Les suites, un objet typique de la transition lycée-université (2)

Stéphanie BRIDOUX, UMONS (Belgique)
Viviane DURAND-GUERRIER, Université Montpellier 2

Réunion commune CII lycées / CII université
IREM de Rennes
23 et 24 mai 2014

Le flocon de Von Koch

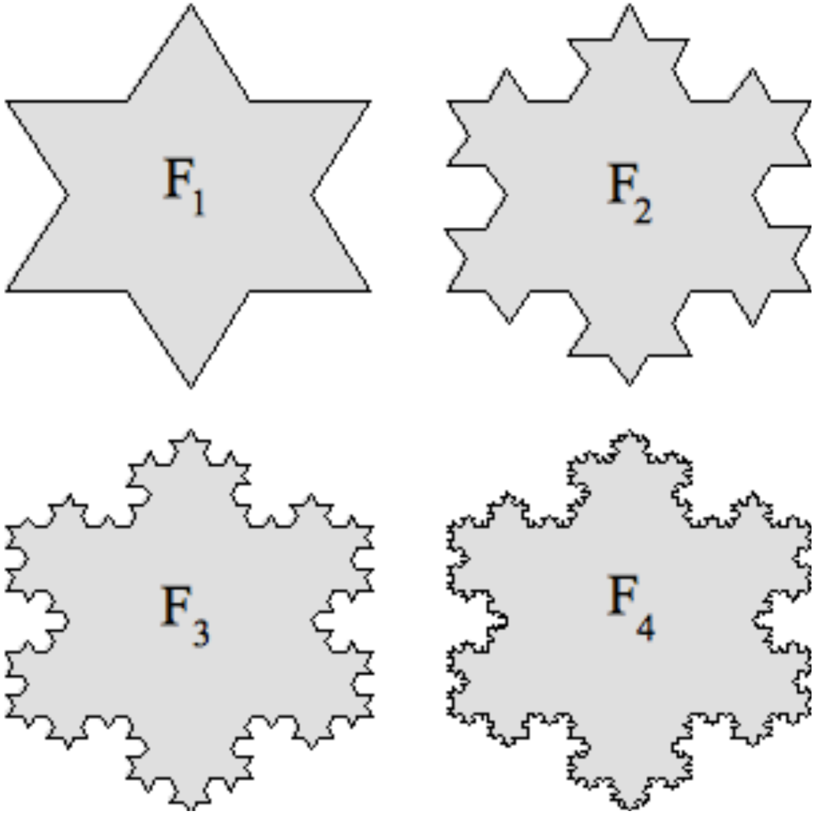
Une situation d'introduction à la notion de limite des suites

Le problème mathématique

On considère un triangle équilatéral, qui joue le rôle de figure initiale et on construit une suite de figures obtenue de la manière suivante :

- chaque segment composant le bord de la figure est découpé en trois segments isométriques ;
- le segment central est supprimé et remplacé par deux segments qui lui sont isométriques et ont un sommet commun pris à l'extérieur de la figure.

Etudier le périmètre et l'aire de la figure fractale obtenue par application itérée du processus récursif ci-dessus.


F1
F2
F3
F4

Une aire finie et un périmètre infini

La détermination de la suite qui modélise l’aire est techniquement assez difficile.

On peut par exemple commencer à déterminer le nombre de triangles ajoutés à chaque étape.

De F_0 à F_1 on ajoute 3 triangles

De F_1 à F_2, on ajoute 3 fois 4 triangles (chaque triangle extérieur détermine 4 côtés sur lesquels on ajoute un triangle) ;

De F_n à F_{n+1} chaque triangle ajouté à l’étape précédente donne naissance à 4 nouveaux triangles.

La suite des nombres de triangles ajoutés est donc une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 3.

$$\text{Pour tout } n > 0,\ T_n = 3\text{x } 4^{n-1}$$

Les triangles extérieurs d'une étape donnée *n* ont tous la même aire que l'on peut noter S_n. La suite de l'aire des triangles extérieurs est une suite géométrique de raison 1/9 avec $S_0 = A_0$. D'où $S_n = A_0/9^n$

On note A_n l'aire de la figure F_n, et $B_n = A_n – A_0$; B_n est l'aire de ce qui a été ajouté.

$B_1 = A_0/3$

Lorsque l'on passe de F_n à F_{n+1}, on ajoute T_{n+1} triangles d'aire $S_n/9$.

D'où, pour tout n >0, $B_{n+1} = B_n + 3\times 4^n\times A_0/9^{n+1}$

Ou encore $B_{n+1} = B_n + A_0/3 \times (4/9)^n$

D'où B_n est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $S_1 =A_0/3$ et de raison 4/9

D’où B_n est la somme des termes d’une suite géométrique de premier terme S_1 =A_0/3 et de raison 4/9

$$\forall n > 0\ Bn = \frac{A_o}{3} \times \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$$

$$\forall n > 0\ Bn = \frac{3A_o}{5} \times \left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

d’où finalement

$$\forall n > 0\ An = A_0 + \frac{3A_o}{5} \times \left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

Par passage à la limite, le calcul précédent montre que l’aire de *la figure* obtenue à l’issue du processus itératif est finie.

Ceci est en accord avec les information empiriques que l’on peut lire sur la figure. En effet la figure semble être contenue dans le domaine limité par l’hexagone déterminé par les sommets de la figure F_1, ou dans celui délimité par le cercle circonscrit à F_1.

Donner une preuve géométrique de ce résultat ne semble pas totalement trivial

A chaque étape, le périmètre de F_{n+1} s'obtient en multipliant par 4/3 le périmètre de F_n (à chaque étape, un segment de longueur l est remplacé par 4 segment de longueur l/3).

En notant *a* la longueur du côté du triangle équilatéral initial, la suite P_n des périmètres des figures F_n est la suite géométrique de premier terme *a* et de raison 4/3.

Cette suite tend vers $+\infty$ lorsque *n* tend vers $+\infty$

Une situation d' introduction
à la notion de limite
en première scientifique
(IREM de Poitiers et Thèse Isabelle Bloch)

But général et organisation de la situation

Etudier le comportement de fonctions ou de suites et engager les preuves des conjectures.

Organisation de l'activité des élèves en appui sur des objets qu'ikls peuvent construire à partir d'objets suffisamment familiers, afin qu'ils puissent interpréter les résultats de leurs actions.

S'assurer que les élèves ont des connaissances suffisantes pour émettre et étayer des conjectures, ceci bien qu'ils ne disposent pas encore de la connaissance visée.

Faire émerger la nécessité de prouver les conjectures et pour cela d'introduire sous une forme ou sous une autre une définition de la limite, qui dans une situation d'introduction devra sans doute être introduite par le professeur.

(*Librement adapté de Bloch 2000 page 278*)

Variables didactiques d'une situation d'introduction à la notion de limite

Dans l'organisation générale de la situation, certains choix se présentent comme des variables didactiques, dans la mesure où la détermination de ces paramètres change ce qui est à la charge des élèves, et le type de travail qu'ils seront amenés à faire en rapport avec la notion de limite. Tel est le cas :

1. du choix entre fonction et suite ;
2. de la nature des fonctions ou des suites choisies (quelconque - de terme général connu - d'un type connu antérieurement des élèves) ;
3. Des éléments mis à la disposition des élèves sur lequel ils vont pouvoir engager des calculs et émettre des conjectures ;
4. de la nature de la ou des limites pressenties
5. des moyens de vérification et de validation disponibles.

Conditions identifiées a priori comme permettant d' atteindre les objectifs d' apprentissage visés

- Le problème de départ est géométrique et donc visualisable
- La figure "limite" n' est pas connue ni accessible facilement
- Le terme général peut s' exprimer en fonction de *n* et si possible par une suite connue des élèves ou accessible via leurs connaissances
- La nature de la suite permet le travail numérique (conjecture sur la limite et évaluation de ce que le terme u_n diffère de l de moins de ε
- On dispose dans la situation de deux suites ayant des comportements différents du point de vue de la limite (finie/ infinie)

Le flocon de Von Koch est un candidat remplissant toutes ces conditions

(d' après Bloch, 2000, p.281-283)

La situation didactique du flocon de Von Koch

Cette situation a été initialement proposée comme permettant une première introduction à l'analyse dans une brochure de l'IREM de Poitiers (Gaud & al. 1996). Elle a été reprise par Isabelle Bloch dans la cadre de sa thèse et mise en œuvre dans une classe de première scientifique dont elle était le professeur en février 1996.

Le flocon de Von Koch est la figure fractale obtenue par itération du processus décrit dans le problème précédent.

Le but de la situation est de faire calculer, par les élèves, le périmètre et l'aire du flocon. Comme il s'agit d'une figure fractale obtenue à l'issue d'un processus infini, ayant une périmètre infini et une aire finie, l'auteur fait l'hypothèse que la situation va confronter les élèves à l'idée de limite ; et que les élèves percevront la nécessité de critères pour distinguer les différentes sortes de limites.

.

Ce que cette situation permet de travailler

Sur le plan conceptuel

Faire émerger un questionnement sur la distinction entre infini potentiel et infini actuel

Infini potentiel : Quel que soit l'entier *n* considéré, on peut construire F_{n+1} à partir de F_{n}.
Chaque figure F_n est un polygone ; son aire et son périmètre sont finis.

Infini actuel : On considère la *figure* F obtenue à l'issue du processus.

Ce que cette situation permet de travailler

Par rapports aux obstacles identifiés

- Remettre en cause la conception selon laquelle toute suite strictement croissante converge vers $+\infty$.
- Remettre en cause le théorème en acte selon lequel toute suite croissante majorée par un nombre réel M converge vers M.
- Réinterroger la réduction de l'analyse au numérique : mettre en valeur les liens entre l'analyse et la mesure des grandeurs, les relations entre mathématiques et physique.

Ce que cette situation permet de travailler

Par rapports aux objectifs visés

- Faire émerger la nécessité de se donner des outils plus fins pour étudier le comportement des suites à l'infini.
- Travailler sur les relations entre conjecture et preuve
- Mettre en évidence le caractère non arbitraire des choix faits pour définir la notion de limite.
- Travailler sur l'importance des quantificateurs pour une définition adéquate de la notion de limite.

Ce que cette situation permet de travailler

Par rapport à l'usage des suites

•Pertinence de l'utilisation des suites pour modéliser une situation géométrique mettant en jeu un processus itératif (Changement de cadre).

•Nécessité d'élaborer soi-même les relations de récurrence en jeu en appui sur la situation géométrique donnée, qui seule permet de contrôler la validité des modèles retenus.

Ce que cette situation permet de travailler

Par rapport à l'usage des suites

- Pertinence du modèle « suite géométrique » pour les différents objets en jeu et identification des raisons associées.
- Technique de transformation d'écriture pour reconnaître un modèle connu.
- Puissance des techniques de sommation des suites géométriques pour condenser une somme comportant un nombre quelconque de termes en une expression algébrique connue.

Ce que cette situation permet de travailler

Sur l'algorithmique et la récurrence

- Programmation du processus d'engendrement de la figure. Tracé de la figure avec Géogebra, Python ou Logo ; met en jeu la récursivité.
- Identification de ce que « l'algorithme » ne s'arrête pas sauf si on ajoute un critère d'arrêt.
- Étude de la preuve de l'algorithme avec critère d'arrêt.
- Programmation du calcul de l'aire et du calcul du périmètre – lien avec la récurrence – choix des variables - énumération

Ce que cette situation permet de travailler

Sur Aire et Périmètre

- Mise en œuvre de l’équidécomposabilité des aires sur des figures génériques.
- Mise en œuvre (implicite) de l’axiome de la mesure (additivité).
- Travail sur l’effet de l’agrandissement (homothétie) sur l’aire d’une part, sur le périmètre d’autre part, autrement dit entre la dimension D d’une figure et l’effet d’une homothétie de coefficient k sur cette figure : la mesure est multipliée par k^{D}. *Ici D est égal à 1 ou 2 pour les figures Fn selon que l’on considère le polygone ou la surface qu’il délimite.*

Ce que cette situation permet de travailler

Sur Aire et Périmètre (prolongements)

La courbe *Flocon de Von Kock* délimite une surface d'aire finie tout en ayant un périmètre infini.

Il s'agit d'un objet dont la dimension n'est pas un entier.

Nécessite de considérer d'autre type de mesure.

Par exemple la mesure de Hausdorff.

« Les fractals sont des points fixes sur des compacts de Hausdorff ».

Définition d'une figure fractale autosimilaire

C' est une figure qui possède une propriété d' autosimilarité par agrandissement ou réduction. Elle peut s' obtenir à partir d' un polygone par un procédé d' engendrement récursif à partir d' un générateur initial.

Ces figures ont été introduites par Peano (1858-1932), et utilisées par Mandelbrot (1924-2010), qui les a caractérisées par le fait que leur dimension de Hausdorf est superieur structement à leur dimension topologique (pour le flocon de Von Koch : ln4/ln3);

Les fractales sont utilisées pour modéliser des situations irrégulières ou de chaos.

Pour en savoir plus, voir par exemple le programme de l' hommage à Benoît Mandelbrot (décédé en octobre 2010) http://events.polytechnique.fr/accueil/hommage-a-benoit-mandelbrot/

Quelques références sur les fractals

- Peitgen, H. & al. (1992) Fractals for the classroom, Springer-Verlag
- TP Maths en Jean http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/94087091.pdf
- Dossier Accromaths

http://accromath.uqam.ca/sujet/dossier-fractales/

- TP Université Montpellier 2

www.math.univ-montp2.fr/SPIP/-TP-sur-les-objets-**fractals**-auto

Ce que cette situation permet de travailler

Sur les rapports entre mathématiques et réalité

Le flocon de Von Koch est obtenu par passage à limite d'une suite de figures polygonales. Ce n'est pas une figure polygonale.

En outre, contrairement au cercle qui pourrait aussi être considéré comme limite d'un processus itératif d'engendrement, on ne sait pas la représenter sur un dessin : une figure F_n n'est pas un fractal ; la suite des figure F_n fournit des approximations successives de la courbe fractale.

A quels niveaux l'utiliser ? Avec quels objectifs

Au lycée

Pour donner du sens à la notion de limite de suite, motiver les premières définitions pour dépasser les approches informelles, pour questionner les relations entre infini potentiel et infini actuel

Pour travailler sur la modélisation, en TPE, dans les relations maths/physique ou maths/biologie.

Dans un travail associant Mathématiques et Philosophie (thématique : la raison et le réel).

Etc…

A quels niveaux l'utiliser ? Avec quels objectifs

En licence 1$^{\text{ère}}$ ou 2$^{\text{ème}}$ année ou en Prépa

Pour donner du sens à la notion de limite.

Pour motiver la définition formelle.

Pour servir de situation de référence pour le cours d'analyse.

Pour remettre en cause les conceptions erronées.

Pour questionner les relations entre infini potentiel et infini actuel.

Pour travailler la récurrence dans un cas non trivial.

Pour travailler les algorithmes.

…

A quels niveaux l'utiliser ? Avec quels objectifs

En licence 3ème année ou en M1

Dans le cadre d'un cours sur la théorie de la mesure.

Voir par exemple : TP sur les objets fractals Université Montpellier 2

www.math.univ-montp2.fr/SPIP/-TP-sur-les-objets-**fractals**-auto

Dans un mémoire de recherche , un TER etc…

A quels niveaux l'utiliser ? Avec quels objectifs

En Master MEEF second degré

Pour revisiter le concept de limite de suite, les différentes notions associées et débusquer les conceptions erronées.

Pour travailler les liens entre les mathématiques du secondaire et les mathématiques du supérieur, entre mathématiques et physique, entre mathématiques et réalité.

Pour travailler sur les principales notions de la théorie des situations didactiques (variable didactique, situation d'action, de formulation ou de validation, milieu d'une situation).

…

A suivre…