Démarches d’investigation et résolution de problèmes : quelle place dans les travaux des IREM ?

RESUME

Ce document présente un état des lieux des recherches menées dans les IREM en 2012 sur les questions relatives aux démarches d’investigation et à la résolution de problèmes. Il révèle que ces thèmes font actuellement l’objet de recherches vives dans le réseau des IREM, et montre la grande diversité des mises en œuvre. Il propose des liens vers des ressources, qui sont autant de pistes permettant d’apporter des réponses aux demandes institutionnelles des programmes actuels de collège et de lycée.

MOTS-CLES

Démarche d’investigation en mathématiques, résolution de problèmes, problèmes ouverts, IBE, IBME

CONTACTS

Ce dossier a été coordonné pour la Commission Inter-IREM Lycée par Benoît Ray benoitray@yahoo.fr

Sommaire

Introduction

La démarche d'investigation est recommandée dans les programmes de collège depuis 2005[1]. La réforme des programmes de lycée[2] accorde depuis 2009 une place importante à la résolution de problèmes, comme faisant suite à l'évolution curriculaire initiée au collège. Si dans les programmes de collèges un canevas est proposé concernant la démarche d'investigation, la résolution de problèmes n'est pas précisément décrite dans les programmes de lycée ; on peut cependant penser que, dans l'esprit des concepteurs de ces programmes, ces deux dénominations relèvent des mêmes processus d'apprentissage et placent les mathématiques à la fois comme outil et comme objet d'étude : l'idée générale qui sous-tend le rôle central de la résolution de problèmes dans le curriculum mathématique est que « l'on apprend des mathématiques en résolvant des problèmes ».

Pour faire le point sur les travaux concernant la démarche d'investigation et la résolution de problèmes, la Commission Inter IREM Lycée a organisé un cycle de conférences pendant l'année 2011-2012 ; parallèlement, un recensement des travaux en cours dans les IREM a été effectué. Le présent document, qui s'adresse à tous les enseignants de mathématiques du secondaire, dresse une liste – sans doute non exhaustive – de ces travaux. Pour chaque groupe de travail sont proposés des liens vers des ressources et/ou des compléments d'information.

Les contributions rassemblées ici ont été pour la plupart rédigées par les responsables des groupes de travail, dont les adresses mail sont mentionnées. Elles témoignent de la très grande diversité des démarches d'investigation, des cadres théoriques aux modalités organisationnelles, et montrent que les démarches d'investigation sont actuellement au cœur de recherches vives. La première contribution est un compte-rendu de la conférence donnée par Michèle Artigue le 14 janvier 2012 à Paris ; ce texte permet de rendre compte des différentes approches concernant les démarches d'investigation.

En fin de ce document figurent des éléments de bibliographie concernant des ouvrages de référence à propos des démarches d'investigation et de la résolution de problèmes.

[1] Bulletin officiel hors série n° 4 du 9 septembre 2004

[2] Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009 & Bulletin officiel spécial n°9 du 30 septembre 2010

Démarche d'investigation… une enquête (par Michèle Artigue)

Compte-rendu de la conférence donnée par Michèle Artigue le 14 janvier 2012 à Paris. En choisissant un cadre plus large que celui des IREM en France, Michèle Artigue nous a fait part de son expérience à propos de l'IBME (inquiry based mathematics education) telle qu'elle la rencontre dans les projets européens PRIMAS[3] *et FIBONACCI*[4] *, dans lesquels elle intervient en tant que membre des comités scientifiques.*

Pour pallier à la désaffection pour les études scientifiques en Europe – désaffection attribuée en particulier à des méthodes d'enseignement inadaptées – le rapport Rocard[5] préconise la promotion et la généralisation de l'IBSE (inquiry based science education) : « Les améliorations en matière d'enseignement des sciences doivent être menées par le biais de l'introduction de nouvelles formes de pédagogie. L'introduction d'approches basées sur la démarche d'investigation dans les écoles, les programmes de formation des professeurs à l'IBSE et le développement de réseaux de professeurs doivent être activement promus et encouragés » (Recommandation 2).

Le rapport Rocard demande un soutien fort de la part de l'Europe en renforçant des initiatives telles que Pollen[6] et Sinus-Transfer[7]. Si l'ambition de dissémination de ces pratiques est évidente, des questions restent cependant encore ouvertes, sur la nature même de l'IBME, ses rapports avec l'IBSE, sur la nature de l'évidence invoquée relativement à l'efficacité de l'IBE et sur les projets cités pour assurer l'efficacité d'un tel enseignement.

L'utilisation de l'expression IBE est relativement récente en mathématiques et visiblement importée du contexte de l'enseignement scientifique. On ne peut cependant oublier que, depuis des décennies, on a essayé de promouvoir en mathématiques des démarches qui ne sont pas sans rapport avec l'IBE. Il est donc important d'essayer de situer l'IBE par rapport aux diverses approches et constructions didactiques développées en ce sens, et notamment la tradition de « problem solving » remontant aux travaux de Polya, la « realistic mathematics education » dont l'origine remonte à Freudenthal, la théorie des situations didactiques initiée par Brousseau, la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard ou les approches liées à la modélisation. L'IBME peut être globalement définie – c'est le cas dans Fibonacci par exemple – comme une approche de l'enseignement qui veut offrir aux élèves la possibilité d'expérimenter comment les connaissances mathématiques se développent à travers les efforts personnels et collectifs, pour répondre à des questions substantielles émergeant dans une diversité de contextes tant relatifs à la vie quotidienne des élèves qu'aux mathématiques elles-mêmes.

Cette définition très générale ne permet cependant pas de rendre compte des différences qui existent entre les diverses approches possibles de l'IBME suivant l'accent qui y est mis sur telles ou telles caractéristiques ou visées de la démarche d'investigation, par exemple l'accent mis sur l'authenticité des questions et de l'activité des élèves appréciées par rapport au monde hors-scolaire de l'élève, sur la pertinence épistémologique et mathématique des questions et la façon dont elles soutiennent la structuration progressive des connaissances, sur les situations extra-mathématiques et les processus de modélisation que la démarche d'investigation met alors nécessairement en jeu, sur

---

[3] http://www.primas-project.eu/en/index.do

[4] http://www.fibonacci-project.eu/

[5] http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_fr.pdf

[6] www.pollen-europa.net/

[7] http://www.sinus-transfer.eu/

la dimension expérimentale des mathématiques et sur les possibilités que la technologie offre pour soutenir cette dimension, sur le développement d'aptitudes générales de résolution de problèmes et de recherche, sur le développement de l'autonomie des élèves dans les différentes phases du processus d'investigation, sur les interactions langagières entre élèves et enseignants, sur la dimension sociale et collaborative de la démarche d'investigation, ou encore sur sa dimension critique, démocratique et citoyenne.

Si de nombreuses tentatives de mise en œuvre d'activités relevant d'une démarche d'investigation ont vu le jour, les exemples ne sont pas toujours très convaincants. Les besoins en termes de formation spécifique des enseignants sont loin d'être satisfaits et les contraintes institutionnelles rendent souvent l'écologie de ces démarches difficile hors dispositifs spécifiques. Les affirmations sur les effets demandent à être sérieusement consolidées et les potentialités et les limites demandent à être clarifiés. Une difficulté majeure réside dans le fait que les besoins d'expertise dépassent les seules compétences disciplinaires.

Les stages Hippocampe (IREM d'Aix-Marseille)

Les stages Hippocampe sont organisés dans quatre universités (Aix-Marseille, Brest, Nice et Toulouse) et d'autres expériences sont menées régulièrement dans des établissements d'autres académies. Lionel Vaux (IREM d'Aix-Marseille) a nous a transmis ce descriptif. Xavier Bressaud (IREM de Toulouse) a animé une conférence à ce sujet le 8 juin 2012 à Toulouse.

Lionel Vaux : lionel.vaux@univ-amu.fr
Xavier Bressaud : bressaud@math.univ-toulouse.fr
Les stages Hippocampe : http://www.irem.univ-mrs.fr/-Hippocampe-

1. Hippocampe : principe et historique

Les stages Hippocampe sont des stages d'initiation à la démarche de chercheur en mathématiques, principalement à destination des lycéens. Ils se déroulent en classe entière, pendant trois jours consécutifs, à l'université, sur le temps scolaire.

Le premier stage Hippocampe en mathématiques a eu lieu en juin 2005. Les retours furent très positifs, tant pour les élèves et leur professeur que pour les tuteurs. Il fut suivi par trois nouveaux stages dont un sur une thématique informatique, en 2005-2006. Cette activité a rapidement atteint un rythme de croisière d'une quinzaine de stages par an.

L'équipe à l'origine du projet était constituée de Marie-Renée Fleury, Jean-Louis Maltret, Christian Mauduit, Robert Rolland et Xavier Bressaud. Le format est adapté de celui des stages de recherche en Biologie initiés à l'INMED en 2004 par Constance Hammond et l'association Hippocampe, et maintenant portés par l'association Tous Chercheurs.

Initialement destinés aux sections scientifiques du lycée, les stages Hippocampe se sont progressivement ouverts à d'autres publics du secondaire : collèges, classes de seconde, sections non scientifiques. Depuis 2007, un ou deux stages Hippocampe sont en outre réalisés chaque année avec des élèves de l'École de la Deuxième Chance de Marseille. À partir de 2012, ce rythme passe à trois par année civile.

L'action est présentée en détail dans le rapport d'activité du laboratoire Pythéas, accessible à l'adresse http://pytheas.irem.univ-mrs.fr/wiki/pytheas/_media/rapport1011.pdf ou encore dans celui de l'IREM http://www.irem.univ-mrs.fr/Rapport-d-activites-2010-2011. On y décrit notamment l'essaimage dans les autres IREM.

2. *Groupe de travail et publications*

Le groupe Hippocampe de l'IREM d'Aix-Marseille a été constitué à la rentrée de septembre 2010, après deux réunions préparatoires en janvier et juin 2010, afin de mener une réflexion continue sur la réalisation pratique des stages, leurs buts, leurs effets, et de proposer des pistes d'évolution et d'amélioration en favorisant l'expérimentation pédagogique.

Avant la création formelle de ce groupe, la réflexion avait évidemment démarré dès la conception du projet. Le rapport d'activité 2003–2004 de l'IREM d'Aix-Marseille détaille le contexte et les objectifs du projet, ainsi que les modalités d'organisation des stages.

Dominique Barbolosi a publié dans Repères en 2008 (D. Barbolosi, Un exemple de démarche scientifique. Repères-IREM, N°71, avril 2008.) un « plaidoyer » pour la démarche scientifique dans l'enseignement, et appuyait notamment son propos sur l'expérience de stages Hippocampe qu'il avait animés sur le thème « mathématiques et médecine ». À l'occasion du séminaire de l'ADIREM organisé au CIRM en 2010 pour les 40 ans du réseau, un atelier Les stages Hippocampe-maths : de l'école à la fac ou l'apprentissage par la recherche. C'est quoi et pour quoi faire ? Comment faire et avec qui ? a été animé par Marie-Renée Fleury, entourée de Pierre Arnoux, Laurent Beddou, Martine Bosc, Christian Mauduit, Hubert Proal et Lionel Vaux. Les documents utilisés pour l'occasion sont disponibles en ligne : http://iml.univ-mrs.fr/~mrd/Atelier-3a/.

La création du groupe de travail en 2010 a coïncidé avec la mise en place de nouvelles pratiques pour les stages :

- la mise en place d'un wiki dédié, avec une page par stage, rassemblant les informations pour chaque stage (thème, classe, personnes), une photo de chaque poster, et tout ce que les stagiaires et leur prof souhaitent y ajouter : http://pytheas.irem.univ-mrs.fr/hippocampe ;
- l'implication d'étudiants des spécialités d'enseignement du master de mathématiques de Marseille, en tant que tuteurs, et avec l'objectif de produire des retours écrits (rapports de stage).

Les comptes-rendus de réunions du groupe pour l'année 2010-2011 sont en ligne sur http://pytheas.irem.univ-mrs.fr/wiki/pytheas/groupe_hippocampe:accueil. On y trouve l'état des réflexions et discussions au cours de cette année, et notamment les objectifs pour la suite, dont l'élaboration de documents de référence pour faciliter la diffusion du concept et l'exploitation qu'on pourrait faire des productions des stagiaires et des rapports étudiants de master.

L'année 2011-2012 a été assez productive du point de vue des publications. Sur la base du travail de 2010-2011, Lionel Vaux a soumis avec Pierre Arnoux et avec l'appui du groupe, une contribution au G.T. 10 (La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques : fondements et pratiques) du colloque Espace Mathématique Francophone 2012 : « Recherche en mathématiques pour les élèves de Lycée : l'exemple des stages Hippocampe ». En parallèle, Dominique Barbolosi a également publié un nouvel article dans Repères, encore une fois sur la base de son expérience des stages : « Du concret à l'abstrait, de l'heuristique à la rigueur : un nouvel espoir pour l'enseignement des mathématiques ? » (Repères-IREM, N°83, avril 2011).

La difficulté majeure du groupe de travail est de trouver l'énergie et les forces vives permettant d'animer de tels dispositifs : une grande partie de ses efforts est en effet investie dans la simple organisation des stages, et cet aspect est prioritaire lorsque les moyens manquent.

Bibliographie

Audin P. et Duchet P. (1992) *La recherche à l'école : MATh.en.JEANS*, Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, 121

Barbolosi D. (2008) *Un exemple de démarche scientifique*. Repères IREM N°71

Beddou L. et Mauduit C. (2001) *Research as a method of teaching mathematics*, In Science and Mathematics Teaching for the Information Society

Beddou L. et Mauduit C. (2004) *Recherche et enseignement, l'expérience MATh.en.JEANS*, In Actes de la 3ème université d'été Animath

Grenier D. (2010) *Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes*, In Lalina Coulange and Christophe Hache, editors, Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2009, 161- 178. IREM de Paris 7, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques

Lakatos I. (1976) *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press

Pólya G. (1949) *How to solve it*. Princeton University Press

Pólya G. (1968) *Induction and Analogy in Mathematics*, Oxford University Press

(CD)AMPERES : Conception et Diffusion d'Activités Mathématiques et de Parcours d'Etude et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire (Groupe didactique, IREM d'Aix-Marseille)

Yves Matheron, responsable du groupe didactique, a animé une conférence le 24 mars sur les PER et AER. Yves Matheron coordonne les travaux du réseau (CD)AMPERES. Dominique Gaud et Nicolas Minet ont présenté le 24 mars les travaux du groupe de l'IREM de Poitiers à propos de parcours d'étude et de recherche en classe de première et de seconde.

Yves Matheron : yves.matheron@free.fr, Dominique Gaud : dom.gaud@wanadoo.fr, Nicolas Minet : nminet@wanadoo.fr

Le travail d'élaboration, d'observation et de diffusion du groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille s'inscrit essentiellement dans le cadre du travail mené au plan national par le réseau (CD)AMPERES, initié et impulsé par la CII Didactique et qui a reçu le soutien de l'IFÉ-ENS de Lyon. On trouvera une définition plus détaillée du projet et du travail du réseau à l'adresse : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/

Le projet AMPERES a été lancé en 2005 à partir de l'observation et de l'analyse, établies depuis la didactique des mathématiques, de la nécessité de redynamiser l'enseignement des mathématiques dans le second degré. Il s'appuyait sur le constat d'une sclérose des objets d'enseignement, d'un désamour des élèves pour les mathématiques, d'une insatisfaction des professeurs. Cette analyse est désormais davantage partagée (*cf.* le rapport de l'UNESCO d'avril 2011, intitulé *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*) et a conduit l'IGEN de mathématiques, l'IFÉ et la DGESCO à organiser le 13 mars 2012, à l'ENS sciences de Lyon, une conférence nationale réunissant sur ce sujet mathématiciens et didacticiens, et élargie à l'enseignement primaire. Celle-ci devrait se prolonger pour déboucher sur un programme de travail.

Le réseau (CD)AMPERES conçoit, observe dans les classes et analyse les effets d'un enseignement des mathématiques prenant la forme de Parcours d'Étude et de Recherche (PER). La définition et la construction de ces parcours s'appuient sur les théories didactiques (TAD et TSD). L'objectif poursuivi consiste à faire vivre, dans les classes ordinaires des collèges et lycées, des mathématiques dont les questions qui les génèrent sont rencontrées et explorées par les élèves. Cela suppose de renoncer au morcellement du savoir en chapitres trop peu connectés dont le sens global échappe aux élèves, à les engager dans une démarche de recherche afin de produire et d'étudier, sous la direction du professeur, les mathématiques du programme, à faire vivre la recherche sur un temps plus long que celui imposé par les 55 min. d'une séance. Une telle démarche tourne le dos à un enseignement immotivé des mathématiques, tel qu'il existe le plus souvent dans les classes à partir de la passation « d'activités » proches de celles des manuels ; si les élèves peuvent être « actifs », les qualités mathématique et didactique de ces « activités » sont parfois limitées. Le type d'enseignement proposé à travers des PER s'apparente à une démarche d'enquête qui conduit à l'étude des mathématiques du programme. Le terme de « démarche d'investigation » que l'on trouve dans certains programmes (école primaire, collège, lycée professionnel), s'il peut présenter des similitudes en première approche, reste encore trop flou dans sa définition peu théorisée et réduite à des injonctions. On peut alors douter de l'effectivité d'une mise en œuvre qui se différencie réellement d'un enseignement sous forme « d'activités ». Une rapide recherche Internet relative aux productions se réclamant d'une « démarche d'investigation » en mathématiques permettra au lecteur de s'en convaincre.

Pour fournir aux professeurs des propositions leur permettant de dynamiser leur enseignement, des Parcours d'Etude et de Recherche ont été conçus et mis à l'épreuve dans les classes par les équipes « didactique » de neuf académies (Aix-Marseille, Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Dijon, Montpellier, Nice, Poitiers, Toulouse). Une grande partie de ces ressources est disponible en ligne ici : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/.

Situations de recherche pour la classe (Groupe Raisonnement, Logique et Preuve, IREM de Grenoble)

Denise Grenier animera une conférence à ce sujet en octobre 2012 à Paris. Denise Grenier est responsable du groupe Raisonnement, Logique et Preuve et de l'équipe Math-à-modeler.

Denise Grenier : dgrenier@ujf-grenoble.fr

Le site Math-à-modeler : http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/

1. Enseignement de la logique au lycée

Notre pratique quotidienne en tant qu'enseignants (à des niveaux universitaires ou secondaires) nous montre que l'apprentissage du raisonnement ne va pas de soi, et qu'il n'est pas acquis chez les étudiants en sciences, au début de l'université. C'est encore plus vrai pour la logique, même de base, qui est celle décrite dans les nouveaux programmes de lycée. Pour atteindre ces objectifs, il faut se donner les moyens réels de les réaliser. Or, il nous semble utopique de croire – et malhonnête de laisser croire – qu'on peut enseigner ces éléments au fil de chapitres, en même temps que des notions nouvelles pour lesquelles les élèves rencontrent des difficultés.

Pour cela, nous pensons qu'il est essentiel, à certains moments de l'enseignement, de proposer des problèmes où les seules connaissances en question sont celles liées au raisonnement et à la logique. Ce peut être des problèmes basés sur des connaissances de collège (et c'est alors une occasion de les revoir, ce qui n'est jamais inutile), ou encore des situations hors contexte mathématique. Nous en avons vu quelques exemples dans le document « ressources », tels les exemples 9 et 11 qui concernent des groupes d'élèves pour l'un, une réunion de cosmonautes pour l'autre. Ces contextes permettent de se centrer sur les notions d'ensemble, sous-ensemble, appartenance, inclusion, conjonctions « et » et « ou », et sur leurs réécritures en termes d'implication.

Notre groupe IREM, en relation avec l'équipe « maths discrètes et didactique » de l'Institut Fourier et la fédération de recherche « Maths-à-Modeler » étudie précisément des problèmes susceptibles de remplir au mieux toutes ces conditions.

2. Situations de Recherche pour la Classe

Une partie de nos activités se sont articulées autour de l'élaboration de nouvelles Situations de Recherche pour la Classe. Rappelons ici la caractérisation des SiRC par Payan, Grenier (2003):

1. *Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle*. Elle doit être proche de questions non résolues. Nous faisons l'hypothèse que cette proximité à des questions non résolues – non seulement pour les élèves, pour l'ensemble de la classe, mais aussi pour l'enseignant, les chercheurs - va être déterminante pour le rapport que vont avoir les élèves avec la situation.
2. *La question initiale est facile d'accès* : la question est « facile » à comprendre. Pour que la question soit facilement identifiable par l'élève, le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui doit « amener » l'élève à l'intérieur des mathématiques.
3. *Des stratégies initiales* existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques. De préférence, les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et les plus réduites possibles.
4. *Plusieurs stratégies d'avancée* dans la recherche et plusieurs développements sont possibles, aussi bien du point de vue de l'activité (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques.
5. *Une question résolue renvoie très souvent une nouvelle question*. La situation n'a pas de « fin ». Il n'y a que des critères de fin locaux.

Une « bonne » SiRC va conduire l'élève à pratiquer les savoir-faire transversaux décrits ci-dessus. Les pistes de résolution peuvent diverger et donc mettre en jeu des concepts mathématiques différents. Trois aspects fondamentaux sont présents dans nos SiRC, qui sont peu présents, voire absents, dans la classe usuelle :

- L' « enjeu de vérité ». En classe, usuellement, ce qui est à prouver est la plupart du temps annoncé comme vrai (« démontrer que »), il n'y a pas d'enjeu de vérité. Ou bien, lorsque la question est ouverte, la réponse est évidente (« que constatez-vous ? », en regardant une figure, par exemple).
- L'aspect « social » de l'activité. Dans une SiRC, il peut y avoir un vrai enjeu social de production mathématique, même s'il est local (groupe + professeur et/ou chercheur).
- L'aspect « recherche ». Dans les manuels et les pratiques enseignantes, il est explicitement déclaré que, pour résoudre un problème et aussi pour prouver, « on ne doit utiliser que les propriétés du cours ou celles d'une liste donnée ». Cette consigne est contradictoire avec l'activité du chercheur et avec la démarche scientifique.

L'intérêt de ces SiRC est criant dans le contexte de la valorisation/vulgarisation, dans la mesure où elles donnent une idée beaucoup plus réaliste de l'activité d'un chercheur en mathématique que, par exemple, un exercice issu d'un manuel scolaire. En outre, il semble pertinent d'utiliser ces problèmes posés hors sans prérequis ou présupposition de connaissances, en particulier dans le contexte de la réintroduction et clarification de la logique et du raisonnement dans les nouveaux programmes du collège/lycée.

Il est pour cela nécessaire d'avoir à notre disposition une grande variété de SiRC, de façon à pouvoir satisfaire des publics différents (primaire, collège, lycée, options scientifiques ou non), et à permettre d'aborder différents types de raisonnement, voire d'aborder/illustrer des notions qui apparaissent dans les programmes.

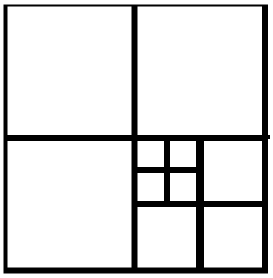
L'importance de l'expérimentation, de la recherche de conjectures est soulignée de façon forte dans les nouveaux programmes (particulièrement pour le collège, mais aussi jusqu'en terminale).

3. Un exemple de SiRC : pavages d'un carré

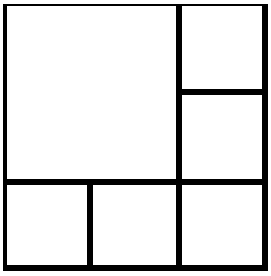
On fixe un carré, et l'on veut étudier les découpages de ce carré en un certain nombre de carrés plus petits. La question est alors de savoir pour quelles valeurs de n le carré admet un découpage en n carrés. On pourra être amené à préciser ce que signifie « découpage » (les intérieurs des petits carrés doivent être disjoints, et leur réunion doit être le grand carré tout entier).

On voit facilement que $n = 1$, $n = 4$ sont possibles, alors que les autres « petites » valeurs de n semblent difficiles à réaliser (quelles valeurs de $n < 10$ arrivez-vous à réaliser ?) On est rapidement amené à conjecturer que $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$ sont impossibles, et on produit rapidement une preuve de ce fait (comme souvent, il y a des preuves plus ou moins convaincantes, et même les preuves convaincantes peuvent être plus ou moins efficaces). Une façon efficace pour $n = 2$ et 3 est de raisonner sur les coins du carré (si $n > 1$, il doit y avoir un petit carré dans chaque coin du grand carré).

On essaye alors de deviner quelles valeurs sont possibles, ce qui peut être l'occasion de réfléchir à la notion de preuve (un dessin suffit-il ?). En utilisant le découpage de base du carré en 4 morceaux (découpés par les deux médianes), et en l'itérant sur les petits carrés d'un découpage donné, on voit que s'il existe un découpage avec n carrés, alors il en existe aussi un avec $n + 3$ carrés :



En particulier, il existe un découpage pour $n = 1 + 3k$, k entier naturel quelconque. Il peut être tentant de penser que comme $n = 2$ et 3 sont impossibles, les nombres de la forme $3k$ ou $2 + 3k$ ne devraient pas apparaître comme nombre de petits carrés dans le découpage... On pourra alors exhiber le dessin suivant :



et éventuellement observer qu'il se généralise pour donner des découpages en $1 + (2k + 1)$ carrés, k naturel quelconque. On laissera ici au lecteur le plaisir de chercher la solution complète du problème.

Une fois le problème résolu, de nombreuses questions ouvertes peuvent être évoquées (le rapport des longueurs de petits carrés apparaissant dans un découpage valide sont-ils toujours rationnels ? Y a-t-il une forme d'unicité du découpage en n morceaux, quand il est possible ?)

De nombreuses variantes sont également possibles (découpages de triangles équilatéraux par des triangles équilatéraux, découpages de cubes par des cubes).

Bibliographie

Fabert Ch., Grenier D. (2011) *Une étude didactique de quelques éléments de raisonnements mathématiques et de logique*, petit *x* n°87, pp. 31-52, ed. IREM de Grenoble

GIROUD N. (2011) *Etude de la démarche expérimentale dans les Situations de Recherche pour la Classe*, thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble

Grenier D. (à paraître, fin 2012) *La démarche d'investigation dans les Situations de Recherche pour la Classe (SiRC)*, actes du colloque Espace mathématiques Francophone, Genève, 3-7 février 2012

Grenier D. (2012) *Une étude didactique du concept de récurrence*, *petit x* n°88, pp. 27-47, ed. IREM de Grenoble

GRENIER D. (2009) *Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes*, actes du séminaire national de didactique des mathématiques, ed. IREM de Paris 7

Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques (Groupe EXPRIME-DREAM, IREM de Lyon)

Gilles Aldon, responsable du groupe EXPRIME-DREAM, a animé une conférence à ce sujet le 9 juin 2012 à Toulouse.

Gilles Aldon : gilles.aldon@ens-lyon.fr

Groupe EXPRIME-DREAM : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/dream

1. Cadre dans lequel le projet a été développé

Initié à la rentrée universitaire 2005, le travail du groupe s'appuie sur l'ensemble des travaux développés autour du problème ouvert au sein de l'IREM de Lyon depuis près de vingt ans, ainsi que sur les travaux de recherche développés au laboratoire LEPS puis S2HEP sur "l'articulation entre logique et raisonnement mathématique" (Durand-Guerrier 2005) et sur "la dimension expérimentale des mathématiques dans la perspective de leur apprentissage" (T. Dias, thèse soutenue en 2008) Le projet DREAM se place dans la perspective d'un renouvellement de l'enseignement des sciences s'appuyant sur des démarches de recherche de problèmes.

2. Objectifs du projet

Il s'agit d'élaborer des ressources permettant aux enseignants de mettre en œuvre dans le cours ordinaire de la classe des problèmes de recherche en mettant en évidence, sur quelques situations classiques ou moins classiques, les ressorts fournis par la dimension expérimentale de l'activité mathématique d'une part, les connaissances mathématiques travaillées en lien avec les programmes à différents niveaux d'enseignement primaire et secondaire, d'autre part.

Cet objectif est réalisé avec la publication du cédérom EXPRIME (Expérimenter des Problèmes de Recherche Innovants en Mathématiques à l'École) et se poursuit d'une part en proposant de nouvelles situations mais aussi en élargissant les entrées en lien avec le deuxième axe de notre travail : choisir quelques notions clés des programmes de collège et/ou des deux transitions institutionnelles école élémentaire/collège et collège/lycée et élaborer une batterie de problèmes de recherche permettant de travailler sur les allers et retours entre la partie expérimentale de la recherche et la construction structurée de notions mathématiques, puis mettre ces problèmes à l'épreuve dans des classes de cycle 3 de l'école élémentaire, de collège, ou de seconde de lycée.

3. Les résultats intermédiaires

Nous nous sommes appuyés depuis trois ans sur un corpus de problèmes dont les potentialités avaient été repérées à l'IREM de Lyon. A l'épreuve d'expérimentations nombreuses, leur richesse s'est confirmée et a permis d'aboutir à la réalisation d'une ressource numérique étoffée. Cette ressource numérique est conçue pour être étudiée suivant des parcours variés. Dès l'entrée, il est possible de parcourir des textes théoriques concernant la dimension expérimentale en mathématique (Dias 2005, Kuntz 2007) et des présentations faites dans des colloques et conférences (Aldon 2007). Il est également possible de comprendre l'esprit de la ressource en parcourant une présentation générale et le curriculum vitae (au sens donné par (Trouche (2008) dans l'expérience SFoDEM) de la ressource.

Enfin les situations sont présentées en suivant une structure commune :

- Situation mathématique
- Objets mathématiques potentiellement travaillés
- Situations d'apprentissage
- Références
- Synthèse
- Situations connexes

Une version sur Cédérom sous licence « creative commons » est parue et disponible à l'IFÉ et à l'IREM au prix de 12 €. Ce dernier support doit permettre de bénéficier pleinement des éléments multimédia de la ressource.

Les travaux du groupe ont déjà fait l'objet de nombreuses présentations : présentation à l'Université d'été (Saint-Flour août 2007) "Expérimentation et démarches d'investigation en Mathématiques" , projet de présentation pour l'EMF à DAKAR en avril 2009, présentation pour CERME 6 en février 2009 à Lyon, présentation du travail au congrès CIEAEM 61 (Montréal juillet 2009), CIEAEM 62 (Barcelone, Juillet 2011), présentation au colloque EMF (Genève, février 2012). Ils ont été également les supports de trois masters de recherche (Aldon, 2008, Front, 2010, Gardes, 2009).

Les perspectives de travail de l'équipe DREAM se focalisent sur la dimension expérimentale des mathématiques et s'appuient sur les thèses en cours de Mathias Front et Marie-Line Gardes. En particulier le rôle des problèmes en mathématiques est étudié tant du point de vue historique que du point de vue de son enseignement. La conjecture d'Erdös-Strauss est un exemple prototypique de la possibilité d'utiliser des problèmes ouverts en mathématiques dans l'enseignement. Les liens entre la dimension expérimentale et l'usage des technologies sont interrogés à travers les expérimentations en classe. Enfin, le suivi des usages de la ressource EXPRIME constitue un axe de travail de l'équipe.

Bibliographie

Aldon, G., Cahuet, P.-Y., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M., Tardy, C. (2010) *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école.* Cédérom, INRP

Aldon, G. (2010) *Recherche de problème et/ou démarches d'investigation, journée IREM-STEAM « les mathématiques, une science expérimentale ? »*, Rennes, 24 mars., en ligne : http://www.irem.univ-rennes1.fr/viedelirem/activites_0910/journee/docs/aldon.html

Aldon G. (2008) *Analyse du rôle d'une ressource numérique dans la mise en place de problèmes de recherche dans la classe de mathématiques,* Master HPDS, Université Lyon 1

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) *Expérimenter pour apprendre en mathématiques,* Repères IREM, 60, pp. 61-78

Dias, T. (2008) *L'intégration de la dimension expérimentale des mathématiques dans des situations d'enseignement et de formation*, *Thèse de doctorat*, Université Lyon 1

Durand-Guerrier V. (2005) *Recherches sur l'Articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique*, Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique, *HdR*, Université Lyon 1

Front, M. (2010) *Pavages semi-réguliers du plan. Élaboration d'une situation favorable à la dialectique théorie-objets*, Master HPDS, Université Lyon 1

Gardes, M.-L. (2009) *Étude du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème ouvert en arithmétique*, Master HPDS, Université Lyon 1

Démonstration en ZEP (Groupe DEMOZ, IREM de Lyon)

Gilles Aldon, responsable du groupe DEMOZ, a animé une conférence à ce sujet le 9 juin 2012 à Toulouse.

Gilles Aldon : gilles.aldon@ens-lyon.fr

Groupe DEMOZ : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/demoz

1. Cadre dans lequel le projet a été développé

Un des points cruciaux de l'enseignement des mathématiques au collège est l'introduction de la démonstration ; pour les élèves, l'apprentissage de la démonstration met en jeu à la fois la logique, la maîtrise du langage et la rentrée dans un « jeu » spécifique à une certaine culture des mathématiques. Tous les élèves de quatrième confrontés à cette approche éprouvent peu ou prou des difficultés ; les élèves de ZEP accumulent les difficultés :

- dans le domaine de la maîtrise du langage : aussi bien de par les énoncés à comprendre que par les démonstrations à produire,
- dans le domaine de la culture mathématique, il apparaît que c'est plus un jeu de l'école qui s'éloigne des préoccupations des élèves plutôt qu'une nécessité ; d'autant plus que la démonstration formelle qui est souvent enseignée confond l'apprentissage des règles de la démonstration et l'apprentissage de la démonstration.

2. Objectifs du projet

Un des outils permettant de faire entrer les élèves dans ce jeu mathématique est le concept de « narrations de recherche » : l'équipe a étudié le rôle de la narration de recherche pour la mise en place dans les classes de ZEP de ces notions clefs du programme. Cet outil pédagogique a été étudié et ses effets sur les conceptions des mathématiques des élèves relevés ; pour autant, les narrations de recherche ne sont que peu utilisées dans les classes et très marginalement dans les zones d'éducation prioritaire.

Les hypothèses de base sont les suivantes :

- distinction recherche et rédaction d'une preuve,
- tendance dans les ZEP à d'une part parcelliser les savoirs et d'autre part à fournir très vite des aides (souvent procédurales et moins souvent conceptuelles),
- valorisation de la prise d'initiative.

Le travail de recherche porte sur la réalisation et l'analyse critique de ressources dont le but serait d'aider les enseignants à mettre en place des activités de narration de recherche en classe dans une perspective d'amélioration de l'enseignement de la démonstration, et plus généralement dans une démarche de développement de l'investigation en mathématiques. Les cadres théoriques qui sont interrogés sont d'une part la théorie des situations didactiques et d'autre part l'ergonomie cognitive (analyse des gestes professionnels).

3. Les résultats intermédiaires

A partir d'analyses *a priori* des sujets de narrations de recherche, écriture d'un document sous forme de cédérom permettant de les proposer ensuite dans les classes. La structure des narrations présentées est construite de la manière suivante :

1 Objectifs du sujet (notions abordées)
2 Liens avec les programmes
3 Pistes envisagées (différentes solutions possibles du sujet)
4 Difficultés rencontrées par les élèves
5 Quelle variante d'énoncé choisir ?
6 Prolongements possibles
7 Déroulement prévu
8 Comptes rendus de narrations de recherche dans les classes.

En parallèle, l'équipe continue de proposer des narrations dans les classes, d'en observer les effets sur l'apprentissage des mathématiques et de repérer les gestes professionnels importants à communiquer pour faciliter la mise en place des narrations de recherche dans la classe.

Bibliographie

ALDON G., VILAS-BOAS, H. (2012) *Le dispositif d'écriture - classe - discipline ; le cas de la narration en mathématiques*, Formation de formateurs IFÉ : http://formations.inrp.fr/2012-01-31-g-aldon-e-vila-boas.mp3

ALDON, G. (2010) *Recherche de problème et/ou démarches d'investigation*, journée STEAM « les mathématiques, une science expérimentale ? », 24 mars 2010

ALDON, G. (2009) *From a maths problem to a class situation*, In Actes de la conférence ICTMT9, Metz

ALDON G., VILAS-BOAS, H. (2008) *Les élèves de collège sont-ils capables de raisonner ?*, Communication aux journées inter-Académiques de Reims, 10-11 décembre

La résolution collaborative de problèmes (Groupe ResCo, IREM de Montpellier)

Les travaux du groupe ont été présentés par Viviane Durand-Guerrier et Benoît Ray le 14 janvier 2012 à Paris.

Viviane Durand-Guerrier : vdurand@math.univ-montp2.fr ; Benoît Ray : benoitray@yahoo.fr

Le site de résolution collaborative :http://www.irem.univ-montp2.fr/SPIP/Resolution-collaborative-de,96

Le dispositif de résolution collaborative de problèmes a été mis au point à l'IREM de Montpellier dès 1999. Le principe de cette ingénierie didactique est d'organiser, via une plateforme sur internet, des échanges entre des classes pour résoudre un problème commun. Le problème, a priori non mathématique, est ancré dans une situation concrète et requiert une mathématisation. Pendant les phases de mathématisation (qui nécessitent des choix et peuvent mener à des problèmes différents) et de résolution du problème mathématique (problème dense pour lequel souvent seules des solutions partielles sont accessibles), nous créons une communauté d'élèves qui sont placés dans une position semblable à celle d'un chercheur. Pendant 4 à 5 semaines, les élèves vont s'échanger (par l'intermédiaire de leur professeur) questions, réponses, procédures et conjectures. Par la mise en place de ce dispositif, nous voulons favoriser la prise d'initiative et l'autonomie des élèves, leur faire découvrir l'aspect expérimental des mathématiques et modifier leur perception de cette discipline. Les sujets d'étude du groupe se centrent autour des quatre axes qui sont détaillés ici.

1. Résolution de problèmes, démarche d'investigation et compétences complexes

En quoi la résolution de problèmes ouverts favorise-t-elle la mise en œuvre d'une démarche d'investigation ?

La démarche d'investigation est recommandée dans les programmes de collège depuis 2005. Or le canevas préconisé pour ces démarches d'investigation présente de nombreuses analogies avec les différentes phases de la recherche collaborative d'un problème ouvert que l'on a pu mettre en évidence lors de nos expérimentations. La résolution de problèmes prend également une place importante dans les nouveaux programmes de seconde, qui incitent à étudier les mathématiques à partir de la résolution de problèmes.

Nous nous intéressons d'une part à l'identification des compétences transversales complexes liées aux démarches de recherche, à l'argumentation et à la preuve, et, d'autre part, à des notions des programmes potentiellement et effectivement travaillées selon les niveaux (analyse a priori et analyse a posteriori).

Proposer aux élèves une activité de recherche d'un problème ouvert vise la mise en œuvre de compétences spécifiques, souvent absentes des exercices traditionnels. Évaluer ces compétences est une tâche complexe pour plusieurs raisons :

- les élèves travaillent en groupes : comment percevoir la part du travail de chacun ?
- évaluer ces compétences ne peut se faire qu'en proposant un problème ouvert : doit-on proposer un problème ouvert lors d'une évaluation ?
- tous les problèmes ne mettent pas en jeu les mêmes compétences : quelles compétences sont liées au problème proposé et quels indicateurs retenir pour identifier sans ambigüité les compétences mises en œuvre ?

Nous avons identifié, de manière sans doute non exhaustive, des compétences spécifiques à l'activité de résolution de problèmes et des indicateurs qui témoignent de leur mise en œuvre.

2. Les énoncés des problèmes : notion de « fiction réaliste »

Quel type d'énoncé proposer pour faire comprendre aux élèves l'intérêt des mathématiques en dehors du seul cadre de la discipline (dans d'autres sciences ou sur des problèmes concrets) ? Quelles sont les situations réelles ou pseudo-réelles qui donnent lieu à des problèmes propices à une recherche collaborative ? Comment peut-on amener les élèves à problématiser ces situations, à choisir un modèle, à en changer ? Cette question est bien évidemment à mettre en relation avec les "thèmes de convergence" et avec "l'introduction aux disciplines scientifiques", mentionnés dans les programmes de collège et de lycée.

Nous faisons l'hypothèse qu'un problème posé dans le cadre d'une situation réelle ou réaliste favorise sa dévolution ; cette hypothèse est étayée par l'observation du travail des élèves en classe et par la teneur des échanges entre les classes, qui montrent que les élèves s'approprient le problème.

Or, la mathématisation de problèmes issus de la réalité est généralement beaucoup trop complexe pour être proposée à des élèves de collège et de lycée dans le temps contraint de la classe. Ceci conduit souvent aux « problèmes concrets » proposés dans les manuels, dans lesquels le travail de mathématisation est pris en charge dans l'énoncé et pour lesquels aucune initiative n'est laissée à l'élève.

Le dispositif de résolution collaborative de problème donnant une place importante à l'objectif de mathématisation, nous avons été amenés à proposer des situations non mathématiques *a priori*, posées dans un contexte fictif mais réaliste, pour laquelle la recherche demande une mathématisation. Cette mathématisation peut renvoyer à un ou des problèmes mathématiques, les choix faits par les élèves pouvant faire émerger des problèmes connexes ou des variantes du problème mathématique dont nous visons la recherche. Nous qualifions de telles situations de « fictions réalistes ».

En proposant de telles situations, nous voulons montrer un usage particulier des mathématiques, absent des manuels : la mathématisation d'une situation. La phase de mathématisation demande de faire des choix et de réfléchir aux relations entre objets mathématiques et objets réels. Nous faisons l'hypothèse que ce travail de mathématisation modifie la perception de cette discipline chez les élèves.

Le traitement mathématique de cette fiction réaliste met en avant les aspects des mathématiques concernant les applications des mathématiques à d'autres champs de la connaissance humaine, qui sont habituellement peu travaillées dans les classes : les relations dialectiques entre objets réels et objets mathématiques, la fonction d'aide à la décision : résoudre un problème, même partiellement, permet d'anticiper des résultats sans avoir à effectuer les actions dans le monde réel, résultats qui peuvent être confrontés à la situation de la fiction réaliste, avec un retour éventuel sur les choix mathématiques initiaux.

Enfin, proposer un énoncé original ou un problème mathématique sous la forme d'une fiction réaliste inédite met notre dispositif à l'abri des solutions existant sur Internet, ce qui est important compte tenu de notre dispositif.

3. Les modifications engendrées par le dispositif de résolution collaborative

Quels sont les changements de postures induits par ces pratiques : changements de posture des élèves d'une part et des enseignants d'autre part ? Quels sont les effets de ces changements de posture ? Il faut noter que ces changements dus au travail collaboratif se situent à deux niveaux : à l'intérieur des classes et entre les enseignants impliqués dans cette démarche.

Pour les élèves, ce dispositif vise

1. à faire évoluer le regard qu'ils portent sur les relations entre les mathématiques et la réalité dans un sens large (situation concrète, autres disciplines, dialectique outil/objet et changement de cadres : géométrique/numérique, numérique/algébrique),
2. à permettre d'identifier que l'activité mathématique de résolution de problèmes consiste en un va et vient entre situation initiale, exploration du problème, désignation des objets ou des grandeurs pertinentes, identification de propriétés et de relations vérifiées par ces objets ou ces grandeurs permettant d'établir les énoncés vrais sur lesquels appuyer le raisonnement, élaboration de conjectures, mises à l'épreuve des conjectures, recherche d'une preuve ou de contre-exemples, retour au problème initial,
3. à développer la capacité à mobiliser des savoirs non désignés dans la situation en prenant en compte les résultats des actions conduites dans la phase d'exploration.

Pour les enseignants, ce dispositif vise à faire évoluer les pratiques

1. en mettant en avant l'importance de la démarche d'investigation et des démarches expérimentales,

2. en incitant à mettre en place avec les élèves un contrat didactique différent du contrat habituel de la classe les incitant à une plus grande prise d'initiative,
3. en ayant un regard réflexif sur ses propres pratiques enseignantes.

4. Les ressources

Le nombre important de classes de tous niveaux (70 classes de la sixième à la terminale engagées dans la session de résolution collaborative de janvier 2012), engagées dans la résolution collaborative nous permet d'enrichir les analyses a priori, d'identifier les points forts et les points faibles des problèmes proposés, de rendre compte du travail effectif des élèves et d'envisager des évolutions. Ceci permet de nourrir des ressources à destination des enseignants.

Un de nos objectifs est de mettre à disposition des enseignants ces ressources et l'outil d'échange adapté, pour leur permettre de continuer à mettre en place de telles résolutions collaboratives avec d'autres collègues. Nous nous posons également la question de la diffusion au delà de la communauté de pratique existante : la mise à disposition seule de ressources préparées et d'un outil d'échange adapté incite-t-il les enseignants à créer des communautés collaboratives ? Quelles doivent être les caractéristiques de cet outil ? Quel accompagnement des enseignants est-il nécessaire ? Quelles améliorations, quelles modifications favoriseront l'usage de notre site ?

Bibliographie

Arsac G. et Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*, Lyon : Scéren CRDP de Lyon

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) *Expérimenter pour apprendre en mathématiques*, Repères IREM, n°60, p. 61-78

Douady R. (1994) *Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir*, Repères IREM, n° 15, p. 37-61

Kuntz, G. (2007) (ccord.) *Démarche expérimentale et apprentissages mathématique*, dossier de la Veille Scientifique et Technologique de l'INRP http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/etudes/experimentation-math

Sauter M. (2008) *Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes*, Repères IREM, n° 72, p. 25-45

Thurston P.W, (1995) *Preuve et progrès en mathématiques*, Repères n°21

La correspondance mathématique (Groupe ECCEmath, IREM de Nantes)

Magali Hersant, responsable du groupe, a animé avec Mireille GENIN une conférence à ce sujet le 24 mars 2012 à Paris.

Magali Hersant : magali.hersant@univ-nantes.fr

1. Question traitée et objectifs du projet

Cette recherche part d'un constat : d'une part les programmes de lycée mettent en avant la dimension expérimentale des mathématiques (poser des problèmes, établir des conjectures, argumenter, convaincre et prouver), d'autre part, les enseignants de l'Université déplorent que les étudiants ne savent pas résoudre des problèmes. Partant de cette tension, nous avons choisi d'étudier les questions suivantes à l'articulation lycée-université :

Q1. Que savons-nous des connaissances des lycéens sur la résolution de problèmes ?

Q2. Comment former les élèves à cette dimension expérimentale des mathématiques ?

Q3. Comment aider les enseignants à développer des apprentissages chez leurs élèves à la fois sur la dimension expérimentale et la dimension technique des mathématiques ?

L'emploi, dans un premier temps, d'une méthodologie basée sur un questionnaire a permis d'obtenir des premiers résultats mais a aussi montré des limites identifiées comme associées à l'adresse à l'enseignant (Hersant, Barbin, 2009). Pour contourner ces limites, nous avons inventé un dispositif nouveau de recueil de données, les *correspondances mathématiques*, à propos d'un problème entre lycéens et étudiants, qui visait à créer une situation permettant aux élèves de s'investir dans la résolution d'un problème et de déployer une activité mathématique consistante et accessible du point de vue de la recherche. Ce dispositif, inspiré en partie du rôle des correspondances entre presque pairs dans l'histoire des mathématiques, peut être résumé de la façon suivante. C'est un échange épistolaire entre deux élèves presque pairs (par exemple : terminale - étudiants de L1 ou L2, troisième - seconde, seconde - terminale) à propos d'un problème que l'un peut résoudre avec une solution « experte » et l'autre non. Le rôle du moins avancé est, autant que possible, de résoudre le problème ; le rôle du plus avancé est de l'aider à résoudre le problème sans lui fournir la réponse.

Les premières correspondances analysées ont permis de percevoir l'intérêt de ce dispositif (Hersant, 2009). Cela nous a amené à élargir notre champ d'investigation à l'ensemble de l'enseignement secondaire et à considérer la correspondance mathématique non plus comme un dispositif de recueil de données mais comme un dispositif pédagogique, d'où les questions suivantes qui renvoient en particulier à Q2 et Q3, avec une formulation affinée :

Q4. Quelles conditions écologiques d'une activité mathématique créative et problématisée chez les élèves crée la correspondance mathématique ?

Q5. Quels apprentissages mathématiques potentiels des élèves génère la correspondance mathématique ?

Q6. Qu'apprennent les enseignants sur leurs élèves lors d'une correspondance mathématique ? et donc en quoi ce dispositif de recueil de données peut-il être intéressant pour les élèves et les enseignants ? Quelles en sont les spécificités par rapport à d'autres dispositifs existants comme, par exemple, la narration de recherche ?

2. Résultats

Au cours de la recherche, nous avons organisé un recueil de données par questionnaires, des correspondances entre lycéens et étudiants volontaires sur un problème de maximum (étudiants de L1, L2, L3 et M1, 16 correspondances en 2007- 2008 et 36 en 2008-2009) et des correspondances entre collégiens et lycéens (élèves de 3$^{\text{ème}}$ et 2de, 17 correspondances en 2009-2010) à propos d'un problème de droites concourantes.

2.0. Comment les étudiants et lycéens cherchent-ils un problème de mathématiques ? (Q1)

Cette étude repose sur l'analyse des écrits de recherche et des questionnaires fournis par 135 lycéens et 48 étudiants sur trois problèmes. Les principaux résultats sont les suivants.

Pour la majorité des élèves chercher un problème, dans le contexte exposé précédemment, reste une activité d'une durée courte mais raisonnable qui apparaît le plus souvent comme une activité scolaire. Pour la moitié des élèves, la recherche s'effectue en 2 ou 3 reprises ; cela leur permet d'«avoir de nouvelles idées», de «laisser reposer» le problème, de «prendre du recul». Cet intermède est souvent l'occasion pour les élèves de discuter du problème, le plus souvent avec leurs camarades. La moitié des élèves explorent une seule piste lors de la recherche du problème, les autres n'exploitent pas longtemps d'autres pistes, mais ils ne disent pas pourquoi ils les abandonnent.

L'écriture est présente dès le début de la recherche pour la quasi-totalité des élèves, d'abord au brouillon puis au «propre». Mais plus de la moitié des élèves n'ont pas écrit au brouillon de choses qu'ils n'ont pas réussi ensuite à mettre au propre. Ils n'explorent pas, en général, des pistes différentes, ni des pistes au-delà de celles proposées dans le problème. Leur brouillon semble demeurer un écrit privé. Le passage par le brouillon constitue donc plus une volonté de rendre un écrit lisible à l'enseignant qu'à une pratique de la recherche.

Les schémas et dessins réalisés (cas en particulier d'un des problèmes) se limitent le plus souvent à la visualisation de configurations (Pythagore, Thalès). Peu d'élèves ont recours à des outils technologiques (calculatrices...). Pour les élèves qui déclarent majoritairement -et cela est confirmé par l'étude des copies- que cela les a aidés, ces démarches relèvent moins de l'expérimentation dans la recherche que de l'heuristique.

Nous avons obtenu deux genres d'écrits, d'une part des explications et d'autre part des démonstrations. Par démonstration, il faut entendre ici des écrits stéréotypés ayant par leurs structures et leurs termes le statut de démonstration, c'est-à-dire similaires à ceux que les professeurs montrent aux élèves et que les élèves produisent dans le cadre scolaire habituel. Ces écrits ont pour destinataire le professeur. Parfois, la forme et la structure de l'écrit semblent primer sur le contenu mathématique.

2.1. La « correspondance mathématique » comme dispositif de recueil de données (Q1)

Les résultats ci-dessus concernent la façon dont les étudiants cherchent un problème mais nous permettent difficilement d'accéder à leur activité mathématique réelle et, en particulier, à la dimension « expérimentale » éventuelle de cette activité car les écrits sont destinés à l'enseignant et restent trop scolaires. Pour ce faire, nous avons mis en place un dispositif particulier et nouveau : la correspondance mathématique entre lycéens et étudiants. Il ne s'agit pas de résolution collaborative d'un problème. Une correspondance mathématique a les caractéristiques suivantes : les lycéens n'ont pas les connaissances pour résoudre le problème de façon experte mais disposent d'autres moyens ; les étudiants ont les connaissances expertes pour résoudre le problème ; les correspondants sont presque pairs ; les lycéens et les étudiants ont une quinzaine de jours entre la réception de leur lettre et leur envoi pour réfléchir au problème, les professeurs jouent le rôle de facteur ; une séance de rencontre des correspondants et de restitution avec présentation d'analyses autour des correspondances suivi d'un débat est organisée ; un mathématicien donne une conférence.

2.2. L'activité de résolution de problèmes dans une correspondance mathématique (Q1, Q2, Q5, Q6)

Les résultats ci-dessous concernent uniquement des correspondances entre lycéens et étudiants recueillies en 2007-2008 (Hersant, 2009, 2011). Les analyses du corpus entre collégiens et lycéens sont en cours.

Les analyses montrent que l'activité mathématique des élèves est plurielle, avec tantôt recours à des raisonnements FAR (familiar algothmic reasonnements pour Lithner), tantôt des raisonnements créatifs, et aussi plurielle, dans la mesure où rares sont les élèves qui n'explorent qu'une seule piste. Les résultats apparaissent plus contrastés que ceux obtenus par Lithner. Les raisonnements des élèves révèlent une activité non essentiellement orientée vers la solution du problème à travers les questions que posent explicitement les élèves : sept élèves s'interrogent au moins une fois sur la validité du résultat obtenu, sept (pas exactement les mêmes) s'interrogent sur la validité de leur démarche et huit sur des aspects techniques de la résolution. Ces dernières questions, qui témoignent d'une orientation de la recherche vers la solution, sont à peine plus nombreuses, alors que les élèves sont dans une situation techniquement difficile. Cela montre que les élèves s'inscrivent dans une démarche de problématisation : la grande majorité tient à résoudre le problème et à le comprendre et pas seulement à apporter une solution à la question posée. Ces résultats appellent de nouvelles investigations pour affiner les relations entre créativité et problématisation et rendre compte de l'épaisseur de l'activité mathématique des élèves.

De plus, excepté pour les très bons élèves et les élèves très scolaires, les enseignants sont étonnés par les productions des élèves : l'activité déployée dans la correspondance mathématique ne correspond pas à l'activité habituelle des élèves en classe et dans leur écrit. La capacité de recul de certains élèves, leur créativité dans les raisonnements mobilisés, leur ténacité et leur motivation provoquent un étonnement chez les enseignants qui n'observent pas ces comportements habituellement. De plus, certains élèves réfractaires à l'écriture comme trace d'un raisonnement rapportent volontiers leur démarche dans les correspondances. Ces résultats montrent donc que les lycéens, dans des conditions différentes des conditions habituelles de classe, ont une activité plus créative et plus problématisée que celle qu'ils laissent voir à leur enseignant ; ils sont semblables à ceux de Battie (2003).

2.3. Les conditions écologiques crées par la correspondance mathématique (Q3, Q4)

En ce qui concerne les conditions écologiques permettant de révéler ces potentialités, il est évident que le dispositif permet une rupture avec le contrat didactique habituel (l'enseignant n'est pas un des protagonistes de l'échange épistolaire). Par ailleurs, même si les élèves savent qu'ils correspondent avec un étudiant plus avancé qu'eux, qui a pour rôle de les aider, la responsabilité de la production d'une solution et d'une validation de cette solution leur incombe largement. Il ne faut pas nier non plus que pour les lycéens, cette correspondance constitue probablement une sorte de défi. La variable *durée* semble aussi contribuer à la dévolution du problème dans la mesure où l'aide du correspondant ne sera pas disponible immédiatement. La dévolution du problème, dans ce cadre, est donc certainement plus grande qu'en classe. Mais, cette dévolution n'est possible que si le problème lui-même le permet (possibilités de rétroactions en cas d'erreurs en particulier).

Par ailleurs, en ce qui concerne le « recul » des élèves, vraisemblablement, la correspondance crée des conditions qui favorisent l'explicitation de questions *via* l'adresse à un presque pair, qui peut être considéré comme un « grand frère », plus avancé donc légitime par rapport au savoir et reconnu comme pouvant apporter de l'aide sans que sa légitimité soit aussi écrasante que celle d'un professeur. Toutefois, la correspondance mathématique crée aussi d'autres conditions qui rendent presque nécessaires la formulation de ces questions : pour obtenir de l'aide, il faut faire comprendre son raisonnement et les raisons pour lesquelles on bloque ; l'inscription dans la durée demande de garder des traces de son raisonnement.

2.4. La correspondance mathématique comme dispositif pédagogique (Q3, Q6)

Le dispositif pédagogique composé d'un échange épistolaire entre élèves presque pairs et d'un temps de « restitution » en classe constitue un dispositif pédagogique singulier qui présente des différences essentielles avec la narration de recherche et la recherche collaborative (ECCEmaths, 2012). L'étude de l'ensemble des correspondances recueillies permet de pointer des apprentissages potentiels dans le domaine de la résolution de problèmes associés à ce dispositif, en sus des apprentissages purement mathématiques en rapport avec le problème choisi : structurer, faire le point ; étudier et s'approprier le raisonnement d'un autre ; accepter de se tromper pour progresser ; apprendre de façon autonome à mobiliser ses connaissances mathématiques ; se projeter dans un avenir mathématique.

L'ensemble de ces résultats nous encourage à poursuivre le travail sur la correspondance mathématique en pensant notamment à travailler d'une part sur les conditions de possibilité d'une mise en œuvre dans des classes ordinaires, ce qui inclut le développement d'une série de problèmes pertinents, et d'autre part sur les apprentissages des élèves, éventuellement en rapport avec la démarche d'investigation.

Bibliographie

Groupe ECCEmaths (2012) *La correspondance mathématique : d'un dispositif de recueil de données à un dispositif pédagogique*, Repères IREM n° 87

Moulin S, 2009, *Evolution des conceptions autour du maximum au passage du lycée à l'université,* Mémoire de Master 2 de didactique des mathématiques, Université Paris 7

Hersant, M. (2011) *Correspondance entre élèves : conditions d'une activité mathématique « créative » et problématisée à la fin du lycée*, Educational Studies in Mathematics, 78, p. 343–370

Genin M., Hersant M. (2012) *La correspondance mathématique : une activité mathématique « créative », quels apprentissages ?*, In Trouche L., Chaachoua A., Hersant M., Matheron Y., Psycharis G. (Ed.), Actes des journées de l'IFé, http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/actes-des-journees-mathematiques-de-life

Démarche de recherche en classe : quels enjeux pour les enseignants, les élèves et la recherche ? (IREM de Paris 7)

Le groupe, auquel participeront Cécile Ouvrier-Buffet, Fabien Brugier et Nicolas Giroud, débutera ses travaux à la rentrée 2012.

Cécile Ouvrier-Buffet : cecile.ouvrier-buffet@creteil.iufm.fr

On peut noter la place croissante accordée aux démarches de recherche et d'investigation dans les curricula. Une perspective sociétale guide ce mouvement (en particulier du côté des sciences). On retrouve le même phénomène au niveau international.

Dans les programmes du secondaire, les mathématiques sont rapprochés des sciences quant à la démarche d'investigation : similitudes et différences entre la démarche de recherche en mathématiques et les démarches d'investigation en sciences (notamment sur la question de la validation, mais pas seulement) doivent être questionnées. L'activité et les écrits de recherche sont également travaillés, en mathématiques, les élèves étant placés en position de recherche.

Si les mathématiques et les sciences ne se rapprochent pas toujours facilement, la question se pose de savoir comment les distinguer et les faire se rejoindre autour des démarches de recherche et d'investigation. La recherche dans ce domaine, en didactique, est encore ouverte.

Si l'on considère les publications concernant les démarches de recherche en mathématiques et démarches d'investigation en sciences, on retrouve dans les deux cas un fort appui conceptuel avec une réflexion épistémologique et didactique.

Du côté des mathématiques, certains travaux en didactique (essentiellement francophones) mettent l'accent sur l'implémentation de situations dites de recherche en classe : celles-ci visent à placer l'élève dans une posture proche de celle du chercheur professionnel. Les analyses épistémologiques et didactiques existantes de telles situations de recherche en classe et hors classe permettent d'appréhender la démarche de recherche dans l'enseignement des mathématiques, et de cerner les points encore sujets à débat et à analyses tels que la dévolution de telles situations à des enseignants.

Notre groupe IREM cherchera à répondre à différentes questions du côté des mathématiques tout d'abord, en explorant la « démarche de recherche » en classe à différents niveaux (primaire, secondaire, formation des enseignants). Nous n'utiliserons pas, volontairement, le terme de « démarches d'investigation » pour les mathématiques, celui-ci étant réservé aux sciences dites expérimentales. Dans un second temps, un rapprochement avec les démarches d'investigation en sciences pourra être réalisé.

Plusieurs questions découlent de la conception, de la réalisation, de l'implémentation et de l'évaluation de telles situations en classe, tant du côté des apprenants que des enseignants et de leur formation, du primaire au supérieur :

- Qu'entend-on par démarche de recherche, démarche expérimentale ? Quels sont les positionnements épistémologiques possibles ?
- Comment garantir la dévolution à des enseignants de situations impliquant de telles démarches ? Comment enrichir la formation des enseignants pour favoriser cette dévolution ?
- Quels apprentissages effectifs (notionnels et transversaux) permettent ces situations en classe (et éventuellement hors classe) ?

Le travail du groupe IREM pourrait ainsi se concentrer sur :

- les aspects épistémologiques de la démarche de recherche en mathématiques (via les situations-recherche, cf. Maths à Modeler à Grenoble et Dream à l'IFé) voire de la démarche d'investigation en sciences ;
- la dévolution de situations impliquant de telles démarches à des enseignants, et donc, la question de la formation des enseignants elle-même (disciplinaire et didactique : en effet, la question de la spécialité des enseignants se pose, puisqu'aujourd'hui tout enseignant du primaire est polyvalent avec une licence disciplinaire et tout enseignant du secondaire sera bientôt bivalent).

Il y aura ainsi un travail épistémologique et didactique, avec expérimentations dans les classes des enseignants du groupe et en formation à l'IUFM.

Démarches d'investigation au collège : vers un changement de pratiques ? (Groupe de recherche formation, IREM de Rennes)

Le groupe, animé par Marie-Pierre Lebaud, a débuté ses travaux à la rentrée 2011.

Marie-Pierre Lebaud : marie-pierre.lebaud@univ-rennes1.fr

Des dispositifs de mise en œuvre de démarches d'investigation sont apparus dans les programmes mis en place au collège (Bulletin officiel, hors série n°6, vol 2, 2007) : dans l'introduction commune aux disciplines scientifiques, ces démarches sont mises en avant comme une des méthodes d'enseignement possibles, en fonction du sujet traité. Elles sont ainsi décrites dans le « canevas d'une séquence d'investigation » (*...choix d'une situation-problème, appropriation du problème par l'élève, formulation de conjectures, d'hypothèses, investigation ou résolution de problèmes conduite par les élèves, échange argumenté autour des propositions élaborées, acquisition et structuration des connaissances, opérationnalisation des connaissances...*), canevas de séquence qui fait lui-même partie des compétences du socle commun à acquérir par l'élève (*pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner; manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter*).

Cependant, de nombreux enseignants trouvent difficile de mettre en place des démarches d'investigation en classe au collège. Comment rendre compatible l'investigation avec l'avancée du programme, sans "perte de temps" ? Comment articuler investigation et apprentissage de la démonstration ?

L'objectif de ce groupe est de produire des ressources qui permettent, en partie, de répondre à ces questions : il s'agit de développer des situations en mathématiques, de les analyser et de les tester en classe, pour produire des supports compatibles avec le programme, permettant de vrais apprentissages, et aidant les professeurs à anticiper les comportements de élèves. En particulier, une réflexion sera menée sur le rôle du professeur, qui doit accompagner les élèves dans l'investigation sans apporter les solutions.

Des thèmes adaptés seront d'abord choisis par les membres du groupe en fonction de leurs classes et une étude pourra également être menée pour savoir comment évaluer, chez l'élève, la compétence « pratiquer une démarche d'investigation ».

Bibliographie

Lebaud, M.-P. & Gueudet, G. (2012) *Démarches d'investigation et collectifs dans la formation des enseignants*, Colloque EMF 2012, Genève

Loisy, C., Trgalova, J. & Monod-Ansaldi, R. (2010) *Ressources et travail collectif dans la mise en place des démarches d'investigation dans l'enseignement des sciences,* Actes des journées scientifiques DIES 2010 (pp.30-37). Lyon : INRP

Matheron, Y. (2010) *« Démarches d'investigation » et Parcours d'Étude et de Recherche en mathématiques : entre injonctions institutionnelles et étude raisonnée des conditions et contraintes de viabilité au sein du système*, Conférence invitée au colloque de la CORFEM, Juin 2010, Caen

Démarche expérimentale médiée par la technologie dans l'enseignement au lycée (Groupe Maths Info Lycée, IREM de Toulouse)

Jean-Jacques Dahan, responsable du groupe, a animé une conférence à ce sujet le 8 juin 2012 à Toulouse.

Jean-Jacques Dahan : jjdahan@wanadoo.fr

1. Introduction

Le groupe de géométrie dynamique de l'IREM de Toulouse, longtemps dirigé par Roger Cuppens, s'était intéressé à une nouvelle approche possible des mathématiques grâce à l'utilisation révolutionnaire du logiciel de géométrie dynamique Cabri (dans ses versions successives, Cabri 1, Cabri 2 puis Cabri 2 Plus). Des brochures remarquables, écrites par Roger Cuppens ont été coéditées par l'APMEP. L'IREM de Toulouse a d'ailleurs célébré son Jubilé au cours d'une journée qui a donné lieu à une brochure coéditée par l'APMEP. Cette brochure, en plus des conférences données, contient les mémoires d'un enseignant chercheur, chapitre qui peut montrer à tous les enseignants et tous les jeunes les chemins tortueux qui mènent aux mathématiques. Quand Jean-Jacques Dahan a succédé à Roger Cuppens, il a orienté le travail du groupe vers la possibilité de pratiquer une démarche expérimentale médiée, plus particulièrement par l'utilisation de Cabri 2 Plus (y compris dans ses versions calculatrices : de la TI-92 à la TI N'Spire de Texas Instruments) et ensuite Cabri 3D. Cela l'a conduit à formaliser de manière théorique ses idées dans des articles présentés au cours de différents congrès essentiellement en Anglais (congrès T3 aux États Unis et congrès ATCM en Asie) puis dans sa thèse présentée en 2005 à l'Université de Grenoble. Depuis, l'objectif de Jean-Jacques Dahan est de découvrir un format de ressources mobilisant la géométrie dynamique qui permette une pratique plus expérimentale des mathématiques. L'intérêt de ce travail est conforté par la demande de l'institution qui demande aux enseignants d'intégrer dans leur enseignement la démarche dite d'investigation sans qu'aucune définition formelle ou pratique de cette notion n'ait été préalablement donnée.

La volonté de mettre l'enseignant au centre de ces ressources est cruciale car nous n'avons pas voulu reproduire l'erreur commise dans les recherches en didactique dans leur début où l'enseignant était regardé par-dessus l'épaule de l'élève (rapport du CNRCE sur l'intégration des TIC dans le système éducatif, 2000). Notre expérience personnelle de formation continue pendant de nombreuses années à l'IREM de Toulouse ou de formation initiale à l'IUFM de Toulouse ainsi que tous les ateliers animés aux cours des diverses journées de l'APMEP nous ont confortés dans l'idée qu'une pratique de la démarche expérimentale nécessitait que nous mettions au point des documents s'adressant aux enseignants, qui répondent simplement aux prescriptions du programme, simples à comprendre et à utiliser et dans lesquels la terminologie de l'expérimental apparaisse clairement.

2. Les différentes étapes de notre travail avec les différentes approches et documents produits

Il est à noter que progressivement de 2004 à 2012, les ressources mises au point l'ont été de plus en plus en coopération avec une professeure de collège, Mme Myriam Bouloc-Rossato. Cette coopération a d'ailleurs donné lieu à une convention triennale de 2009 à 2012 entre l'IREM de Toulouse et le collège Anatole France de l'AEFE à Casablanca où cette collègue était en poste. Le but initial de la recherche menée était, par un système de triple aller-retour entre l'expert de l'IREM et les enseignants de terrain (néanmoins bien impliqués dans l'utilisation des technologies en classe, Mme Bouloc-Rossato en particulier), de découvrir un format pertinent de ressources auquel l'enseignant adhèrera rapidement même s'il n'est pas spécialiste ni de l'utilisation des TICE ni de logiciel de géométrie dynamique en particulier

2.1. ***Les documents interactifs en ligne***

La première direction prise fut celle d'un document interactif en ligne (l'interactivité consistant en l'animation possible de figures en ligne ou sous formes d'applets Java ou sous forme d'ActiveX).

Le premier document publié dans ce format est un document sur le nouveau programme de seconde avec Cabri, résumant de manière interactive (avec des applets Cabrijava en ligne) un atelier donnée aux journées nationales de l'Apmep de Nice en 2000. On y montre comment mener une recherche de problème en utilisant les possibilités offertes par la géométrie dynamique et bien d'autres approches dynamiques, dont les boîtes noires dont il sera question à la fin de ce document : http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/nice/premieratelier.htm

Le second document publié dans ce format est un document sur la perspective cavalière (en langue anglaise uniquement) avec Cabri, compte rendu de la présentation faite en 2002 à au cours de la conférence T3 de Columbus. Là, les figures interactives (applets Java) peuvent aider le professeur à faire comprendre de manière expérimentale le principe de cette perspective : http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/03mathinfo/percav/ppwithcabrids.htm

2.2. La thèse de Jean-Jacques Dahan

Pour ceux qui désireraient comprendre l'arrière-plan théorique qui soutient de manière récurrente le travail de création de ressources suivant un format adéquat qui tend à être un format « vidéos », voici le lien vers le travail de recherche de Jean-Jacques Dahan intitulé « La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-Géomètre en mathématiques : un essai de formalisation à parti de l'analyse de démarches de résolution de problèmes de boîtes noires » : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00356107/fr/

On y découvrira par exemple les différentes étapes pré et post conjecture d'une démarche expérimentale idéale, toute la terminologie d'une telle démarche, les techniques de validations expérimentales en liaison avec leurs principes perceptifs ou déductifs, en environnement papier crayon ou en environnement informatique (praxéologies ou paradigmes G1 et G2 de Parzisz ou Kuzniak dans le premier cas ou praxéologies G1 et G2 informatiques dans le travail de Jean-Jacques Dahan).

2.3. La mise au point de documents avec un collègue du terrain

Avant la mise en place de la convention triennale, un travail de mise au point de ressources avaient déjà été entrepris avec le même protocole de triple aller-retour qui a donné lieu à une présentation aux journées APMEP de La Rochelle avec mise en ligne des documents fournis sur le site de l'APMEP (Proposition d'un format pour des activités de découverte utilisant la géométrie dynamique en collège. Exemples testés en classe). Un diaporama complété sert de fil conducteur pour expliquer le format des documents fournis pour un nouvel enseignement du théorème de Pythagore, du théorème de Thalès… Ce format qui semblait très prometteur sera abandonné au détriment du format des vidéos pour des raisons de réalisme pratique. Il consistait en un dossier de 6 fichiers, 3 fichiers textes et 3 fichiers Cabri pour permettre une prise en main même par des professeurs non pratiquant la démarche TICE. Six dossiers extraits d'une commande faite par la société Cabrilog d'un paquet de 40 dossiers répartis sur les niveaux de seconde, première et terminale font partie de ce document téléchargeable. Ces dossiers devaient servir à préparer l'épreuve expérimentale du baccalauréat ; ils n'ont jamais été publiés à cause de l'abandon de ladite épreuve. Aller à http://www.apmep.asso.fr/Ateliers-du-samedi,2685 puis télécharger les « diaporama et documents » fournis pour l'atelier SA-11 de Myriam Bouloc-Rossato.

2.4. La convention triennale IREM-Collège Anatole France AEFE de Casablanca et ses résultats

2.4.1. Document sur l'enseignement des notions de périmètre, aire et volume au collège

Ce document est le compte-rendu interactif de la présentation faite par Jean-Jacques Dahan et Myriam Bouloc-Rossato au cours des journées de l'APMEP de Paris en 2010, montrant un premier résultat du travail de recherche précité. Toutes les figures illustratives statiques contiennent des liens vers ces mêmes figures animables : http://www.irem.ups-tlse.fr/dahan/ mais aussi des liens vers des vidéos Youtube postées sur la chaîne de Jean-Jacques Dahan qui permettent d'avoir accès à une scénarisation simplifiée de leur utilisation. Ces vidéos peuvent être directement téléchargées au format mp4 : http://www.youtube.com/user/jjdahan24071946?blend=1&ob=video-mustangbase.

Deux ateliers sont prévus au cours des journées de l'APMEP de Metz au cours desquelles nous présenterons l'intérêt didactique de ce format ainsi qu'une façon d'utiliser de telles ressources : l'un abordera le niveau collège et l'autre le niveau lycée. Notons qu'à ce jour les vidéos de cette chaîne ont été visualisées près de 12000 fois depuis 18 mois environ depuis 113 pays. Elle contient à ce jour 75 vidéos (abordant pour l'instant de nombreux thème du collège, des problèmes de représentations en perspectives militaire et cavalière, bientôt en perspective centrale avec Cabri 2 Plus et des problèmes de 3D avec Cabri 3D) dont une quinzaine en Anglais. On insiste plus particulièrement sur des exemples modélisant une démarche d'investigation qui est une démarche générant des données qui, soit, aident à la génération de conjectures (expérimentations génératives) soit à la validation ou la réfutation de conjectures préalablement émises (expérimentations validatives), le mot « validation » est pris dans le sens de corroboration, c'est à dire de vérification expérimentale de conditions nécessaire impliquées par de telles conjectures : sens donné par Popper.

A noter que le mot « investigation » a été défini comme faisant référence à des générateurs de données connus et bien repérés.

2.4.2. Vidéos Youtube déroulant un diaporama qui inclut lui-même des figures animés sur le thème de l'enseignement des sections des solides au collège

Le travail de recherche précité a donné lieu à la création de documents sur l'enseignement des sections de solides présenté au cours des journées de l'APMEP de Grenoble en 2011. Un document du type de celui présenté dans le paragraphe 2.4.1. est toujours en cours de préparation. En attendant, une vidéo déroulant le diaporama utilisé est disponible sur internet. On y verra comment on peut animer les figures créées directement pendant le diaporama grâce aux plug-ins de Cabri. Les fichiers Cabri sont à la disposition de ceux qui le demandent. La vidéo peut aussi être utilisée comme document ressource à condition de bien repérer le minutage : http://www.youtube.com/watch?v=Pxd6ClMATpU&list=UUTtC5fYQSKAc5jm_LejozsA&index=5&feature=plcp

2.4.3. Vidéos comme aide à la scénarisation de certaines notions classiques

Les identités remarquables, les diverses formes du théorème de Thalès, une scénarisation en 6 vidéos de l'enseignement de la caractérisation d'un triangle rectangle par son inscription dans un cercle admettant un de ses côtés pour diamètre (une brochure présentant cette scénarisation est en préparation), la proportionnalité abordée de manière dynamique (à travers le phénomène de morphing) ont donné lieu à des fichiers Cabri et des vidéos testées en classe et améliorées avant publication sur la même chaîne YouTube.

2.4.4. Vidéos YouTube de géographie, fruit d'un travail de coopération avec un professeur d'histoire et Géographie du collège précité

Au cours de la dernière année de la convention triennale, mon expertise en géométrie dynamique a été sollicitée par un collègue de géographie du collège Anatole France pour créer des documents interactifs permettant aux élèves de collège de mieux comprendre les principes de cartographie et en particulier la représentation de Mercator (en réalité la représentation dite d'Archimède). Devant le vif intérêt des élèves pour les documents animés présentés, j'ai décidé d'améliorer ces documents afin d'en faire des vidéos qui ont été postées sur ma chaîne Youtube : ces dernières abordent des thèmes plus classiques comme la rotation de la terre autour du soleil, le principe des saisons, les jours et nuits polaires, les durées des jours et nuits suivant la latitude… Ces vidéos ont reçu l'accueil enthousiaste d'Étienne Ghys de l'ENS de Lyon auteur du film « Dimensions » primé par le prix D'Alembert.

2.4.5. Vidéos YouTube à venir sur la perspective centrale et le théorème sur les points de fuite de Guidobaldo

Dans le même contexte, ce même professeur de Géographie et son épouse enseignant le Français m'ont demandé de sensibiliser leurs élèves à la perspective du peintre pour les préparer à se lancer dans un concours photos ayant pour thème « les mathématiques dans la ville ». Là encore, ce travail a déclenché mon intérêt pour cette perspective et suscité un travail de recherche avec Cabri 3D au cours duquel j'ai pu retrouver le théorème sur les points de fuite découvert par Guidobaldo del Monte en 1600. J'ai même pu en mettre en évidence une généralisation aisée à démontrer (voir « the Geometry of an Art » de Kirsti Andersen chez Springer). Cette recherche sera présentée sous forme d'un article au cours du prochain congrès ATCM qui aura lieu en Décembre 2012 en Thaïlande (« A didactical transposition of the perspective theorem of Guidobaldo del Monte with Cabri 3D »). D'ici là, un certain nombre de vidéos illustrant le travail fait pour les élèves et le travail fait pour ma recherche seront publiées sur ma chaîne YouTube. Dans un avenir proche, cet article sera publié en Français et mis en ligne sur le site internet de l'IREM de Toulouse.

3. Certains problèmes de boîtes noires comme instruments d'initiation à la recherche expérimentale avec prise d'initiative

Après Bernard Capponi qui avait envisagé la possible utilisation des transformations cachées par des macro-constructions sous Cabri et leur réelle utilisation dans la thèse de Jean-Jacques Dahan, il est apparu que de telles boîtes noires pouvaient constituer une excellente entrée pour la démarche d'investigation. L'association ATM (un équivalent anglais de l'APMEP) a commandé à Jean-Jacques Dahan une série de 20 de ces boîtes noires pour utilisation par leurs professeurs. Il serait pertinent d'utiliser de tels outils pour bien faire comprendre aussi aux élèves qu'aux professeurs les différentes étapes envisageables d'une démarche d'investigation médiée par des environnements informatiques : http://www.univ-irem.fr/commissions/geometrie/PP3.pdf.

4. Conclusion

Le format de ressources informatiques le plus pertinent dans l'état actuel de nos recherches pour la compréhension de la démarche d'investigation et d'une aide à sa pratique, semble être le format vidéo que nous avons adopté. Les vidéos mises au point sont postées sur Youtube (chaîne de Jean-Jacques Dahan). Le détail des thèmes abordés et les liens directs vers les vidéos concernées sera publié dans le rapport d'activité de notre groupe de recherche (site internet de l'IREM de Toulouse : http://www.irem.ups-tlse.fr/spip/).

La présentation faite par Jean-Jacques Dahan lors du colloque sur la démarche d'investigation de la C2I Lycée en Juin 2012 à Toulouse fera bientôt l'objet d'une série de vidéos qui permettront à tous de voir ce qui a été présenté.

Eléments de bibliographie pour l'ensemble de ce rapport

Outre les références citées par les différents contributeurs, les documents suivants ont été sélectionnés car ils illustrent la richesse des travaux menés sur les démarches d'investigation en mathématiques, sur la résolution de problèmes et sur des sujets connexes, et parce que chacun d'entre eux renvoie à d'autres références riches sur ces thématiques.

Arsac G. et Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*, Lyon : Scéren CRDP de Lyon

Artigue M., Houdement C. (2007) *Problem solving in France : didactic and curricular perspectives*, Zentralblatt der Didaktik der Mathematik 39. 365-382.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage

Chevallard, Y. (2008) *Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux,* In Gueudet, G. & Matheron, Y. (Eds.) (pp. 344-366) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007*. Paris : IREM Paris 7 et ARDM

Chevallard, Y. (2009) *La notion de PER : problèmes et avancées*, http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf

Coquidé M., Fortin C. & Rumelhard G. (2009) *L'investigation : fondements et démarches, intérêts et limites*, *ASTER* 49, 51-78, http://hdl.handle.net/2042/31129

Dewey J. (1938/1993) *Logique. La théorie de l'enquête*, Paris : PUF

Douady, R. (1986) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherches en didactique des mathématiques, 7/2, 5-31

Freudenthal, H. (1973) Mathematics as an educational task. Dordrecht, The Netherlands : Kluwer.

Grangeat, M. (2011) *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique*, Pratiques de classes, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves, Ouvrage collectif, ENS Lyon.

Monod-Ansaldi R. et Prieur M. (2012) *Démarches d'investigation dans l'enseignement secondaire : représentations des enseignants de mathématiques, SPC, SVT et technologie :* http://ife.ens-lyon.fr/ife/ressources-et-services/ocep/dispositifs/DI/rapport-DI

Pólya G. (1949) *How to solve it*, Princeton University Press

Rocard M., Csermely P., Jorde D., Lenzen D., Walberg-Henriksson H. & Hemmo V. (2007) *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*, Commission Européenne, Direction de la Recherche, http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_fr.pdf