et 89×25 (avec nos symboles de numération)

35 1645 donc $35 \times 47 = 1645$

89 2225

- 5) Dans les exemples donnés, on a utilisé 6 et 7 lignes avant de pouvoir faire l'addition finale. Supposer que l'on ait à effectuer le produit d'un nombre à quatre chiffres par un nombre à trois chiffres, quel nombre minimal de lignes faut-il écrire ? Justifier.

- $$\begin{array}{ccccccc}
 34 & + & 34 & + & 34 & + & 34 \\
 & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\
 68 & & + & 68 & & + & 68 \\
 & \searrow & & \swarrow & & & \\
 & 136 & & & & + & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

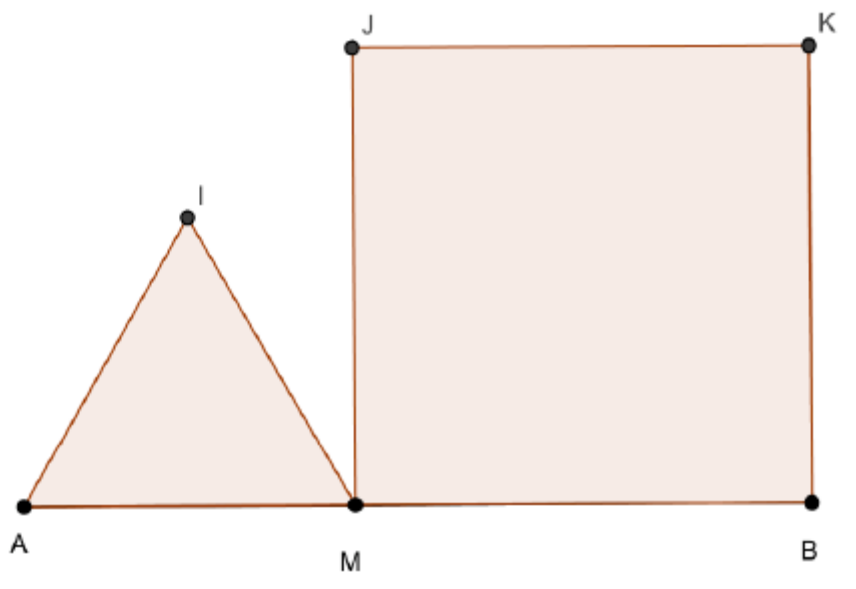
- COPIRELEM – Sujet 3

Deuxième partie (13 points)

Cette deuxième partie est constituée d'exercices (partie A) et d'une analyse de production d'élèves sur la notion d'aire et de périmètre (partie B).

Partie A - Résoudre les exercices suivants en justifiant les réponses. (7 points)

Exercice 1



M est un point du segment $[AB]$ de longueur 10,5 cm.

AIM est un triangle équilatéral et BMJK est un carré.

On se propose de rechercher la position du point M pour que AIM et BMJK aient le même périmètre.

- 1) On note x la mesure en cm de la longueur AM.
Exprimer en fonction de x le périmètre de AIM et celui de MJBK, et résoudre le problème algébriquement.
- 2) Donner une résolution graphique du problème.

Exercice 2

En fin de marché, un maraîcher décide, alors qu'il lui reste 60 salades, 48 oignons et 36 bottes de radis, de constituer des lots identiques de légumes pour écouler sa marchandise.

- 1) Quel est le nombre maximum de lots identiques qu'il peut constituer ? Justifier la réponse.
- 2) Pour ce nombre maximum de lots identiques, quelle est la composition de chaque lot ?

Exercice 3

ABCD est un trapèze convexe isocèle dont une des bases est le segment $[AB]$ et dont les diagonales se coupent en un point O, tel que :

$AB = 5$ cm ; $OA = 3$ cm et $OC = 4$ cm.

- 1) Calculer CD.
- 2) Construire aux vraies dimensions, en utilisant une règle graduée et un compas, ce trapèze.
Les traits de construction resteront apparents.

Exercice 4

On considère les nombres entiers N et q tels que : $N < 4200$ et $q = 82$. Dans la division euclidienne de N par un nombre entier d , on obtient le quotient q et le reste r .

- 1) Dans cette question, $r = 45$.
 - a) Déterminer d pour $N = 3899$.
 - b) Dans le cas général où $N < 4200$, rechercher l'ensemble des couples (N, d) possibles dans cette division euclidienne. Justifier les réponses.
- 2) Dans cette question, $r = 112$. Dans le cas général où $N < 4200$, rechercher l'ensemble des couples (N, d) possibles dans cette division euclidienne. Justifier les réponses.
- 3) Discuter, selon la valeur de r , l'existence de couples (N, d) dans cette division euclidienne.

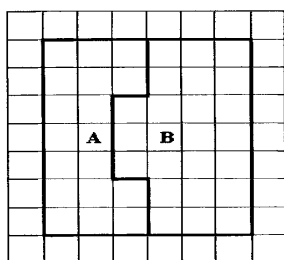
Partie B - Analyse de productions d'élèves sur la notion d'aire et de périmètre (6 points)

Les deux productions suivantes (élève n°1 et élève n°2) sont extraites des cahiers d'évaluation nationale de début 6^{ème}. Les compétences évaluées sont :

- Mesurer l'aire d'une surface grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé.
- Calculer le périmètre d'un polygone.
- Différencier aire et périmètre (en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire).
- Formuler et communiquer sa démarche par écrit.
- Argumenter à propos de la validité d'une solution.

- 1) Pour la comparaison des aires et des périmètres des parcelles A et B de l'évaluation :
 - a. donner une solution utilisant des mesures (valeurs numériques),
 - b. donner une solution n'utilisant pas les mesures.
- 2) Comment peut-on expliquer que les élèves privilégient les solutions numériques ?
- 3) Comment interpréter les réponses de l'élève n°1 ?
- 4) Comment interpréter les réponses de l'élève n°2 ?

Élève n° 1



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

a. L'aire de la parcelle A est la plus grande.

Les deux parcelles ont la même aire.

L'aire de la parcelle B est la plus grande.

Explique ton choix : parce qu'il y a plus de carreaux dans la parcelle B.

- b. Le périmètre de la parcelle A est le plus grand.

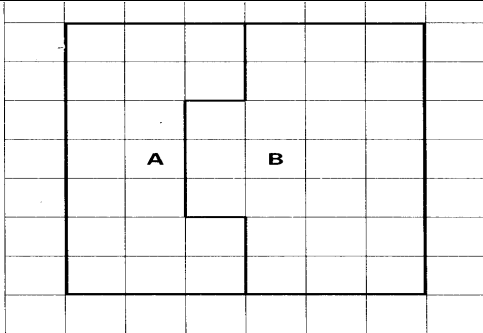
Les deux parcelles ont le même périmètre.

Le périmètre de la parcelle B est le plus grand.

Explique ton choix :

Parce qu'il y a 12 carreaux dans la parcelle A.

Élève n°2



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

- a. L'aire de la parcelle A est la plus grande.

Les deux parcelles ont la même aire.

L'aire de la parcelle B est la plus grande.

Explique ton choix : Si le terrain serait coupé en deux au milieu, elles auraient toutes les deux la même aire mais comme la parcelle B possède un morceau de plus que A elle est plus grande.

- b. Le périmètre de la parcelle A est le plus grand.

Les deux parcelles ont le même périmètre.

Le périmètre de la parcelle B est le plus grand.

Explique ton choix : Comme la parcelle B est plus grande que A le périmètre de la parcelle B est aussi plus grand.

Troisième partie - Analyse de situations de classe en maternelle (14 points)

Ce sujet propose d'analyser quelques types de tâches rencontrés dans le domaine numérique par des élèves de Grande Section (GS) de l'école maternelle.

PARTIE A - Dénombrer des collections

Un élève de Grande Section, en fin d'année, est confronté successivement aux deux tâches suivantes :

Tâche A :

Un tas d'une vingtaine de jetons est devant lui. On lui demande combien il y a de jetons.

Tâche B :

L'élève reçoit une barquette ; le maître dit à l'élève d'aller chercher douze jetons dans la réserve et de les rapporter dans son panier.

1. Pour chacune de ces tâches, décrire une procédure utilisant la comptine numérique permettant de réaliser la tâche.
2. Cette question porte sur la tâche A. Décrire deux erreurs qu'un élève peut faire en dénombrant par comptage la vingtaine de jetons qui est devant lui.
3. La tâche B est plus complexe que la tâche A. En s'appuyant sur les procédures décrites dans la question 1, donner un argument permettant de justifier cette affirmation.

PARTIE B - Variations autour de la tâche A

Dans cette partie, certaines valeurs des variables de la tâche A vont être modifiées. Il va s'agir d'analyser les effets de ces changements de valeur sur les procédures des élèves.

4. Le tas de jetons proposé contient moins de quatre jetons, quelle autre procédure peut utiliser un élève dans ce cas ?
5. Le nombre de jetons proposé : 12. Par ailleurs, les jetons ne sont pas présentés en tas, mais organisés sur la table de l'élève comme ci-dessous :

O	O	O	O	O
	O		O	O
O	O	O	O	

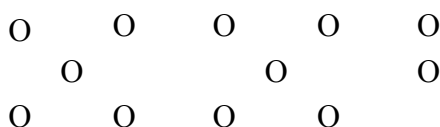
Quelle procédure, différente de celle décrite en question 1, peut alors être utilisée par un élève pour réaliser la tâche ?

6. On remplace le tas d'une vingtaine de jetons par une collection d'une vingtaine de points dessinée sur une feuille et non organisée. En quoi cela peut-il obliger à modifier une procédure possible dans le cas 1 ?

PARTIE C - Variations autour de la tâche B

Dans cette partie, certaines valeurs des variables de la tâche B vont être modifiées. Il va s'agir d'analyser les effets de ces changements de valeur sur les procédures des élèves.

7. Au lieu de dire à l'élève de ramener douze jetons, le maître donne à l'élève une carte constellation représentant une collection de douze éléments organisée ainsi :



et lui demande de rapporter autant de jetons que de points représentés sur la carte.

Décrire une procédure, différente de celle décrite dans la question 1, que l'élève peut utiliser pour réaliser la tâche.

8. Le maître place dans un sac des cartes sur lesquelles sont inscrites les écritures chiffrées des nombres jusqu'à 15. Un élève pioche dans le sac la carte « 12 » et doit apporter autant de jetons que le nombre inscrit sur la carte. Quelle connaissance le maître souhaite-t-il évaluer ?

PARTIE D - Variations autour de la tâche « Comparer des quantités »

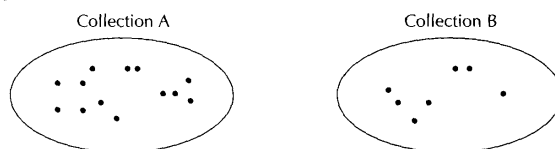
Dans cette partie, il va s'agir d'identifier différentes procédures non numériques et numériques permettant de comparer des quantités.

On considère deux collections de jetons que l'on désire comparer. Les deux collections comportent une quinzaine de jetons. Une collection est composée de jetons bleus, l'autre de jetons rouges.

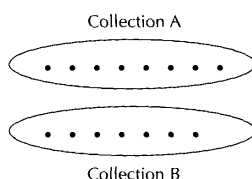
9. Donner une procédure non numérique permettant de réaliser cette tâche lorsque les collections sont proches (sur une même table par exemple).
10. Donner une procédure permettant de réaliser cette tâche lorsque les collections sont éloignées (sur deux tables séparées).
11. Ci-après sont présentés six items portant sur la comparaison de collections selon leur quantité. Ces items sont donnés sur feuille. Par un jeu sur les valeurs des variables de la situation, chaque item induit une procédure de comparaison différente des autres.

Pour chaque item, décrire la procédure de comparaison induite et expliquer quelle valeur des variables de la situation favorise cette procédure.

Item 1

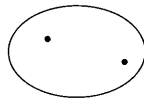


Item 2

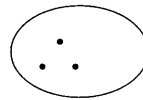


Item 3

Collection A

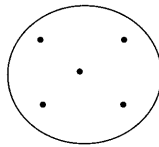


Collection B

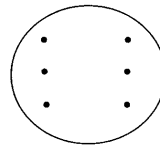


Item 4

Collection A

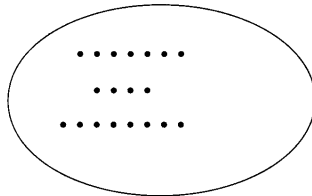


Collection B

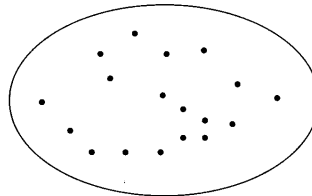


Item 5

Collection A

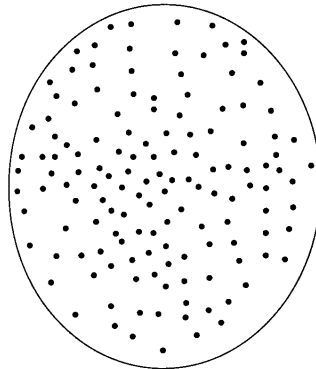


Collection B

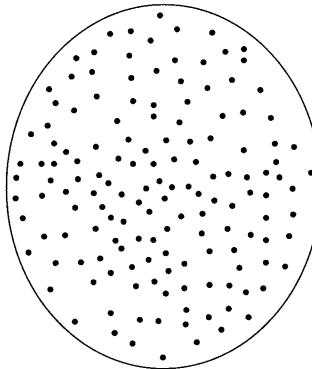


Item 6

Collection A



Collection B



Documents d'accompagnement des sujets proposés par la COPIRELEM

Octobre 2013



Document d'accompagnement du sujet 1

En plus des éléments de correction, ce document permet de synthétiser les notions abordées et les connaissances évaluées chez le candidat.

Le sujet présenté est à spectre large. Il couvre les quatre grands axes d'une formation mathématique ambitieuse mais minimale pour les futurs Professeurs des Ecoles.

I- Les savoirs mathématiques pour dominer les notions présentes implicitement et explicitement dans les situations d'enseignement.

Le futur professeur d'école doit maîtriser un bagage mathématique suffisant (par rapport aux exigences de l'école primaire). Le sujet aborde les notions de raisonnement, de mise en équation, de probabilités, de numération, la géométrie plane et dans l'espace, les décimaux et la proportionnalité.

II- Les savoirs mathématiques pour comprendre et s'approprier les programmes.

Le futur professeur d'école doit pouvoir interpréter les programmes en termes de continuité (transpositions du savoir savant au savoir enseigné). Le sujet repère si le candidat est capable de reconnaître la genèse, l'évolution et la construction progressive d'une notion mathématique (les décimaux et la proportionnalité).

III- Les savoirs mathématiques pour s'approprier des documents pédagogiques et concevoir un enseignement

Le futur professeur d'école doit pouvoir s'approprier des scénarii de classes et anticiper leur mise en œuvre (savoir faire des choix, savoir tirer parti des expériences...). Le sujet repère, dans le cadre de l'apprentissage des décimaux et de la proportionnalité, si le candidat est capable de :

- comprendre et critiquer une progression ;
- étudier le statut et la place des différents types d'activités que l'on peut proposer en mathématiques (résolution de problème, apprentissage de techniques, développement d'automatismes, mémorisation, ...) ;
- analyser une proposition de manuel scolaire (être autonome et critique par rapport à un manuel) ;
- adapter et faire évoluer une situation (par exemple en jouant sur les variables didactiques) ;
- construire une trace écrite conforme aux mathématiques visées et au niveau d'apprentissage.

IV- Les savoirs mathématiques pour analyser les procédures des élèves

Le futur professeur d'école doit dominer l'activité mathématique des élèves. Le sujet propose de repérer, dans le cadre de l'apprentissage des décimaux et de la proportionnalité, si le candidat est capable de :

- prendre en compte les étapes dans la conceptualisation d'une notion ;
- interpréter les procédures effectives des élèves ;
- interpréter des erreurs en termes de connaissances.

Commentaires sur les questions (en bleu) et Éléments de correction (en noir)

Première partie (13 points)

Cette première partie aborde les notions suivantes :

- différents types de raisonnement
- mises en équation
- équations du premier degré
- équations du deuxième degré
- systèmes de deux équations à deux inconnues
- diviseur d'un nombre ; PGCD
- identités remarquables
- probabilités élémentaires
- interprétation d'une représentation graphique de fonction.

Cette partie évalue chez le candidat les compétences suivantes :

- interpréter des données
- être capable de « traduire » un énoncé
- mobiliser des connaissances mathématiques dans des contextes variés
- s'adapter aux contraintes d'un énoncé pour envisager des procédures adaptées
- changer de point de vue
- prendre conscience de la pluralité des procédures pour résoudre un problème.

Partie A – Disposer des jetons

Question 1

Interpréter des données (cadre géométrique et numérique), être capable de « traduire » un énoncé et de choisir une inconnue différente de la donnée sur laquelle porte la question puis de résoudre l'équation trouvée et d'en déduire la réponse au problème posé.

Si on appelle A le nombre de jetons constituant une ligne du premier carré, on peut écrire le nombre total de jetons N sous la forme : $N = A^2 + 52$.

En tenant compte de la deuxième tentative, on peut aussi écrire N sous la forme : $N = (A + 4)^2 - 60$.

On obtient alors l'équation : $A^2 + 52 = (A + 4)^2 - 60$.

Donc : $A = 12$.

Par suite : $N = 12^2 + 52 = 196$.

Question 2

Identifier si un nombre entier est un carré ou pas.

Remarque : Plusieurs procédures sont envisageables mettant en œuvre des compétences différentes : reconnaître le carré d'un nombre connu, ou utiliser à bon escient une fonction de la calculatrice, ou trouver en testant différents entiers celui dont le carré est 196.

Maxime peut placer ses jetons en carré avec 14 jetons sur chaque côté, car $196 = 14^2$.

Question 3

Adapter une procédure en tenant compte des contraintes de la question (ici pas de calculatrice) et ainsi montrer sa capacité à envisager différentes procédures dans un cas particulier : reconnaître si un entier est un carré ou pas. Construire un raisonnement.

$2700 = 3 \times 900 = 3 \times 30^2$ donc ce n'est pas un carré.

Ou encadrement entre deux carrés « consécutifs »

$2500 = 50^2$

$51^2 = 2601$ avec par exemple utilisation de $(50 + 1)^2$
 $52^2 = 2704$
 $51^2 < 2700 < 52^2$ donc 2700 n'est pas le carré d'un nombre entier.

Partie B – Organiser des jetons

Question 1

Interpréter mathématiquement une question, ici comprendre que le nombre de boîtes doit être un diviseur commun à chacun des nombres donnés. Déterminer ces diviseurs communs. Interpréter les résultats dans le contexte de la question.

Pour répartir les jetons pour que chaque boîte contienne la même quantité de jetons de chaque couleur, il faut trouver un diviseur commun à 84, 60, et 48.

Solution experte : déterminer le PGCD, ainsi que les diviseurs du PGCD.

$$84 = 7 \times 12$$

$$60 = 5 \times 12$$

$$48 = 4 \times 12$$

Le PGCD des nombres 84, 60 et 48 est 12. 12 est le nombre maximum de boîtes. Si on répartit les jetons en 12 boîtes, il y aura : 7 jetons bleus, 5 jetons rouges, 4 jetons jaunes.

On peut aussi répartir les jetons dans moins de boîtes, le nombre de boîtes devra être un diviseur de 12 donc 6, ou 4, ou 3, ou 2 (le cas d'une seule boîte n'amène pas à envisager de répartition, donc on ne le prendra pas comme solution). Les répartitions obtenues apparaissent dans le tableau suivant :

	Jetons bleus	Jetons rouges	Jetons jaunes
12 boîtes	7	5	4
6 boîtes	14	10	8
4 boîtes	21	15	12
3 boîtes	28	20	16
2 boîtes	42	30	24

Question 2

a) Mettre en œuvre un raisonnement dans le domaine des probabilités (événement certain).

Pour être sûr de piocher un jeton jaune, il faut piocher 145 jetons. Si on tire d'abord tous les rouges (60 jetons), puis tous les bleus (84 jetons), le jeton suivant sera jaune.

b) Mettre en œuvre un raisonnement dans le domaine des probabilités (cas d'équiprobabilité).

La probabilité de piocher un jeton jaune en premier est : $\frac{48}{84 + 60 + 48} = 0,25$.

Partie C – Jouer avec les jetons bleus et rouges

Question 1

Identifier des données et mener un raisonnement (algébrique ou par tâtonnement).

Soit b le nombre de jetons bleus et r le nombre de jetons rouges.

On doit résoudre l'équation : $3b + 7r = 70$ avec $b = r$.

On obtient : $b = r = 7$.

Question 2

Adapter une procédure en tenant compte des contraintes de la question : procédure algébrique (identification des données, choix des inconnues et « traduction » puis résolution du système obtenu), procédure arithmétique.

a) Système de deux équations à deux inconnues : $b + r = 29$ et $3b + 7r = 159$.

On trouve $b = 11$ et $r = 18$.

b) Avec 29 jetons bleus, on obtient : $29 \times 3 = 87$ points.

Avec 28 jetons bleus et 1 jeton rouge, on obtient 91 points.

Avec 27 jetons bleus et 2 jetons rouges, on obtient 95 points.

...

Avec 11 jetons bleus et 18 jetons rouges, on obtient 159 points.

Un raisonnement purement arithmétique (« fausse position ») permet aussi de résoudre le problème : on suppose que tous les jetons sont bleus pour une valeur de $3 \times 29 = 87$ points ; ceci est insuffisant ; si on échange un jeton bleu contre un rouge, on augmente le total de points de 4 points ($7 - 3$), ...

Question 3

Envisager différentes procédures de résolution, incluant un changement de cadre (raisonnement numérique, lecture graphique).

a) On cherche les solutions entières de l'équation : $3b + 7r = 34$.

On teste successivement les valeurs entières de r , avec $0 \leq r < 5$ (ou les valeurs entières de b avec $0 \leq b < 12$).

Deux solutions : $r = 1$ et $b = 9$; $r = 4$ et $b = 2$.

b) On cherche les points de coordonnées entières sur la représentation graphique de la fonction.

Question 4

Résoudre un problème par tâtonnement.

Pierre donne 16 jetons bleus à Jean (soit 48 points) et Jean lui rend 2 jetons rouges (14 points). Ainsi Pierre aura donné 34 points à Jean.

Deuxième partie (13 points)

Partie A – QCM

Cette partie aborde les notions suivantes :

- quadrilatères
- triangles
- théorème de Pythagore, Théorème de Thalès
- aire et périmètre
- volume
- angles
- représentation en perspective
- patron.

Cette partie évalue chez le candidat les capacités suivantes :

- mobiliser un raisonnement rapide en s'affranchissant d'une rigueur relative
- mobiliser des images mentales géométriques
- analyser une figure géométrique.

Question 1

Connaître certaines propriétés du carré et du rectangle (angles et axes de symétrie).
Interpréter l'expression « tout ... est ... ».

A	B	C	D
V	F	F	F

Question 2

Analyser une figure, repérer les angles de même mesure. Mettre en œuvre un raisonnement géométrique.

A	B	C	D
F	V	F	F

Question 3

Identifier sur un patron les faces d'un cube représenté en perspective.

A	B	C	D
F	F	V	F

Question 4

Calculer la longueur de la diagonale d'un carré en fonction de la longueur du côté, la longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur du côté. Calculer l'aire d'un triangle.

A	B	C	D
F	V	F	V

Question 5

Utiliser le théorème de Thalès pour calculer des rapports de longueur, d'aire et de volume.

A	B	C	D
V	F	V	F

Question 6

Connaître les propriétés du parallélogramme et du losange, en particulier concernant les diagonales.
Interpréter l'expression « tout ... est ... ».

A	B	C	D
F	V	V	F

Partie B - Analyse de productions d'élèves sur les décimaux

Cette partie aborde les notions suivantes :

- apprentissage des fractions et des nombres décimaux à l'école élémentaire
- lien entre écriture fractionnaire et écriture à virgule
- compréhension des programmes.

Cette partie évalue chez le candidat les compétences suivantes :

- percevoir la manière dont le programme peut se décliner en tâches à proposer aux élèves dans le cadre d'une évaluation visant à vérifier l'état des connaissances des élèves
- interpréter des résultats d'un nombre limité d'élèves en se référant à des connaissances plus générales sur l'apprentissage d'une notion, identifier certains obstacles...
- inférer les connaissances (ou les non connaissances) d'un élève à partir de plusieurs réponses de cet élève.

Question 1

- a) Identifier les liens entre une tâche présentée dans une évaluation et les attendus du programme.
Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement dans le cas d'une fraction décimale pour A et B et dans le cas d'une « fraction simple » pour C.
- b) Interpréter des résultats d'un nombre limité d'élèves en se référant à des connaissances plus générales sur l'apprentissage d'une notion, ici en particulier les obstacles liés à cet apprentissage.
La barre de fraction est transformée en virgule vice-versa (moyennant un décalage dans la réponse A).
- c) Mettre en relation les réponses à différents items proposées par un même élève pour identifier ce qu'il a n'a pas compris ou son interprétation de la notion.
Ce n'est plus une fraction décimale (dénominateur différent de 10) ce qui semble déconcerter Tiago.
- d) Identifier des difficultés spécifiques chez un élève.
Le sens des fractions simples (quart, demi...) ainsi que la numération décimale (dixième, centième...), voire reconnaître les multiples des nombres d'usage courant.

Question 2

- a) Inférer à partir des erreurs d'élèves des « malentendus » qui peuvent s'instaurer au cours de la scolarité (domaine de validité d'une règle).
Samia « écrit un zéro à la droite du nombre » quand elle multiplie par 10 et Julien « écrit un zéro à la droite de chaque partie du nombre, située de chaque côté de la virgule ».
- b) Identifier les conceptions des élèves relatives à l'écriture des nombres décimaux.
Ces deux élèves ne conçoivent pas un décimal comme un « nouveau nombre ». L'erreur commise est une généralisation abusive aux décimaux d'une procédure correcte dans l'ensemble des nombres entiers. Pour Samia, un nombre décimal semble considéré comme un entier. La virgule est ignorée. Pour Julien, un nombre décimal semble considéré comme étant constitué de deux entiers accolés. La virgule sert à les séparer.

Troisième partie (14 points)

Cette troisième partie aborde les notions suivantes :

- la proportionnalité d'un point de vue théorique
- les fonctions linéaires et leurs propriétés
- la proportionnalité d'un point de vue enseignement en primaire.

Cette partie évalue chez le candidat les compétences suivantes :

- prendre du recul face à une notion mathématique enseignée à l'école
- modéliser
- adapter un modèle mathématique
- développer un regard critique
- repérer les implicites
- interpréter des procédures.

Partie A - Analyse d'un premier énoncé de problème et de productions d'élèves

Question 1

S'interroger sur la modélisation mathématique d'un problème inspiré d'une situation « réelle ». Développer un regard critique sur les ressources et en particulier repérer les implicites qui parfois peuvent engendrer des problèmes de gestion de classe.

Pour lever l'implicite, il est nécessaire de préciser que tous les livres sont les mêmes et que le libraire les emballe un par un avec la même longueur de papier pour chaque livre.

Question 2

a) Identifier et exprimer deux fonctions linéaires réciproques l'une de l'autre sous-jacentes à une situation de proportionnalité. Modéliser.

La fonction qui associe le métrage de papier au nombre de livres est donnée par l'expression :

$$f : x \rightarrow 0,4x$$

La fonction qui associe le nombre de livres à emballer au nombre de mètres de papier est donnée par l'expression : $g : y \rightarrow 2,5y$

Ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre.

b) Utiliser les fonctions linéaires réciproques l'une de l'autre en mettant en œuvre soit le coefficient de linéarité, soit l'une des deux propriétés de linéarité.

Question a) : $g(14) = 2,5 \times 14 = 35$ ou alors $g(14) = g(10) + g(4) = 25 + 10 = 35$. Donc 35 livres sont emballés avec 14 mètres de papier.

Question b) : $f(50) = 0,4 \times 50 = 20$ ou alors $f(50) = 5 \times f(10) = 5 \times 4 = 20$. Il faut 20 mètres de papier pour emballer 50 livres.

Question c) : $g(6) = 2,5 \times 6 = 15$ ou alors $g(6) = g(2) + g(4) = g(4)/2 + g(4) = 5 + 10 = 15$. Donc 15 livres sont emballés avec 6 mètres de papier.

Question 3

Interpréter des procédures d'élèves d'un point de vue théorique en référence aux mathématiques sous-jacentes ; les rattacher à un type de raisonnement. Inférer les connaissances et les procédures des élèves à partir de traces recueillies.

a) Pour la question a, Laurène utilise en acte la propriété additive de linéarité de la fonction g : $g(14) = g(10) + g(4)$. Pour la question b, elle utilise la même propriété avec la fonction f : $f(50) = f(10) + f(10) + f(10) + f(10) + f(10)$. Pour la question c, elle décompose 6 en 4 + 2. Elle ne détaille pas sa manière de dire qu'avec 2 m de papier, on emballe 5 livres. On peut cependant supposer qu'elle identifie 10 comme le double de 5.

b) Pour la question a, Farida traite la situation factuellement comme une situation additive « avec 4 mètres de plus j'emballerai 4 livres de plus ». Pour la question c, même style d'erreur : « avec 4 mètres de moins j'emballerai 4 livres de moins ».

c) Yann utilise la même procédure que Laurène pour répondre aux questions a et c portant sur la même quantité de livres. En revanche, lorsqu'il s'agit de trouver la longueur de papier (question b), il tente d'utiliser la propriété additive de linéarité, mais intervertit le nombre de livres et le nombre de mètres de papier. Il répond ainsi à la question : « Combien de livres peut-on emballer avec 50 mètres de papier ? ».

Partie B - Analyse d'une séance d'enseignement se référant à deux énoncés de problèmes

Question 1

Analyser les différentes étapes du déroulement d'une séance d'un point de vue mathématique, didactique et pédagogique.

- Étape 1 : Appropriation individuelle (lecture et recherche d'informations pertinentes). Les élèves se familiarisent avec l'énoncé.

- Étape 2 : Recherche par groupe. Action. Formulation écrite. Les groupes travaillent ensemble, les élèves échangent pour construire une solution.

- Étape 3 : Mise en commun. Formulation orale. Débat. Argumentation. Les élèves prennent conscience des autres procédures.
- Étape 4 : Synthèse collective. Le maître met en évidence une procédure « expert » si possible en se basant sur les écrits des élèves.
- Étape 5 : Approfondissement individuel. Les élèves réinvestissent ce qu'ils ont fait.
- Étape 6 : Consolidation. Entraînement.
- Étape 7 : Les élèves utilisent ce qu'ils viennent d'apprendre dans un autre contexte.

Question 2

Analyser une situation. Identifier les données essentielles.

Le terme « **recette** » génère la proportionnalité.

Les données numériques de l'énoncé ainsi que les objets qui y sont associés : nombre de verres (4), nombre de citrons (2), nombre d'oranges (2), nombre de verres à liqueur (1).

Les données numériques présentes dans les questions : nombre de verres à préparer (6, puis 8, 10, 20).

Les objets en jeu dans les questions : nombre de citrons ; nombre d'oranges ; nombre de verres à liqueur.

Question 3

Prévoir une trace écrite adaptée au niveau de l'élève.

Le maître peut récapituler les données et les questions sous forme d'un tableau. Il peut également schématiser la méthode utilisée au moyen de flèches pour passer d'une colonne à l'autre ou d'une ligne à l'autre...

Nb de verres	4	8	20	2	6	10
Nb de citrons	2					
Nb d'oranges	2					
Nb de verres à liqueur	1					

Question 4

Hierarchiser les problèmes mettant en jeu la notion de proportionnalité

Prendre du recul par rapport à la compétence mathématique (démarche de recherche) et lien entre modèle et situation « réelle ».

Envisager des procédures d'élèves d'un niveau donné.

a) L'exercice proposé à l'étape 7 utilise la proportionnalité dans un raisonnement complexe. Les élèves doivent trouver un raisonnement qui leur permet de comparer les deux recettes. Il ne s'agit plus d'utiliser une relation de proportionnalité mais de comparer des situations de proportionnalité dans un même contexte de recette.

b) Une procédure peut être la suivante :

Calculer les quantités, de chaque ingrédient, pour un même nombre de personnes pour les deux recettes, on choisira de calculer les quantités pour 2 personnes ou pour 12 personnes. Ensuite, on compare les quantités trouvées.

Un élève pourrait remarquer que la quantité d'huile est la même pour 4 ou 8 personnes.

Document d'accompagnement du sujet 2

En plus des éléments de correction, ce document permet de synthétiser les notions abordées et les connaissances évaluées chez le candidat.

Le sujet présenté est à spectre large. Il couvre les quatre grands axes d'une formation mathématique ambitieuse mais minimale pour les futurs Professeurs des Écoles.

I- Les savoirs mathématiques pour dominer les notions présentes implicitement et explicitement dans les situations d'enseignement.

Le futur professeur d'école doit maîtriser un bagage mathématique suffisant (par rapport aux exigences de l'école primaire). Le sujet aborde en profondeur la géométrie euclidienne, ses théorèmes principaux ainsi que les problèmes de construction de figure, les notions de raisonnement, de mise en équation, de probabilités, de courbe représentative d'une fonction, de numération, de géométrie dans l'espace, de fractions et de décimaux, ainsi que la proportionnalité (pourcentages, échelle notamment).

II- Les savoirs mathématiques pour comprendre et s'approprier les programmes.

Le futur professeur d'école doit pouvoir interpréter les programmes en termes de continuité (transpositions du savoir savant au savoir enseigné). Le sujet repère si le candidat est capable de reconnaître la genèse, l'évolution et la construction progressive d'une notion mathématique (la division).

III- Les savoirs mathématiques pour s'approprier des documents pédagogiques et concevoir un enseignement

Le futur professeur d'école doit pouvoir s'approprier des scénarii de classes et anticiper leur mise en œuvre (savoir faire des choix, savoir tirer parti des expériences...). Le sujet repère, dans le cadre de l'apprentissage de la division et de la multiplication, si le candidat est capable de :

- comprendre et critiquer une progression ;
- étudier le statut et la place des différents types d'activités que l'on peut proposer en mathématiques (résolution de problème, apprentissage de techniques, développement d'automatismes, mémorisation, ...) ;
- analyser une proposition de manuel scolaire (être autonome et critique par rapport à un manuel) ;
- adapter et faire évoluer une situation (par exemple en jouant sur les variables didactiques) ;
- construire une trace écrite conforme aux mathématiques visées et au niveau d'apprentissage.

IV- Les savoirs mathématiques pour analyser les procédures des élèves

Le futur professeur d'école doit dominer l'activité mathématique des élèves. Le sujet propose de repérer, dans le cadre de l'apprentissage de la multiplication et de la division, si le candidat est capable de :

- prendre en compte les étapes dans la conceptualisation d'une notion ;
- interpréter les procédures effectives des élèves ;
- interpréter des erreurs en termes de connaissances.

Commentaires sur la question (en bleu) et Éléments de correction (en noir)

Première partie (13 points)

Cette première partie aborde les notions suivantes :

- les propriétés des quadrilatères particuliers ;
- les théorèmes de base de la géométrie euclidienne ;
- les aires et les périmètres ;
- les échelles ;
- les pourcentages ;
- les probabilités dans un cas simple.

Cette partie évalue chez le candidat les compétences suivantes :

- mettre en œuvre des connaissances géométriques pour résoudre des problèmes concrets ;
- sélectionner des données pertinentes ;
- lire et interpréter un graphique ;
- prendre du recul sur des résultats et les interpréter à bon escient ;
- construire des figures complexes ;
- gérer un calcul algébrique ;
- calculer des racines carrées ; des sommes et des produits de fractions ;
- calculer des valeurs approchées.

Partie A

Question 1

- a) Connaître les propriétés du triangle rectangle et les mettre en œuvre. Sélectionner des données pertinentes.

Le triangle ABC est rectangle en B. Son hypoténuse [AB] est donc un diamètre de son cercle circonscrit. Or ce cercle a comme rayon r. On en déduit que le diamètre AB est égal 2r.

Par un raisonnement identique, on obtient : $BD = 2r$.

- b) Connaître et appliquer le théorème de la droite des milieux d'un triangle.

Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J milieu de [BC], donc par la propriété de la droite des milieux d'un triangle, le segment [IJ] est parallèle à la droite (AC) et : $IJ = \frac{1}{2} AC$.

Donc $IJ = r$. On montre de même que $IJ = JK = KL = IL = r$.

- c) Connaître et utiliser les propriétés du losange.

Un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux est un losange donc IJKL est un losange.

Question 2

- a) Connaître et appliquer le théorème de Pythagore.

Dans le triangle ABC rectangle en B on applique le théorème de Pythagore

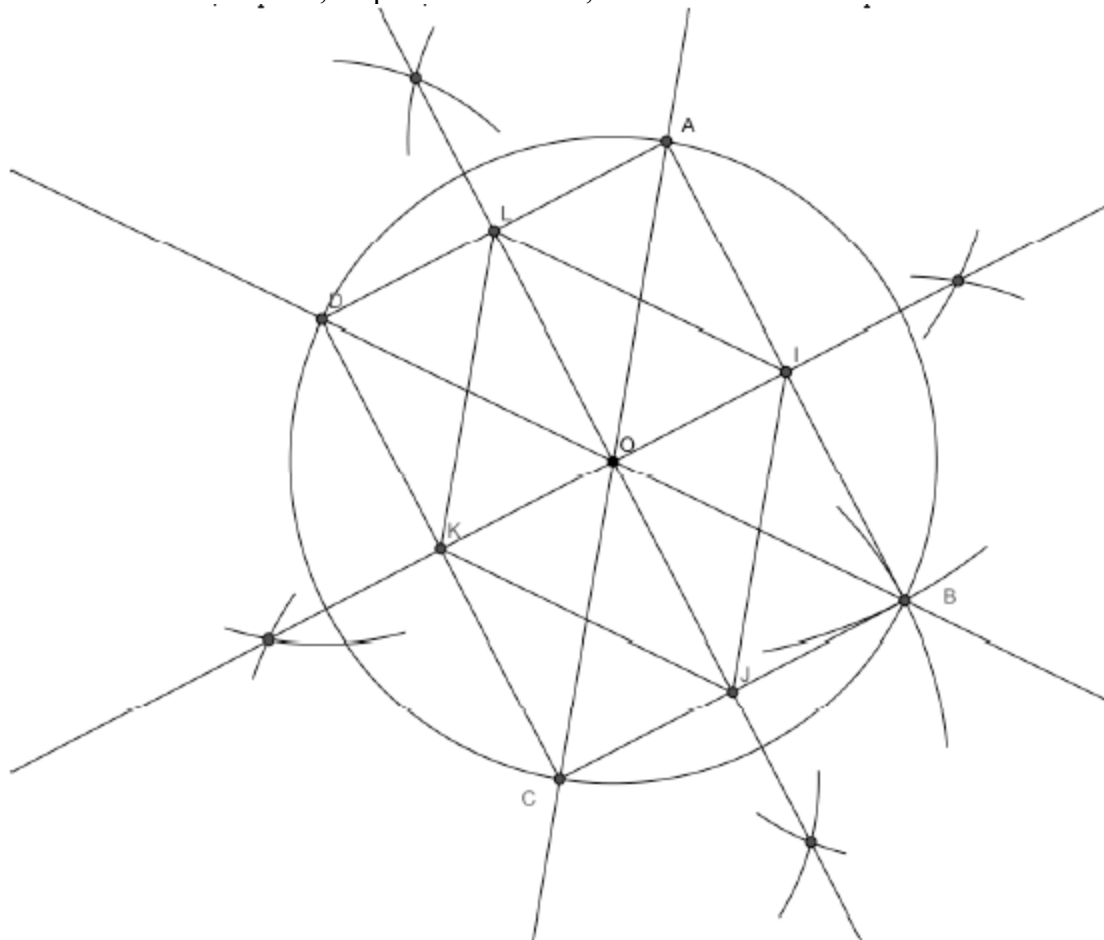
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ avec } AC = 2r \text{ et } BC = \frac{3}{4} AB$$

$$(2r)^2 = AB^2 + \left(\frac{3}{4} AB\right)^2 \text{ donc } 4r^2 = AB^2 + \frac{9}{16} AB^2 = \frac{25}{16} AB^2$$

On en déduit, comme $AB > 0$ et $r > 0$, que $AB = \frac{8}{5} r$ et donc $BC = \frac{6}{5} r$.

- b) Cette question évalue les compétences à construire des figures complexes en utilisant des instruments de construction en lien avec les propriétés géométriques adaptées.

Pour la construction, en prenant $r = 5$ cm, on obtient $AB = 8$ cm et $BC = 6$ cm sur le plan.



Calculer l'aire d'un rectangle. Calculer des grandeurs réelles connaissant l'échelle d'un plan.

L'aire du rectangle ABCD représenté sur le plan est égale : $6 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$.

Comme le plan est à l'échelle $1/60$, pour passer aux dimensions réelles, il faut multiplier les longueurs par 60 donc les aires par 60^2 c'est-à-dire par 3 600. Donc la vraie grandeur de l'aire du parterre rectangulaire est de : $48 \text{ cm}^2 \times 3600 = 172\,800 \text{ cm}^2 = 17,28 \text{ m}^2$.

Remarque : on pourrait aussi calculer d'abord les dimensions réelles de la plate-bande, avant de faire le calcul de l'aire.

Partie B

Question 3

Utiliser les formules du périmètre et de l'aire d'un rectangle. Écrire une expression algébrique.

Si on appelle x la mesure de la largeur du rectangle $A'B'C'D'$ et y la mesure de sa longueur (en cm), on sait que : $x + y = 14$ (mesure du demi-périmètre du rectangle ABCD en cm).

La mesure de l'aire de $A'B'C'D'$ est donnée, en centimètres carrés, par : $x \times y$ où $y = 14 - x$.

D'où : $\text{aire}_{(A'B'C'D')} = 14x - x^2$.

Question 4

Lire un graphique. Déterminer graphiquement le maximum d'une fonction. Lire les coordonnées d'un point.

Sur le graphique représentant la fonction qui à un nombre x associe $14x - x^2$, on constate que l'aire semble maximale pour la valeur $x = 7$.

Question 5

Utiliser les propriétés de quadrilatères particuliers (carré, losange).

Lorsque $x = 7$, on obtient $y = 7$ donc $x = y$, c'est-à-dire que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré.

Si $A'B'C'D'$ est un carré, alors $I'J'K'L'$ est aussi un carré. En effet, dans un carré, les médianes ont la même longueur. Or les médianes $[I'K']$ et $[J'L']$ du carré $A'B'C'D'$ sont ici les diagonales du losange $I'J'K'L'$. Ce dernier a donc des diagonales de même longueur : c'est un carré.

Question 6

Calculer la longueur de la diagonale d'un carré.

Le jardinier ne peut pas construire une plate-bande représentée par le carré $A'B'C'D'$ car on constate que le carré $A'B'C'D'$ de côté 7 cm n'est pas inscrit dans le cercle de rayon 5.

En effet ses diagonales $[A'C']$ et $[B'D']$ vérifient : $A'C' = B'D' = \sqrt{98}$ cm. Or : $\sqrt{98}$ cm < 10 cm (diamètre du cercle).

Partie C

Question 7

Calculer le périmètre d'un rectangle. Connaître la notion d'intervalle.

Le périmètre de la plate-bande est de : $2 \times (3,60 \text{ m} + 4,80 \text{ m}) = 16,80 \text{ m} = 1680 \text{ cm}$. En mettant une fleur par coin, il y a autant de fleurs que d'intervalles de 10 cm, soit 168 fleurs.

Question 8

Utiliser un pourcentage d'évolution pour déterminer l'état initial.

25% des fleurs commandées ne fleurissent pas, donc 75% d'entre elles fleurissent. Le nombre n de fleurs à commander est tel que : $n \times 75\% = 168$. Donc $n = \frac{168}{0,75}$. Il faut commander 224 tulipes pour que 168 tulipes fleurissent.

Question 9

Calculer la probabilité d'un événement dans une situation d'équiprobabilité.

Dans un paquet de 100 bulbes, 25 bulbes sont des tulipes. Le jardinier a déjà pris 4 bulbes de tulipes, donc il y a 21 bulbes de tulipes parmi les 96 bulbes restants. On suppose que les bulbes sont indiscernables au toucher, donc la probabilité que le jardinier tire au hasard un bulbe de tulipe est $\frac{21}{96}$.

Deuxième partie (13 points)

Partie A – Vrai – faux – justifier (6 points)

Cette partie aborde les notions suivantes :

- Notion de moyenne d'une série statistique.
- Équivalence d'unités de grandeurs volumiques.
- Volume d'un solide (cube et pyramide).
- Numération en base dix.
- Proportionnalité : échelles.
- Notion de multiple d'un nombre.
- Écriture scientifique. Puissance d'un nombre.

Cette partie évalue chez le candidat les compétences suivantes :

- mobiliser un raisonnement rapide en s'affranchissant d'une rigueur relative.
- dominer les notions mathématiques présentes implicitement et explicitement dans les situations d'enseignement.

Question 1

Calculer une moyenne. Distinguer moyenne et médiane.

L'affirmation 1 est FAUSSE. Contre-exemple : classe de quatre élèves dont les notes sont 6, 7, 8 et 15.

Question 2

Équivalence d'unités de grandeur volumique. Conversion.

L'affirmation 2 est FAUSSE. $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$. $1 \text{ cL} = \frac{1}{100} \text{ L} = \frac{1}{100} \text{ dm}^3 = 0,01 \text{ dm}^3$.

Question 3

Formule du volume d'une pyramide. Formule de l'aire d'un triangle.

L'affirmation 3 est VRAIE.

ABDE est une pyramide de base ABD (triangle rectangle isocèle en A, avec $AB = a \text{ cm}$, dont l'aire est $\frac{1}{2}a^2 \text{ cm}^2$), et de hauteur $AE = a \text{ cm}$. Son volume est donc égal à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^2 \times a \text{ cm}^3$, soit $\frac{1}{6}a^3 \text{ cm}^3$.

Question 4

Numération : valeur positionnelle des chiffres dans un nombre. Multiple d'un nombre.

L'affirmation 4 est VRAIE. $\overline{abcabc} = abc \times 1000 + abc = abc \times (1000 + 1) = 1001abc$ et $1001 = 7 \times 11 \times 13$.

Question 5

Notion d'échelle. Calcul avec des fractions.

L'affirmation 5 est VRAIE. Pour passer d'une carte au 1/25000 à une carte au 1/40000, il suffit de multiplier toutes les distances par $\frac{25000}{40000} = \frac{5}{8}$, et $7 \times \frac{5}{8} \text{ cm} = \frac{35}{8} \text{ cm}$.

Remarque : on peut bien sûr expliciter, en étape intermédiaire, la distance réelle entre les deux villages.

Question 6

Notion de puissance d'un nombre. Numération décimale.

L'affirmation 6 est VRAIE. $10^9 = 1\,000\,000\,000$ donc : $10^9 - 9 = 999\,999\,991$. La somme des chiffres du nombre obtenu est $8 \times 9 + 1 = 73$.

Partie B - Analyse des productions d'élèves (7 points)

Cette partie aborde les notions suivantes :

- calcul mental mettant en œuvre une réflexion (calcul non automatique) ;
- utilisation en acte de propriétés de la multiplication.

Cette partie évalue chez le candidat les compétences suivantes :

- repérer les propriétés de la multiplication utilisées en acte par des élèves ;
- analyser des erreurs commises par des élèves ;
- interpréter des résultats d'un nombre limité d'élèves en se référant à des connaissances plus générales.
- donner du sens aux erreurs, savoir faire des hypothèses sur leurs origines.
- prendre du recul face à une notion mathématique.

Question 1

Interpréter des résultats erronés d'un nombre limité d'élèves en se référant à des connaissances sur la multiplication.

Reconnaître des erreurs classiques et des obstacles dans l'apprentissage de la multiplication.

Donner du sens aux erreurs, savoir faire des hypothèses sur leurs origines.

Les élèves C, E et G ont commis des erreurs.

- Multiplication incorrecte des dizaines, mauvaise compréhension de la numération décimale.

L'élève C semble appliquer la technique posée de la multiplication de 18 par 5 en calculant deux produits (« 5 fois 8, puis 5 fois 1 ») puis en ajoutant les deux résultats partiels obtenus, sans prendre en compte les rôles respectifs des dizaines et des unités. Il semble qu'il ne donne pas de sens à la technique qu'il essaie d'appliquer.

- Mauvaise mémorisation de résultats intermédiaires.

C'est le cas de l'élève E. Il effectue « dans sa tête » l'algorithme posé, mais utilise deux fois la retenue de 4 : une première fois pour l'ajouter à 5, et une seconde fois comme unité. Il a certainement trop de choses à mémoriser pour utiliser ainsi l'algorithme.

- « Double comptage » incorrect.

C'est le cas de l'élève G, dans son résultat initial.

La procédure utilisée s'appuie sur la définition de la multiplication comme addition itérée.

Si l'on considère qu'il a obtenu son résultat sur l'ardoise par un procédé analogue à celui qu'il explique, cela signifie qu'il a ajouté 18 quatre fois et non cinq. C'est donc une erreur dans le double comptage (comptage du nombre de termes, et des sommes successives) : (1 ; 18), (2 ; $18 + 18 = 36$), (3 ; $36 + 18 = 54$), etc.

Cette erreur s'explique probablement par la difficulté à gérer à la fois ce double comptage et les additions (sa procédure additive demande des mises en mémoire).

Questions 2 et 3

Repérer les propriétés de la multiplication dans des productions d'élèves.

Dominer la notion mathématique enseignée.
Prendre du recul face à une notion mathématique.

- Procédures utilisant l'associativité : pour tous nombres a, b, c ,
$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = a \times b \times c.$$

Il s'agit de la procédure utilisée par l'élève F et que l'on peut formaliser par :
 $18 \times 5 = (9 \times 2) \times 5 = 9 \times (2 \times 5) = 9 \times 10 = 90$ (règle des zéros pour terminer).

La procédure utilisée par l'élève D est du même type, mais avec la division au lieu de la multiplication, dans un cas particulier : pour multiplier par 5, on multiplie par 10 et on divise par 2.
On peut la traduire par : $18 \times 5 = 18 \times (10 : 2) = (18 \times 10) : 2 = 180 : 2 = (100 + 80) : 2 = 100 : 2 + 80 : 2 = 50 + 40$.

- Procédures passant par une addition itérée.

Il s'agit de la procédure utilisée par l'élève B, procédure que l'on peut expliciter par :
 $18 \times 5 = 18 + 18 + 18 + 18 + 18 = 36 + 36 + 18 = 72 + 18 = 90$

L'élève G utilise aussi cette procédure, mais avec un succès mitigé.

- Procédures utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction : pour tous nombres a, b, c ,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

Il s'agit des procédures utilisées par les élèves A (distributivité sur la soustraction) et H (distributivité sur l'addition).

La procédure de A, par exemple, peut se traduire par $18 \times 5 = 20 \times 5 - 5 - 5$; et celle de H par :
 $18 \times 5 = (10 + 8) \times 5 = 10 \times 5 + 8 \times 5 = 50 + 40$.

Troisième partie - La division (14 points)

Cette partie aborde les notions suivantes :

- la multiplication ;
- la division euclidienne.

Cette partie évalue chez le candidat les compétences suivantes :

- lire un document pédagogique dans la perspective d'une utilisation ultérieure ;
- analyser des tâches en lien avec les objectifs annoncés ;
- identifier les intentions d'auteurs de manuel ;
- envisager des aides possibles face aux erreurs des élèves ;
- anticiper des procédures d'élèves ;
- repérer les variables didactiques d'une situation et envisager les effets des variations ;
- prendre en compte la continuité des apprentissages ;
- envisager la construction progressive d'une notion mathématique.

Partie 1

Question 1

Résoudre des problèmes de division euclidienne afin de mieux analyser la tâche demandée par la suite aux élèves.

	Maïa	Tim
Bande rouge	$32 \text{ cm} = 16 \times 2 \text{ cm}$, donc 16 rubans	$32 \text{ cm} = 5 \times 6 \text{ cm} + 2 \text{ cm}$, donc 5 rubans
Bande bleue	$67 \text{ cm} = 33 \times 2 \text{ cm} + 1 \text{ cm}$, donc 33 rubans	$67 \text{ cm} = 11 \times 6 \text{ cm} + 1 \text{ cm}$, donc 11 rubans
Bande jaune	$248 \text{ cm} = 124 \times 2 \text{ cm}$, donc 124 rubans	$248 \text{ cm} = 41 \times 6 \text{ cm} + 2 \text{ cm}$, donc 41 rubans

Question 2

Lorsque l'on envisage le choix d'une situation, pour la situer dans une progression plus large, il convient de s'interroger sur les connaissances « anciennes » que les élèves devront mobiliser pour tirer profit de l'apprentissage visé par la situation.

Les connaissances et les compétences sont essentiellement liées à la multiplication :

- connaître le sens « addition itérée » de la multiplication, en lien ici avec le découpage successif ou la juxtaposition des morceaux.
- connaître les tables de multiplication (notamment de 6), c'est-à-dire connaître le résultat d'une multiplication ($6 \times 5 = ?$) et être capable de dire « dans 30 combien de fois 6 ? » ou de savoir résoudre « $6 \times ? = 30$ » (Choix des nombres).
- savoir multiplier un nombre à un chiffre par un multiple de 10 (Techniques, procédures automatisées).
- être capable de calculer des produits en s'appuyant sur des résultats connus (par exemple « $6 \times 541 = 6 \times 500 + 6 \times 40 + 6$; $6 \times 4 = 24$ donc $6 \times 40 = 240$; puis $6 \times 5 = 30$ donc $6 \times 500 = 3\,000$ ») (Calcul réfléchi).

Question 3

Pour mener une analyse *a priori* (même modeste), il s'agit d'effectuer momentanément un changement de posture : envisager les procédures correctes susceptibles d'être mises en œuvre par un élève d'un niveau donné, les erreurs en référence à des connaissances relatives à l'apprentissage d'une notion donnée. Cela permettra au futur enseignant (candidat) de se projeter dans la mise en œuvre et le déroulement de la séance et notamment d'anticiper la gestion des phases de mise en commun (validation ou invalidation des réponses, des procédures...) et de synthèse, voire le contenu de l'institutionnalisation, même si ce dernier sera à réguler en fonction du travail effectif des élèves.

a) L'éventail des procédures est très large :

- utilisation d'un dessin en vraie grandeur ;
- utilisation d'un schéma ;
- addition itérée de 6 ou soustraction itérée de 6 ;
- utilisation d'un résultat connu : $6 \times 5 = 30$;
- essais de produits par 6 ;
- appui sur des résultats connus et ajouts de multiples de 6 :
 $12 + 12 = 24$; $24 + 6 = 30$; et $30 + 2 = 32$;

... avant de conclure en mettant en relation les calculs avec la question posée.

b)

- Mauvaise compréhension du problème qui conduit au choix d'une procédure inadaptée : ajouter ou multiplier les données.
- Difficulté à interpréter une procédure adaptée : par exemple dans la procédure « $12 + 12 = 24$ » il faut associer 24 à 4 rubans et 12 à 2 rubans. Etc.
- Erreurs de calculs.

c) La mise en commun doit être l'occasion de collecter toutes les réponses, de les valider ou de les invalider, de discuter de quelques procédures significatives. Proposer la mise en commun à l'issue de la question 1 permet de corriger certaines erreurs et de favoriser certaines procédures pour les questions suivantes. Elle permet ainsi à certains élèves de se réengager dans la suite, même s'ils ont faits des erreurs précédemment.

d) Elle peut se faire par découpage effectif d'une bande de 32 cm. Elle peut également se réaliser par un calcul additif $6\text{ cm} + 6\text{ cm} + 6\text{ cm} + 6\text{ cm} + 6\text{ cm} + 2\text{ cm}$ représentant le découpage (« une bande, 6 cm, ... »).

Elle peut également se réaliser par un calcul multiplicatif : $5 \times 6\text{ cm} = 30\text{ cm}$, il reste 2 cm de tissu, ce qui se traduit par $32\text{ cm} = 6 \times 5\text{ cm} + 2\text{ cm}$.

Question 4

Anticiper les effets des choix de valeurs des variables sur les procédures des élèves.

Identifier les intentions des auteurs à travers ces choix.

a) Uniquement par l'égalité $41 \times 6\text{ cm} + 2\text{ cm} = 248\text{ cm}$.

b) Dans la question 1, le choix de 32 permet une validation effective, ce qui n'est plus le cas ensuite. De plus, les nombres 6 et 32 permettent une matérialisation de la situation.

Cette matérialisation n'est plus possible dans la question 2. L'addition itérée devient plus fastidieuse. Dans la question 3, elle n'est plus envisageable.

Ainsi dans les questions 1 – 2 – 3, les nombres sont choisis de manière à bloquer progressivement les procédures les plus primitives (dessins et schémas par exemple).

Le choix du nombre 6 : les résultats multiplicatifs mémorisés peuvent être utilisés ; le nombre n'est pas trop grand.

Le choix du nombre 2 : la table de 2 est parfaitement connue ; le travail sur les doubles et les moitiés, commencé dès le CP, permet le recours à la multiplication tout en rendant très rapidement fastidieuse l'addition itérée.

Question 5

Envisager une synthèse à la suite d'une mise en commun, pour formuler et mettre en avant le savoir visé.

En rattachant la synthèse à la situation contextualisée, et en s'appuyant sur les productions des élèves, on pourrait montrer que les différentes procédures apparues peuvent toutes être traduites par l'égalité numérique $32 = 5 \times 6 + 2$, qui répond à la question « Combien de rubans de 6 cm dans 32 cm ? ».

On pourrait introduire l'expression « divisé par... ».

Question 6

Connaître le sens de la division euclidienne.

Analyser une suite d'exercices et établir des liens entre eux et avec ce qui précède pour identifier leur nature : entraînement, réinvestissement avec des changements (jeux sur les valeurs de certaines variables), ruptures, décontextualisation.

- Points communs :

- point commun principal : tous les problèmes ont la même structure (problème de division-quotition), et peuvent être traduits par une égalité de la forme $a = b q + r$ avec $0 \leq r < b$ (division euclidienne).
- les valeurs numériques sont telles que chaque problème peut être résolu par des procédures de calcul réfléchi.

- Différences :

- Contexte : les quatre premiers exercices reprennent le contexte de la situation de découverte, tandis que les deux autres sont dans des contextes différents.
- Les termes recherchés dans l'égalité caractéristique de la division euclidienne sont différents d'un exercice à l'autre : dans certains exercices, on recherche le quotient (ou le quotient + 1), dans un autre le reste, dans un autre le dividende.

Les exercices 4 – 5 – 7 reprennent les questions de l'activité mais avec un diviseur différent (exercices d'application) :

- d'abord 30 divisé par 5 (exercice 4) revient sur le résultat connu $6 \times 5 = 30$;
- puis 78 divisé par 5 (exercice 5) dans lequel les élèves peuvent s'appuyer sur la table de 5 bien connue (même au delà de 5×10) ;
- enfin 200 divisé par 9 (exercice 7) plus difficile au niveau du calcul « dans 200 combien de fois 9 ? ».

L'exercice 6 reprend le même contexte, mais propose la situation « retournée » : connaissant quotient, reste et diviseur, on cherche le dividende (calcul simple relevant de la table de 9 ou de 7).

L'exercice 8 est un problème de division-quotition dans un autre contexte où il faut trouver le quotient mais dans un champ numérique simple (la table de 8).

L'exercice 9 est un problème de recherche du reste dans une division-quotition, présenté dans un troisième contexte où il faut trouver le reste dans un champ numérique simple (la table de 7).

Partie II

Question 1

- a) Résoudre des problèmes relevant soit de la division euclidienne, soit de la division décimale.

Problème 1 : $350 \text{ cm} = 8 \times 43,75 \text{ cm}$ donc chaque étagère a pour longueur 43,75 cm.

Problème 2 : $350 \text{ cm} = 43 \times 8 \text{ cm} + 6 \text{ cm}$ donc il est possible de faire 43 morceaux.

- b) Situer chaque problème dans un champ mathématique plus large.

Situer chaque problème dans une classification de problèmes dits multiplicatifs afin d'appréhender les caractéristiques de leur enseignement : les différents sens de la division.

Ces deux problèmes sont énoncés dans le même contexte, et se résolvent par la même opération « $350 : 8$ ». Il ne s'agit cependant pas de la même division. Le problème 1 renvoie à une division décimale (résultat 43,75) tandis que le problème 2 renvoie à une division euclidienne (recherche du quotient 43).

C'est l'interprétation de la situation qui oriente vers le type de division (le résultat est un nombre décimal ou un nombre entier). Le problème 1 est un problème de division-partition (recherche de la valeur d'une part), tandis que le suivant est un problème de division-quotition (recherche du nombre de parts).

- c) S'interroger sur le rôle des instruments de calcul dans la résolution de problèmes.

L'enjeu est de donner du sens aux nombres (données et résultats) et aux calculs selon le contexte.

C'est aux élèves d'interpréter la situation pour savoir quel type de division effectuer.

Pour la division « $350 : 8$ », la calculatrice donne le résultat 43,75 quel que soit le contexte : elle permet ainsi d'alléger la charge de calcul de l'élève, mais ne prend pas en charge l'interprétation du résultat : cette tâche reste à la charge de l'élève.

Question 2

Pour amener le candidat à s'interroger sur les élèves, il est ici difficile de proposer seulement quelques productions relevées dans une classe donnée à un moment donné de l'apprentissage car beaucoup de choses sur le contexte mériteraient alors d'être précisées. En revanche, le contexte d'une évaluation « différée », à travers l'analyse de réponses à des items très ciblés (ici mise en œuvre d'une technique opératoire) peut permettre d'évaluer les capacités du candidat à interpréter

certaines erreurs et appréhender certaines difficultés en lien avec ses connaissances sur l'apprentissage de la notion.

- a) Les deux élèves essaient d'appliquer la technique opératoire qu'ils ont apprise avec plus ou moins de succès.

Aliette applique la procédure attendue avec la « méthode des meilleurs multiples ». Elle construit au fil des étapes une table partielle de multiplication par 8 en fonction de ses besoins : de 1×8 à 7×8 , 7 étant le chiffre le plus élevé du quotient. Elle en déduit les multiples de 80 et de 800.

Les écritures « $5 \times 8 = 40$ 400 4000 » ou « $7 \times 8 = 56$ 560 »

montrent que cette élève sait à chaque étape dans quel ordre d'unité elle travaille. Ceci lui permet de soustraire le nombre maximum de paquets de centaines de 8 du dividende. Elle poursuit cette technique soustractive. Elle ne calcule pas explicitement la dernière soustraction et n'indique pas le reste 0 de la division. Le quotient est exact. Elle ne commet aucune erreur.

Christian utilise la « méthode du partage des groupements de numération ». Il ne voit pas qu'il peut commencer par rechercher le quotient de 45 centaines par 8. Il retire 72 dizaines à 458 dizaines ($72 = 9 \times 8$ représente pour lui le plus grand multiple de 8 qu'il peut retirer). Puis il continue sa technique en retirant 72 unités jusqu'à ... épuisement ? Pour arriver au bout, une bonne cinquantaine d'opérations seraient nécessaires... En fait, il utilise une procédure soustractive. De plus, alors que Béatrice n'a pas su où écrire les chiffres des quotients partiels, Christian les juxtapose en une suite de 9 (au lieu de les additionner). La procédure est donc incorrecte. Enfin, on note une erreur de calcul dans la première soustraction ($15 - 7 = 9$ au lieu de 8).

b) Envisager une remédiation.

Christian n'a apparemment pas compris le sens de la technique posée qu'il essaie d'utiliser, technique qui s'appuie sur des connaissances en numération et la décomposition du dividende en milliers, centaines, dizaines et unités.

Pour aider cet élève à (re)construire du sens, on pourrait contextualiser l'opération dans un problème de partage équitable entre 8 personnes d'une collection de 4584 objets, organisée en paquets de mille, cent, dix, et unités isolées (ou dans un problème de partage équitable d'une collection valant 4584 organisée en supports valant 1000, 100, 10 et 1), en lui demandant d'effectuer le partage tout en traduisant ses actions sous forme d'une division posée.

Document d'accompagnement du sujet 3

En plus des éléments de correction, ce document permet de synthétiser les notions abordées et les connaissances évaluées chez le candidat.

Le sujet présenté est à spectre large. Il couvre les quatre grands axes d'une formation mathématique ambitieuse mais minimale pour les futurs Professeurs des Écoles.

I- Les savoirs mathématiques pour dominer les notions présentes implicitement et explicitement dans les situations d'enseignement

Le futur Professeur d'École doit maîtriser un bagage mathématique suffisant (par rapport aux exigences de l'école primaire). Le sujet aborde en profondeur les notions de raisonnement, de numération, de mise en équation, la géométrie plane, la division euclidienne.

II- Les savoirs mathématiques pour comprendre et s'approprier les programmes

Le futur professeur d'école doit pouvoir interpréter les programmes en termes de continuité (transpositions du savoir savant au savoir enseigné). Le sujet repère si le candidat est capable de reconnaître la genèse, l'évolution et la construction progressive d'une notion mathématique (le nombre à l'école maternelle).

III- Les savoirs mathématiques pour s'approprier des documents pédagogiques et concevoir un enseignement

Le futur professeur d'école doit pouvoir s'approprier des scénarii de classes et anticiper leur mise en œuvre (savoir faire des choix, savoir tirer parti des expériences...). Le sujet repère si le candidat est capable de :

- comprendre une progression ;
- étudier le statut et la place des différents types d'activités que l'on peut proposer en mathématiques (résolution de problème, apprentissage de techniques, développement d'automatismes, mémorisation, ...) ;
- adapter et faire évoluer une situation (par exemple en jouant sur les variables didactiques).

IV- Les savoirs mathématiques pour analyser les procédures des élèves

Le futur professeur d'école doit dominer l'activité mathématique des élèves. Le sujet propose de repérer, dans le cadre des grandeurs et des mesures (aire et périmètre), si le candidat est capable :

- repérer et interpréter les procédures effectives des élèves ;
- repérer et interpréter des erreurs en termes de connaissances.

Commentaires sur la question (en bleu) et Éléments de correction (en noir)

Première partie - Numération et Opérations (13 points)

Cette première partie aborde les notions suivantes :

- Analyse d'un système de numération : symboles utilisés, signification de ces symboles, règles d'écriture et de comparaison ;
- Analyse et production d'algorithmes liés aux opérations dans l'ensemble des entiers naturels.

Et évalue chez le candidat les compétences suivantes :

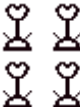
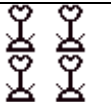
Il s'agit d'évaluer des connaissances disciplinaires relatives aux systèmes de numération et à celui de techniques opératoires dans l'ensemble des entiers naturels à travers l'exploration et l'analyse d'un système hors des usages du candidat.

Des questions de nature épistémologique visent à apprécier l'aptitude du candidat à analyser des caractéristiques d'un tel système de numération.

Ces différentes questions permettent de revenir sur les caractéristiques de notre système usuel de numération écrite avec des chiffres et l'influence de celles-ci sur les règles liées aux comparaisons de nombres et aux calculs sur ces nombres. Elles peuvent susciter *a posteriori* un questionnement sur l'apprentissage et l'enseignement de ces notions.

Question 1

Cette question permet d'évaluer la capacité du candidat à décoder un système de numération non usuel et à utiliser les règles d'écriture de ce système de numération.

   	4 258
      	2 154 813

Question 2

a) Se « décentrer » ou « prendre du recul » : Reconnaître que les règles de comparaison des entiers sont liées aux modes de désignations de ces nombres ; comprendre qu'une règle doit avoir un caractère général et être capable de l'énoncer en s'adaptant au contexte.

L'ordre croissant des unités numérales présentées ici est : trait, anse, spirale, fleur, doigt, têtard, dieu.

Dans chaque nombre, on repère l'unité numérale d'ordre supérieur.

- Si ces unités numérales sont différentes, le nombre le plus grand est celui qui a utilisé l'unité numérale de plus grand ordre.

- Si elles sont identiques, on dénombre leurs occurrences : le nombre le plus grand est celui où l'unité numérale apparaît le plus.

En cas d'égalité des occurrences, on reprend la comparaison avec les unités numérales d'ordre inférieur.

b) et c) Cette question d'ordre épistémologique (étude des systèmes de numération à travers les âges) évalue la capacité à étudier les avantages et inconvénients d'un système de numération relativement à un autre.

b) Dans notre système usuel de numération écrite (avec des chiffres), la longueur de l'écriture du nombre est suffisante pour comparer deux nombres entiers (s'ils sont de longueur différentes). On n'a pas besoin de dénombrer des symboles de même ordre (rang).

c) Le « 0 ». Ou alors tout nombre supérieur à dix millions pour lesquels de nouveaux symboles seraient nécessaires.

Question 3

Ici, il s'agit de mobiliser une technique de soustraction (celle par emprunt) sur une représentation des nombres autre que chiffrée.

Pour pouvoir calculer la différence de ces deux nombres, où A est supérieur à B, on va réorganiser A pour avoir plus de symboles de chaque sorte que dans B. Chaque symbole d'un certain ordre vaut dix symboles de l'ordre immédiatement inférieur.

A	
B	
A-B	

Question 4

Mobiliser des connaissances mathématiques pour justifier à une technique opératoire non usuelle : explicitation sur un exemple, puis généralisation. Décrire une méthode et écrire un algorithme en citant les propriétés utilisées.

a) Identifier une méthode associée à une technique opératoire et la reproduire sur un exemple.

1	28	
2	56	
4	112	
8	224	
16	448	
32	896	
34	952	donc $34 \times 28 = 952$
1	34	
2	68	
4	136	
8	272	donc $28 \times 34 = 952$
16	544	
28	952	

b) Mobiliser des connaissances relatives aux propriétés mathématiques sur les nombres et les opérations

$35 \times 47 = (1 + 2 + 32) \times 47$: décomposition de 35 en somme de puissances de 2

$35 \times 47 = (1 \times 47) + (2 \times 47) + (32 \times 47)$: distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
 $35 \times 47 = (1 \times 47) + (2 \times 47) + ((2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 47)$: décomposition de 32 en produit de facteurs premiers
 $35 \times 47 = 47 + 94 + 1504$: calcul et associativité généralisée à n facteurs
 $35 \times 47 = 1645$

c) Connaissance disciplinaire (nombres entiers) en citant les propriétés et en explicitant clairement (utilisation d'un vocabulaire précis) un algorithme.

Description de l'algorithme :

Dans la colonne de gauche, on écrit successivement la suite des puissances de 2 inférieures au premier facteur, à partir de $2^0=1$. On entoure celles dont la somme est égale à ce facteur.

Dans la colonne de droite, on écrit le second facteur sur la première ligne en correspondance de $2^0=1$, puis, sur les lignes suivantes, la suite des doubles du nombre précédent.

Le produit des deux nombres est alors égal à la somme des nombres de la colonne de droite qui correspondent aux nombres entourés dans la colonne de gauche.

Justification :

Tout nombre a une écriture unique en base 2 (ou tout nombre peut se décomposer en somme de puissances de 2).

Question 5

Connaissance disciplinaire sur les nombres entiers (relation nombre de chiffres et encadrements, puissances de 2)

La décomposition additive d'un nombre à trois chiffres avec des puissances de 2 nécessite d'utiliser au minimum le nombre $64 = 2^6$, il faudra donc écrire au minimum 7 lignes.

Le plus grand produit possible ici est : 9999×999

Comme $2^{13} < 9999 < 2^{14}$ donc 14 lignes.

Question 6

Connaissance disciplinaire portant sur les opérations (lien addition itérée/multiplication) dans l'ensemble des entiers. Capacité à analyser des procédures produites.

- a) Deux points communs :
 - utilisation de doubles successifs
 - calcul d'une somme de résultats intermédiaires.
- b) Capacité supplémentaire : décomposer un nombre entier en somme de puissances de 2.

Deuxième partie (13 points)

Partie A - Résolution d'exercices

Cette partie aborde les notions suivantes :

- Résolution algébrique et graphique d'un problème issu de la géométrie plane
- Résolution d'équation du premier degré
- PGCD
- Géométrie plane : utilisation du théorème de Thalès, construction à la règle et au compas
- Division euclidienne

Et évalue chez le candidat les compétences suivantes :

- Mobiliser des connaissances disciplinaires alors que celles-ci ne sont pas toujours explicitement

évoquées.

- Conduire un raisonnement et l'expliciter.
- Envisager différents modes de résolution.
- Mettre en équation un problème.
- Résoudre algébriquement et graphiquement une équation du premier degré.
- Savoir utiliser le PGCD en résolution de problème, savoir calculer un PGCD.
- Connaître les propriétés des quadrilatères particuliers (le trapèze).
- Reconnaître une configuration du théorème de Thalès pour calculer une longueur.
- Concevoir et exécuter un programme de construction.
- Utiliser les instruments de géométrie pour construire une figure.
- Connaître les relations dividende, diviseur, quotient, reste dans une division euclidienne.

Exercice 1

1) Traduire mathématiquement une situation : utiliser une inconnue proposée par le texte et « traduire » les données de l'énoncé pour résoudre le problème (dans un cas où la démarche est explicitée). Ici, il s'agit de traduire algébriquement un problème, et de résoudre algébriquement et graphiquement une équation du premier degré.

AIM est un triangle équilatéral donc $p(\text{AIM}) = 3x$

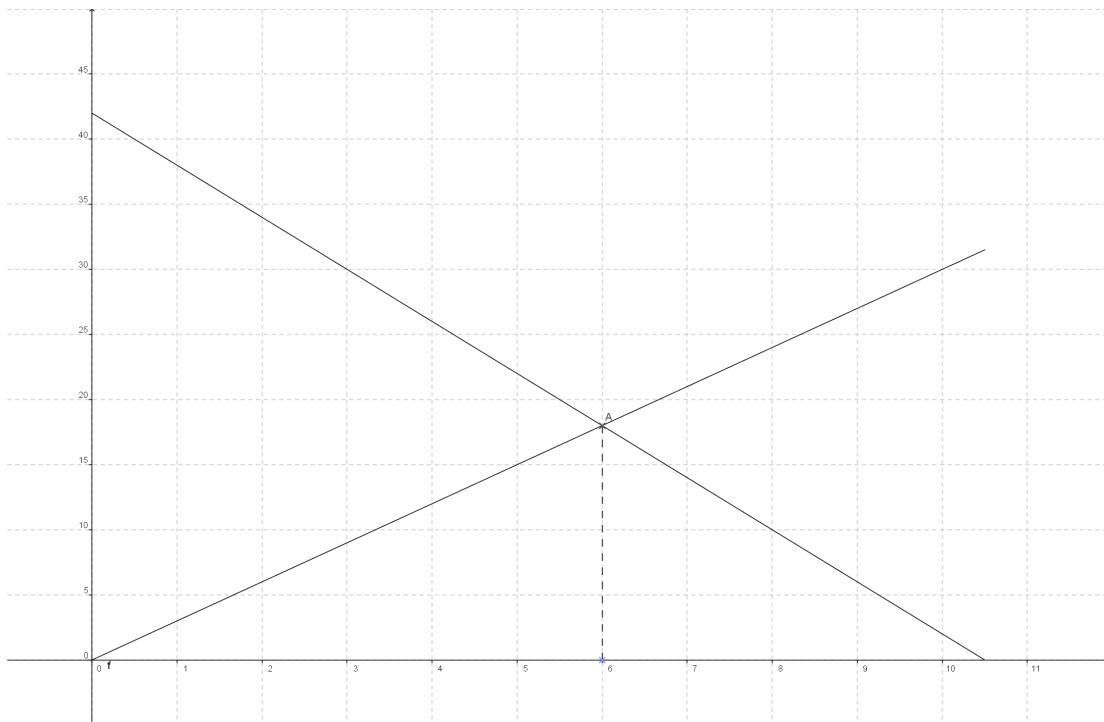
$M \in [AB]$ donc $MB = 10,5 - x$ d'où $p(\text{MJKB}) = 4 \times (10,5 - x)$

$p(\text{AIM}) = p(\text{MJKB})$ donc $3x = 42 - 4x$ d'où $7x = 42$

ainsi $x = 6$ cm.

2) Envisager une autre procédure et valider une réponse

Choix d'un repère ; Tracé de droites dans un repère ; Résolution graphique d'une équation du premier degré.



On trace les deux droites d'équations $y = 3x$ et $y = 42 - 4x$ dans un repère et on lit l'abscisse du point d'intersection des deux droites : 6.

Exercice 2

1) Interpréter mathématiquement la question, ici percevoir que le nombre de lots doit être un diviseur commun à chacun des nombres donnés et ici le plus grand possible ensuite le déterminer, donc que le nombre maximum de lots est le PGCD de ces nombres. Déterminer le PGCD de trois nombres.

Solution experte, déterminer le PGCD de 60, 48 et 36.

Soit n un nombre de lots, n est un diviseur commun de 60, 48 et 36. Comme on cherche le nombre maximum de lots, on recherche en fait le PGCD de 60, 48 et 36.

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 12 \times 5$$

$$48 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 12 \times 4$$

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 12 \times 3$$

3, 4 et 5 sont premiers entre eux donc le PGCD de 60, 48 et 36 est 12.

Il pourra constituer 12 lots identiques au maximum (c'est le PGCD de 36, 48 et 60) trouvé en utilisant les décompositions en produit de facteurs premiers de chacun des nombres.

2) Revenir au contexte du problème pour « lire les réponses » dans ces décompositions.

Chaque lot sera constitué de 5 salades, 4 oignons et 3 bottes de radis.

Exercice 3

1) Analyse de la description d'une configuration et des données associées, choix d'un théorème et vérification des hypothèses associées. Conduire un raisonnement : utilisation d'un théorème pour élaborer une réponse.

Envisager la construction d'une figure en respectant les données et les contraintes liées aux instruments.

Ici connaître les propriétés des quadrilatères particuliers (le trapèze).

Reconnaître une configuration du théorème de Thalès pour calculer une longueur.

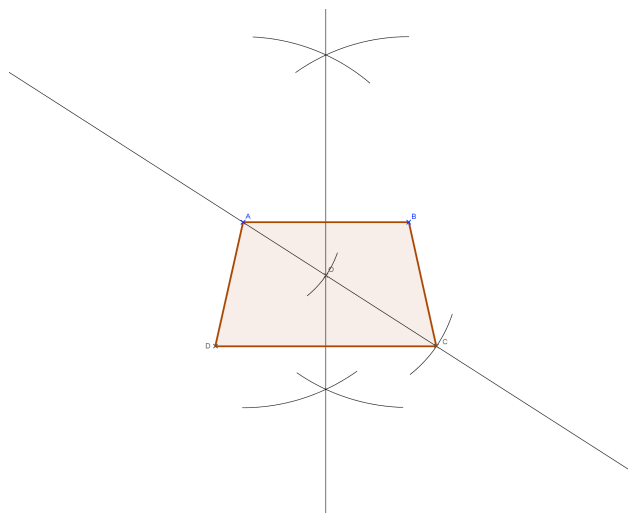
Dans le trapèze ABCD, on a :

- $(AB) \parallel (CD)$
- (BD) et (AC) sont sécantes en O

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \text{ donc } CD = \frac{AB \times OD}{OA} \text{ soit } CD = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

2) Connaître les propriétés du trapèze isocèle (axe de symétrie...). Concevoir et exécuter un programme de construction. Utiliser les instruments de géométrie pour construire une figure.



Exercice 4

1 a) Connaître les relations dividende, diviseur, quotient, reste dans une division euclidienne.

Mettre en œuvre une technique pour obtenir le diviseur d'une division euclidienne connaissant dividende, quotient et reste permet de s'assurer d'une bonne compréhension de cette opération.

On a $3899 = d \times 82 + 45$ et $0 \leq 45 < d$ d'où $d = 47$.

b) Envisager différentes réponses à un problème et organiser sa démarche pour les trouver toutes en respectant les différentes contraintes : ici, trouver les couples (dividende ; diviseur) à partir du couple (quotient ; reste) dans une division euclidienne, le dividende étant dans un intervalle imposé.

$$N = d \times 82 + 45 \text{ et } 0 \leq 45 < d$$

$N < 4200$ donc $d \times 82 + 45 < 4200$ soit $d \leq 50$. Ainsi : $45 < d \leq 50$.

On a donc les couples $(N ; d)$ suivants : $(3817 ; 46)$, $(3899 ; 47)$, $(3981 ; 48)$, $(4063 ; 49)$, $(4145 ; 50)$

2) Mettre à l'épreuve une démarche (question précédente) et conclure que dans certains cas, le problème n'a pas de solution.

$$\text{On a } N = d \times 82 + 112 \text{ et } 0 \leq 112 < d$$

$$\text{Et } N < 4200 \text{ donc } d \times 82 + 112 < 4200 \text{ soit } d < 50$$

Or $112 < d$. Contradiction.

Impossible, il n'y a pas de couple solution.

3) À partir de la résolution de deux problèmes, généraliser quant au nombre de solutions du problème en référence à une des données de l'énoncé (ici la valeur du reste).

$$N = d \times 82 + r \text{ et } 0 \leq r < d$$

$$\text{On a donc } 0 \leq r < (N - r) / 82 \text{ soit } 0 \leq 82r < N - r$$

$$\text{Donc } 83r < N < 4200 \text{ soit } r \leq 50$$

Pour qu'un couple $(N ; d)$ existe, avec $N < 4200$ et $q = 82$, il faut que r soit inférieur ou égal à 50.

Partie B - Analyse de productions d'élèves

Cette partie aborde les notions suivantes :

- Grandeurs et Mesures : Aire et périmètre.

Et évalue chez le candidat les compétences suivantes :

- distinguer grandeur et mesure ;
- analyser une tâche et les contraintes associées à la réalisation de celles-ci ;
- envisager différentes démarches susceptibles d'être mises en œuvre par un élève d'un niveau donné ;
- connaître et mettre en œuvre des procédures de comparaison d'aires et de périmètres dans le cadre des grandeurs et dans le cadre des mesures ;
- analyser des réponses produites par des élèves en les référant à des obstacles ou difficultés « connues » en relation avec l'apprentissage et l'enseignement de la notion (ici, distinction aire / périmètre notamment).

1) a) Capacité à anticiper des procédures d'élèves et à analyser le support proposé aux élèves en utilisant un vocabulaire adapté.

Choisissons pour unité d'aire le carreau carré du quadrillage et comme unité de longueur son côté.

- **Pour l'aire** : Dénombrement du nombre de petits carreaux à l'intérieur de chaque partie : 18 pour A et 24 pour B par comptage un à un ou par décomposition en morceaux « bien choisis ».

Ou par calcul du nombre total de carreaux en utilisant la formule de l'aire du rectangle : $6 \times 7 = 42$; la partie A correspond à la moitié moins 3 carreaux ($42/2 - 3 = 18$) et la partie B à la moitié plus trois carreaux ($42/2 + 3 = 24$).

Comparaison des deux nombres obtenus : l'aire de la parcelle A a pour mesure 18 et la parcelle B 24 (l'unité étant le carreau carré), donc l'aire de la parcelle B est la plus grande.

- **Pour le périmètre** : Dénombrement du nombre de segments correspondant au côté du petit carreau : 22 pour A et 22 pour B.

Ou calcul du demi-périmètre du rectangle plus longueur de la ligne adjacente aux deux parties... $(7 + 6 + 9)...$

Comparaison des deux nombres obtenus : les périmètres des parcelles A et B ont pour mesure 22 (l'unité de longueur étant le côté d'un carreau), les deux parcelles ont donc même périmètre.

1) b) **Envisager les grandeurs aire et périmètre et des procédures de comparaison, sans recourir à la mesure.**

On peut raisonner ici par décomposition / recomposition de surfaces et longueurs.

- Pour l'aire, si on envisage la superposition, on constate que la parcelle B recouvre entièrement la parcelle A (la surface A est incluse dans la surface B), on peut donc dire que l'aire de la parcelle B est la plus grande.

- Pour le périmètre, les côtés des parcelles sont deux à deux superposables, les deux parcelles ont donc même périmètre.

2) **Identifier les paramètres de présentation de la tâche qui peuvent induire certaines procédures.**

La présentation utilisant le quadrillage renforce l'idée de dénombrement de carreaux ou de côtés de carreaux. De plus, les nombres sont dans un domaine accessible pour l'élève et le dénombrement n'est pas trop fastidieux. Les élèves privilégient donc l'utilisation de la mesure pour comparer les grandeurs.

3) **Analyser des productions d'élèves. Reconnaître la validité d'une réponse. Émettre des hypothèses sur l'origine d'erreurs d'élèves.**

- Sa réponse à la question a) est correcte. On peut interpréter son explication de deux manières : soit par dénombrement effectif et comparaison des résultats, soit par recours à la perception globale des deux parcelles.

- Pour les périmètres, la réponse est erronée. L'élève a dénombré les carreaux intérieurs bordant la surface et non les côtés des carreaux. Et il a vraisemblablement fait une erreur dans l'énumération de ces carreaux (ce qui permet d'interpréter le nombre 17).

4) Pour cet élève, la réponse à la question a) est correcte et la justification par décomposition/recomposition aussi.

Pour la question b), pour cet élève, aires et périmètres sont deux grandeurs qui évoluent dans le même sens (c'est-à-dire si l'aire de la parcelle B est la plus grande, son périmètre le sera aussi), ce qui est faux.

Troisième partie - Analyse de situations de classe en maternelle

(14 points)

Cette partie aborde les notions suivantes :

- Construction du nombre et dénombrement de collections en maternelle
- Constitution de collections de cardinal donné
- Comparaison de collections.

Et évalue chez le candidat les compétences suivantes :

- identifier certaines variables à travers l'analyse de trois situations
- inférer assez finement les effets des changements de valeurs de ces variables sur les procédures des élèves, notamment celles qui seront permises ou empêchées
- Connaître des procédures de dénombrement
- Connaître des procédures de comparaison de collections
- Connaître les principes faisant de la comptine un outil efficace de dénombrement
- Connaître l'effet de variables de la situation sur les procédures de dénombrement et de comparaison
- utiliser à bon escient le vocabulaire.

PARTIE A - Dénombrer des collections

1) Décrire finement en identifiant les différentes connaissances intervenant dans une tâche de dénombrement collection par comptage ou de construction d'une collection de cardinal imposé.

Tâche A : énumérer chacun des jetons (le toucher voire le déplacer) et lui associer un mot-nombre de la comptine ; arrêter l'énumération et la récitation de la comptine lorsque le tas est épuisé et énoncer le dernier mot-nombre prononcé (reconnu comme la réponse attendue à la question).

Tâche B : mémoriser le nombre douze qui est le nombre de jetons demandés, prendre un jeton et le mettre dans le panier tout en énonçant un mot-nombre de la comptine, s'arrêter après avoir énoncé « douze » et placé ce dernier jeton dans le panier.

2) Compléter la description précédente en envisageant les difficultés que peuvent rencontrer les élèves à différents niveaux dans la mise en œuvre d'une procédure de dénombrement par comptage.

Différentes erreurs sont possibles, deux seulement sont demandées ici :

- faire une erreur dans la récitation de la comptine ;
- faire une erreur dans l'énumération des jetons : par exemple, ne pas énoncer un seul mot-nombre pour chaque jeton désigné, compter plusieurs fois le même jeton, oublier des jetons ;
- ne pas associer le dernier mot-nombre prononcé avec le cardinal de la collection.

3) Capacité à identifier ce qui distingue deux tâches qui au premier abord, peuvent paraître « semblables ».

Même si, dans les deux cas, la technique est basée sur la récitation de la comptine numérique avec mise en correspondance terme à terme de chaque mot-nombre énoncé avec un jeton, la tâche B est plus complexe à réaliser car :

- Elle nécessite la conservation dans la mémoire de l'élève du nombre « douze » comme but à atteindre.

- Dans la tâche A, c'est la situation qui prend en charge l'arrêt de l'action répétée « prendre un jeton et énoncer le mot-nombre suivant » (on arrête parce qu'il n'y a plus de jeton à prendre), alors que dans la tâche B, c'est l'élève qui doit décider, en utilisant l'information conservée en mémoire, du moment où il arrête cette répétition (arrivé à « douze », il reste des jetons qu'il peut prendre dans la réserve). On peut parler d'une « double » action incluant un contrôle.

PARTIE B - Variations autour de la tâche A

Globalement dans cette partie, il s'agit de mobiliser des connaissances sur les différentes procédures correctes susceptibles d'être mises en œuvre par un élève de GS dans une tâche de dénombrement d'une collection en les référant aux contraintes énoncées

- 4) L'élève peut percevoir globalement la quantité (*subitizing*) sans recourir au comptage un à un.
- 5) Les jetons sont ici organisés par paquets de cinq. L'élève peut reconnaître les constellations, associer directement la quantité et s'appuyer sur certains résultats mémorisés. Il en voit ainsi cinq et encore cinq et puis deux : cinq et cinq, dix et deux, cela fait douze.
- 6) Les objets ne sont plus déplaçables, l'élève doit organiser son pointage pour énumérer la collection. Il pourra par exemple cocher les éléments au fur et à mesure du comptage ou les relier.

PARTIE C - Variations autour de la tâche B

Globalement dans cette partie, il s'agit de mobiliser des connaissances sur les différentes procédures correctes susceptibles d'être mises en œuvre par un élève de GS dans une tâche de construction d'une collection en les référant à la façon dont le cardinal est présenté (mot-nombre prononcé, carte « constellation », écriture chiffrée...).

- 7) NB : le fait que la carte puisse être à la disposition de l'élève tout le temps ou non est une variable de la situation. De même pour le nombre de voyages possibles pour réaliser la tâche.

Si la carte peut être transportée par l'élève, une procédure possible consiste en faire de l'appariement un à un (entre les points de la carte et les jetons). Sinon, l'élève doit d'abord dénombrer sur la carte le nombre de points ou mémorise une décomposition de la collection elle-même grâce à la carte « constellation », et il doit constituer ensuite une collection de même cardinal, par exemple en prenant 5 jetons, puis 5 jetons, puis 2 jetons.

Remarque : si l'élève dispose de la carte, il peut réaliser un contrôle de son résultat en superposant les jetons sur les points de la carte, soit au cours du jeu, soit à la fin.

- 8) Reconnaissance de l'écriture chiffrée d'un nombre à deux chiffres. Ou associer le nom des nombres (mot-nombre) à leur écriture chiffrée.

PARTIE D - Variations autour de la tâche « Comparer des quantités »

Globalement dans cette partie, il s'agit de mobiliser des connaissances sur les différentes procédures correctes susceptibles d'être mises en œuvre par un élève de GS dans une tâche de comparaison de deux collections en les référant à la façon dont ces collections sont présentées. Dans les questions 10 et 11, les variables sont énoncées (proximité ou éloignement des deux collections constituées d'objets mobiles) dans la question alors que dans la question 12, le candidat doit identifier les variables (collections dessinées, cardinal de chaque collection, écart entre les deux, disposition des éléments dans les collections...) et les choix relatifs à celles-ci pour chaque item.

10) L'élève peut appairer parallèlement un élément d'une collection à un élément et un seul de l'autre et continuer tant que l'une collection n'est pas épuisée. À la fin, la collection qui contient encore des jetons est celle qui a le plus grand nombre d'éléments.

11) Si les collections sont éloignées l'une de l'autre, on peut procéder ainsi : isoler un élément de la première collection, puis isoler un élément de la seconde collection et recommencer ainsi jusqu'à ce que tous les éléments d'au moins une collection soient séparés. S'il reste des éléments non séparés dans une collection, alors cette collection a plus d'éléments que l'autre. (Remarque : si tous les éléments des deux collections ont pu être ainsi isolés par paire, alors les deux collections ont le même nombre d'éléments).

12) - **Item 1** : comparaison perceptive des collections ; les collections sont non organisées, la différence entre les nombres d'éléments est grande pour que la comparaison par la perception soit possible.

- **Item 2** : comparaison directe des collections ; la différence entre les nombres d'éléments est faible mais le fait que les collections soient organisées en parallèle (favorisant l'appariement un à un), permet de voir facilement l'élément en plus.

- **Item 3** : reconnaissance immédiate (*subitizing*) de la collection de cardinal le plus important ; c'est la faible taille des collections qui permet cette procédure.

- **Item 4** : reconnaissance immédiate des constellations et comparaison (soit en passant par le nombre, soit à partir d'une connaissance ordonnée des constellations) ; c'est l'organisation en constellations qui permet cette procédure.

- **Item 5** : recours au comptage et à la comparaison des nombres obtenus ; c'est le fait que les cardinaux des collections soient grands, que leur différence soit faible et que l'une des collections soit désorganisée qui induisent une procédure par comptage.

- **Item 6** : recours à l'appariement paquet par paquet, ou au dénombrement des deux collections ; la grande taille des collections, ainsi que le fait qu'elles soient non organisées et de cardinaux apparemment proches incitent à faire des groupements pour dénombrer ou appairer des sous-collections.

LES INCONTOURNABLES D'UN MASTER PE¹

Introduction

Les savoirs mathématiques pour la formation des professeurs d'école doivent permettre d'enseigner les mathématiques à l'école.

Contrairement à l'opinion naïve répandue, pour *enseigner* les mathématiques à un niveau, il ne suffit pas de posséder un niveau mathématique « plus élevé ». Cet enseignement est donc résolument orienté vers la préparation professionnelle, ce qui implique à la fois un approfondissement et un complément de certaines des connaissances mathématiques que les professeurs d'école auront à enseigner, liées à un corps de connaissances particulières, de nature plus didactique et épistémologique.

Finalités de la formation

En s'appuyant sur le référentiel de compétences professionnelles des enseignants, les finalités de la formation doivent être :

- rendre les étudiants capables :
 - * de construire des situations d'enseignement y compris sur des thèmes non traités en formation ;
 - * d'analyser et de prendre en compte des difficultés des élèves et l'hétérogénéité des classes ;
 - * développer une réflexion critique sur des pratiques professionnelles, des contenus de manuels scolaires et de documents pédagogiques ;
- rendre les étudiants capables :
 - * d'utiliser des publications didactiques et professionnelles en vue de construire leurs pratiques professionnelles ;
 - * de s'approprier des résultats de recherche pour nourrir des écrits réflexifs ;
- sensibiliser les étudiants à l'intérêt et l'efficacité du travail d'équipe.

Volume horaire total (estimation)

Autour de 200 h sur les 2 ans.

- Français/maths devraient occuper la moitié des heures ;
- pas moins d'1/5^{ème} de l'horaire de formation, conformément au ratio de l'horaire global des mathématiques dans les programmes du primaire).

Contenus

◇ Savoirs mathématiques (disciplinaires et épistémologiques) liés à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire

- Structures additives : typologie des problèmes, type de procédures possibles et attendues. Erreurs et obstacles. Mémorisation et calcul mental, écrit, instrumenté.
- Structures multiplicatives : typologie des problèmes, type de procédures possibles et attendues. Erreurs et obstacles. Mémorisation et calcul mental, écrit, instrumenté. Cas de la proportionnalité.
- Point de vue mathématique sur la structuration de l'espace et du temps. Erreurs et obstacles.
- Géométrie élémentaire du plan : Connaissances géométriques de base : caractérisations et constructions de figures simples à la règle et au compas (et utilisation d'autres instruments : équerre, gabarit, rapporteur ...), théorèmes de Pythagore et de Thalès, transformations ponctuelles du plan (isométries et homothéties

¹ Les notes inscrites en couleur correspondent à des références pour nous.

planes). Problèmes de description, de reproduction, de construction, de configurations du plan. Problèmes de repérage. Erreurs et obstacles.

- Géométrie élémentaire de l'espace : Connaissances géométriques de base : étude de solides simples, sections et projections planes de solides simples. Problèmes de description, de reproduction, de construction, de représentation de configurations de l'espace. Problèmes de repérage. Erreurs et obstacles.
- Nombre entier et numérations ; histoire des numérations et typologie ; la symbiose codages algorithmes opératoires. Construction du nombre entier (énumération, construction ordinale et cardinale...), erreurs et obstacles. Dialectique oral-écrit. Arithmétique élémentaire. Problèmes. Dénombrement.
- Nombres autres qu'entiers ; structuration des ensembles de nombres ; histoire du système métrique. Erreurs et obstacles. Problèmes.
- Grandeurs élémentaires et grandeurs physiques et leurs mesures : problèmes, erreurs et obstacles. Système métrique. Relation avec les sciences, instrumentation et mesures.
- Développement de la pensée logique. Classement, rangement. Erreurs et obstacles.
- Les mathématiques comme élément d'une culture scientifique : place des problèmes, corrélation originelle entre physique et mathématiques, relation avec les autres sciences.
- Fonctions numériques : fonctions linéaires, fonctions affines et quelques autres. Cas de la proportionnalité ; différents points de vue fonctionnel, scalaire, graphique, géométrique (agrandissement, réduction, lien avec le théorème de Thalès).
- Statistiques. Aléatoire.
- Résolution de problème. Modélisation algébrique, arithmétique.

◇ Savoirs didactiques et cognitifs indissociables des contenus mathématiques du premier paragraphe.

Relation entre ontogenèse et phylogenèse² : conséquences pour l'enseignement. Progressions thématiques et raison d'être de ces progressions.

Registres sémiotiques (lire, dire, écrire les mathématiques)³.

Situations didactiques (dévolution et institutionnalisation) / Variable didactique. Contrat didactique.⁴

Jeux de cadres et changement de cadres.⁵

Champs conceptuels⁶.

Paradigmes géométriques⁷, connaissances spatiales et géométriques⁸, artefacts.

Transposition didactique⁹.

Les dialectiques : dialectique outil/ objet¹⁰ ; dialectique tâche/ technique/ technologie/ théorie¹¹ ; dialectique automatisation /raisonnement¹² ; dialectique construction/ consolidation.

Place de la résolution de problèmes dans les apprentissages¹³.

Assortiments d'exercices. Niveaux d'adaptation.¹⁴

Les spécificités mathématiques de différents publics : ZEP/REP...¹⁵.

Les aides aux apprentissages : aides constructives et procédurales¹⁶.

Les spécificités didactiques des mathématiques par rapport aux autres sciences.

◇ Compétences professionnelles indissociables des contenus mathématiques à enseigner.

² Ontogenèse : genèse des savoirs chez le sujet apprenant (cognitif) ; phylogenèse : genèse des savoirs dans l'histoire des idées.

³ Duval

⁴ Brousseau

⁵ Douady

⁶ Vergnaud

⁷ Houdement-Kuzniak

⁸ Berthelot-Salin

⁹ Chevallard

¹⁰ Douady

¹¹ Chevallard

¹² Butlen

¹³ Point de vue cognitif : Richard, Julo,... ; point de vue de la théorie des situations de Brousseau

¹⁴ Genestoux

¹⁵ Butlen-Pézar-Masselot-Peltier

¹⁶ Julo

Connaître et comprendre l'architecture des programmes de mathématiques de l'école primaire au collège ; insérer son enseignement dans une continuité des apprentissages.

Connaître et utiliser des outils d'analyse des situations d'apprentissage.

Concevoir des situations d'apprentissage, les adapter aux publics.

Concevoir des assortiments d'exercices, prévoir et analyser les niveaux d'adaptation.

Concevoir et analyser des situations d'évaluation.

Concevoir et analyser des situations de régulation, des institutionnalisations.

Analyser et adapter des progressions thématiques et temporelles.

Repérer et analyser des difficultés d'élèves, concevoir des aides adaptées.

Connaître et utiliser à bon escient les différentes ressources pédagogiques : littérature professionnelle, manuels scolaires, banques d'exercices, matériel pédagogique, jeux, ressources internet, logiciels éducatifs.

Savoir utiliser les TICE et TUIC.

• Evaluation

Les évaluations peuvent prendre différentes formes en fonction des thèmes :

- examens écrits ;
- synthèses thématiques à partir de documents ;
- élaboration de séquences/séances en lien avec leur mise en œuvre (analyses *a priori* et *a posteriori*) ;
- analyses de travaux d'élèves, analyses de pratiques... ;
- ...

Elles peuvent porter sur des contenus disciplinaires, didactiques, épistémologiques, pédagogiques.

• Place des stages

Accompagnement des stages par des formateurs de mathématiques, de manière à pouvoir organiser une vraie articulation théorie/pratique (« ateliers de pratique professionnelle dans les classes »).

Remarque : les stages n'interviennent pas dans le volume horaire des masters (c'est l'accompagnement des stages qui compte au niveau horaire).

Document interne à revisiter en fonction des interlocuteurs et enjeux locaux

Les savoirs didactiques en italique correspondent à des propositions secondaires.

	Savoirs mathématiques (disciplinaires et épistémologiques)	Savoirs didactiques et cognitifs	TUIC
Résolution de problème. Modélisation algébrique, arithmétique.	Nombre entier et numérations. Histoire des numérations et typologie ; la symbiose codages algorithmes opératoires. Construction du nombre entier (énumération, constructions ordinale et cardinale...) Erreurs et obstacles. Dialectique oral-écrit. Arithmétique élémentaire. Problèmes.	Relation différente entre ontogenèse et phylogenèse. Progressions thématiques et raison d'être de ces progressions. Registres sémiotiques. Situations didactiques. Variable didactique. Dialectique outil/ objet. <i>Transposition didactique</i> ¹⁷	Calculatrice. Didacticiels ¹⁸
	Nombres autres qu'entiers. Structuration des ensembles de nombres. Histoire du système métrique. Erreurs et obstacles. Problèmes.	Relation homologue entre ontogenèse et phylogenèse : conséquences pour l'enseignement. Progressions thématiques et raison d'être de ces progressions. Registres sémiotiques. Situations didactiques.	Didacticiels ¹⁹
	Structures additives. Typologie des problèmes, type de procédures possibles et attendues. Erreurs et obstacles. Mémorisation et calcul mental, écrit, instrumenté.	Progressions thématiques et raison d'être de ces progressions. Variable didactique. Champs conceptuels. Dialectique automatisation /raisonnement. <i>Registres sémiotiques.</i>	Calculatrice. Exerciseurs ²⁰
	Structures multiplicatives. Typologie des problèmes, type de procédures possibles et attendues. Erreurs et obstacles. Mémorisation et calcul mental, écrit, instrumenté. Cas de la proportionnalité.	Progressions thématiques et raison d'être de ces progressions. Situations didactiques. Variable didactique Champs conceptuels. Dialectique automatisation /raisonnement. <i>Registres sémiotiques.</i> <i>Assortiments d'exercices. Niveaux d'adaptation</i>	<i>Calculatrice.</i> Exerciseur
	Point de vue mathématique sur la structuration de l'espace et du temps. Erreurs et obstacles		Didacticiel ²¹

¹⁷ Exemple : à travers l'histoire de l'enseignement des nombres.

¹⁸ Logiciels libres : *A nous les nombres* ; *Bonjour Poussin* . Logiciels payants : *Compte avec Floc* ; *Ploum*. Sites internet : *Abulédu* ; *Les jeux de Lulu*

¹⁹ Logiciel libre : *Oratio*

²⁰ Logiciels libres : *MathsEnPoche* ; *A nous les nombres* ; *Calcul* : *Matou matheux*

²¹ Logiciel libre : *Bouge avec Floc*

Géométrie élémentaire du plan. Connaissances géométriques de base : caractérisations et constructions de figures simples à la règle et au compas (et utilisation d'autres instruments : équerre, gabarit, rapporteur ...), théorèmes de Pythagore et de Thalès, transformations ponctuelles du plan (isométries et homothéties planes). Problèmes de description, de reproduction, de construction, de configurations du plan. Problèmes de repérage. Erreurs et obstacles.	Paradigmes géométriques, connaissances spatiales et géométriques, registres sémiotiques et artefacts. Situations didactiques. Variable didactique. Jeux de cadres et changement de cadres²². Champs conceptuels.	Didacticiels ²³
Géométrie élémentaire de l'espace. Connaissances géométriques de base : étude de solides simples, sections et projections planes de solides simples. Problèmes de description, de reproduction, de construction, de représentation de configurations de l'espace. Problèmes de repérage. Erreurs et obstacles.	Paradigmes géométriques, connaissances spatiales et géométriques, registres sémiotiques et artefacts.	Didacticiels ²⁴
Grandeurs élémentaires et grandeurs physiques et leurs mesures. Problèmes, erreurs et obstacles. Système métrique. Relation avec les sciences, instrumentation et mesures.	Progressions thématiques et raison d'être de ces progressions.	
Développement de la pensée logique. Classement, rangement. Erreurs et obstacles.		Didacticiels ²⁵
Les mathématiques comme élément d'une culture scientifique : place des problèmes, corrélation originelle entre physique et mathématiques, relation avec les autres sciences		
Fonctions numériques Fonctions linéaires, fonctions affines et quelques autres. Cas de la proportionnalité ; différents cadres : fonctionnel, scalaire, graphique, géométrique (agrandissement, réduction, lien avec le théorème de Thalès).	Situations didactiques. Jeux de cadres et changement de cadres. Dialectique outil/ objet.	
Statistiques. Aléatoire		

²² Exemple : Pythagore (aires/numérique)

²³ Logiciels libres : *Géonext* ; *Apprenti Géomètre* ; *Déclic* ; *Géogébra* . Logiciel payant : *Cabrigéomètre* . Site internet : *TraceEnPoche*

²⁴ Logiciel libre : *Poly* . Logiciels payants : *Cabri 3D* ; *Cubes 4* – Site internet : *Thérèse Eveilleau*

²⁵ Logiciel libre : *A nous les nombres*