Problèmes et équations de premier degré en $4^{ème}$

IREM d'Aquitaine- INRP-AMPERES- Groupe Didactique des mathématiques
A. Berté- F. Delpérié- C. Desnavres- L. Foulquier- J. Lafourcade - M-C. Mauratille – F Petit

Conformément à l'idée qui guide la recherche du groupe AMPERES, nous commençons par donner les raisons qui nous permettent de motiver l'étude des équations en quatrième, pour les élèves. Nous allons formuler ces motivations sous forme de questions qui découlent de l'analyse mathématique des situations relevant de la résolution d'équations en général, de l'histoire de l'enseignement de cette notion, des exigences des programmes actuels et surtout des productions de nos élèves. Puis nous serons amenés à exposer et justifier les choix découlant de l'analyse précédente, qui nous ont conduits à la construction de la suite de séquences que nous avons expérimentées dans nos classes. Les situations proposées ainsi que des observations que nous avons pu faire auprès de nos élèves constituent la dernière partie de ce texte.

I- Question à laquelle cette étude va répondre

Les équations et inéquations servent à résoudre une grande variété de problèmes dans lesquels plusieurs conditions données sont exprimées par des relations entre des nombres ou quantités connus et inconnus. Il s'agit de répondre à la question suivante: y a-t-il des valeurs qui conviennent pour les inconnues, une seule ou plusieurs, et comment fait-on pour les trouver quand c'est possible ?

La question se présente en $5^{ème}$ puis en $4^{ème}$ et au delà avec les problèmes relevant d'une équation à une inconnue et se poursuivra en $3^{ème}$ et au delà avec les problèmes relevant d'inéquations à une inconnue, des systèmes d'équations et d'inéquations. Dans ce texte nous limitons notre étude aux équations de premier degré en $4^{ème}$

Une variable didactique très importante est la façon dont sont données les conditions.

1- Deux types de problèmes pour les élèves

Type 1 : Les conditions sont données par des égalités entre des « programmes de calcul »
Deux variantes :
soit directement avec le langage de l'algèbre
soit par des phrases formant un problème où deux programmes de calcul sont décrits

Exemple1 :
- Existe-t-il un nombre x tels que $2x + 14 = 4x – 18$?
- Y a t-il un nombre qui donne le même résultat si je le multiplie par 2 et que j'ajoute 14 ou si je le multiplie par 4 et que je retranche 18

Exemple 2
- Trouver x et y tels que $x + y = 10$ et $x + 3y = 15$
- Existe-t-il deux nombres inconnus tels que leur somme soit 10 et que l'un ajouté au triple de l'autre donne 15 ?

On est ramené aux questions suivantes :
- Un programme de calcul étant donné, peut-on trouver les nombres -s'il en existe- qui soumis au programme de calcul ont pour résultat une valeur donnée ?
- Peut-on savoir pour quelle(s) valeur(s) deux programmes de calculs donnent le même résultat ?

On est amené à étudier les techniques permettant de répondre à ces questions, c'est à dire la technique de résolution d'équation ou de systèmes d'équations.

Type 2 : Les conditions sont dans le texte d'un problème où les égalités ne sont pas données :

Exemple 3: Avec la somme dont je dispose, si j'achète 2CD il me restera 14 €, mais si je veux acheter 4 CD il me manque 18 €. Quel est le prix d'un CD et quelle est la somme dont je dispose ?

On pourrait dire que c'est le même problème que celui de l'exemple 1 car la solution algébrique consiste à résoudre la même l'équation: $2x + 14 = 4x – 18$

Exemple 4: J'ai 10 litres de lait, mais je soupçonne que de l'eau a été mélangée à ce lait. En le pesant je trouve que la masse de ce liquide est 10,240 kg. Sachant qu'un litre de lait a une masse de 1,03 kg, y a-t-il de l'eau dans le liquide et si oui combien ?[1]

On pourrait dire que c'est le même problème que celui de l'exemple 2 car la solution algébrique consiste à trouver x et y tels que $x + y = 10$ et $x + 1{,}03\,y = 10{,}24$

Mais l'apprentissage de résolution des problèmes de type 1 ne suffira pas à rendre les élèves capables de résoudre les problèmes de type 2.
Il ne s'agit pas simplement de disposer d'une technique pour résoudre une équation, mais de savoir introduire des lettres pour traduire l'énoncé, afin d'écrire l'équation avant de la résoudre, ce qui change la nature du problème.

Or dans les nouveaux programmes de collège, la notion d'équation ne fait pas partie du socle commun mais la résolution des problèmes de premier degré en fait partie.

Or utiliser le calcul littéral n'est pas nécessaire pour résoudre les problèmes de premier degré. Nos élèves inventent parfois avec succès d'autres procédures et la méthode arithmétique était la seule enseignée en mathématique autrefois.

Nous allons décrire d'autres procédures dans lesquelles s'engagent les élèves de collège de tous niveaux, aussi bien ceux de 6ème ou de 4ème qui n'ont eu encore aucun enseignement sur les équations que ceux de 3ème ou de seconde qui veulent les

[1] Ce problème est donné dans l'article intitulé « Palimpseste » de Philippe Lombard, revue de l'APMEP n°466

éviter car ils ne savent pas ou ne peuvent pas se servir de cet outil qui leur est demeuré étranger malgré l'enseignement qu'ils ont reçu.

2- Méthode arithmétique - Exemple 1 : Le concert

<u>Problème</u> : Pour un étudiant, une place de concert coûte 30 €, alors que le prix normal est de 45€ . La recette pour 80 personnes a été de 3225€ . Combien d'étudiants ont assisté à cette séance ?

80x45 prix maximum possible (x)
80x30 prix minimal possible (y)
80x45 ≥ 3225 ≥ 80x30
15€ par personne entre le prix normal et le prix étudiant
soit 80x45 > 3225 > 80x(45−15)
15x80 l'écart possible entre la somme des prix normaux
ou opposé donc (80x45)−(80x30) = 15x80
$3600-3225 = \frac{375}{15} = 25$

soit x le prix maximum
soit p le nombre de personnes
soit r la recette
soit y le prix minimum

$$\frac{(x \times p) - r}{(x - y)}$$

$$\frac{(\text{prix maxi} \times \text{nb de personnes}) - \text{recette}}{(\text{prix maxi} - \text{prix mini})}$$

Le raisonnement de l'élève

Il remarque que la différence entre la recette maximale obtenue avec 0 étudiants (80×45) et la recette minimale obtenue avec 80 étudiants (80×30) est égale à $80 \times (45-30) = 80 \times 15$

Il en déduit que la différence entre la recette maximale pour 0 étudiants et la recette 3225 pour un nombre inconnu d'étudiants est le produit de ce nombre inconnu par 15.

Le quotient de cette différence 375 par 15 est donc le nombre d'étudiants cherché.

Cette solution lui a demandé tant d'effort qu'il a jugé utile d'établir une formule générale en désignant les données par des paramètres. L'inconnue n'est pas désignée.

C'est intéressant car la solution de cet élève se transpose au problème de la laitière (voir exemple 4 ci dessus) de même type.

Si on n'avait que du lait, soit 0 litres d'eau, la masse serait $1{,}03 \times 10 = 10{,}3$ (le maximum, comme la recette maximale 3600). Donc il y a de l'eau.

La différence est 10,3 kg – 10,24 kg = 0,06 kg. Dans le cas du concert c'était 3600€ – 3225€ = 375€

Cette différence est égale au produit du nombre de litres d'eau cherché par 0,03 (1,03 – 1)

Pour le concert c'était le nombre d'étudiants cherché multiplié par 15 soit (45 –30).

D'où le nombre de litre d'eau est $0{,}06 \div 0{,}03 = 6 \div 3 = 2$.

De même le nombre d'étudiants était $\frac{375}{15} = 25$

La mise en équation des deux problèmes conduit au système :

$$\left.\begin{array}{l} x + y = p \\ \\ bx + ay = r \end{array}\right\}$$

avec

x = nombre cherché (étudiants, litres d'eau)	non désigné par l'élève
p = nombre total (personnes, litres de liquide)	
y = nombre complémentaire de x	non désigné par l'élève
a = valeur unitaire maximum (45 ou 1,03)	nommé x par l'élève
b = valeur unitaire minimale (30 ou 1)	nommé y par l'élève
r = donnée (recette ou masse de liquide)	

La résolution de ce système par combinaison linéaire des équations donne

$ax + ay = ap$ donc $(a - b)x = ap - r$ qui correspond au calcul de l'élève mais pas à son raisonnement.

La résolution par substitution conduit à l'équation unique $bx + a(p - x) = r$

qu'un expert écrira du premier coup, avec une seule inconnue, sans passer par le système.

Tous les problèmes de premier degré peuvent se résoudre par des raisonnements de proportionnalité.

C'est le fondement de la seule méthode institutionnalisée pour résoudre des problèmes du premier degré sans l'algèbre, dite méthode de « fausse position » enseignée en France jusque vers 1900 environ.

Méthode de fausse position pour le problème du concert :

x_1 = 10 étudiants recette 3450 erreur $e_1 = 3450 - 3225 = 225$

x_2 = 20 étudiants recette 3300 erreur $e_2 = 3300 - 3225 = 75$

Le nombre d'étudiants cherché est $x = \dfrac{x_2 e_1 - x_1 e_2}{e_1 - e_2}$ soit $\dfrac{20 \times 225 - 10 \times 75}{225 - 75} = \dfrac{3750}{150} = 25$

Cette méthode était enseignée sans justification. On donnait seulement aux élèves la formule à appliquer, non sous sa forme algébrique comme ici, mais avec des phrases.

RÈGLE : *On multiplie chaque erreur par l'autre supposition, ce qui donne deux produits; on retranche ces deux produits l'un de l'autre, et l'on divise le reste par la différence des deux erreurs.*

Si les erreurs sont en sens contraire, c'est à dire l'une par excès et l'autre par défaut, on ajoute les deux produits et l'on divise la somme par la somme des erreurs[2]

Une justification avec nos notations actuelles :

Dans l'équation $f(x) = g(x)$ f et g sont des fonctions du premier degré

On utilise la proportionnalité des accroissements pour la fonction $f - g$ nulle pour la valeur x cherchée

Ici, en prenant pour inconnue x, le nombre d'étudiants, la résolution par une équation donne :
$30x + 45(80 - x) = 3225$
Dans ce cas, $g(x)$ est une constante ce qui facilite le raisonnement des élèves qui ne disposent pas de la formule car ils peuvent raisonner sur les accroissements de la seule fonction g .

$$\frac{[f(x_1) - g(x_1)] - [f(x_2) - g(x_2)]}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) - g(x_1)}{x_1 - x} \quad \text{soit} \quad \frac{e_1 - e_2}{x_1 - x_2} = \frac{e_1}{x_1 - x}$$

d'où $x_1e_1 - x_2e_1 = x_1e_1 - x_1e_2 - x(e_1 - e_2)$ d'où la formule $x = \dfrac{x_2e_1 - x_1e_2}{e_1 - e_2}$

Il est exclu d'asséner cette formule aux élèves de 4ème sans justification. Or une justification claire nécessite des connaissances qu'ils n'ont pas en 4ème notamment une bonne maîtrise des notations algébriques.

On peut interpréter la solution de l'élève comme une résolution arithmétique par la méthode de fausse supposition double « simplifiée » :
S'il n'y a aucun étudiant (première supposition $x_1 = 0$) la recette est $80 \times 45 = 3600$ et l'erreur correspondante est $3600 - 3225 = 375$
Si on remplace un spectateur tarif plein par un étudiant ($x_2 = 1$) la recette va diminuer de 15 € (la différence entre les deux erreurs) d'où $x = \dfrac{375}{15} = 25$

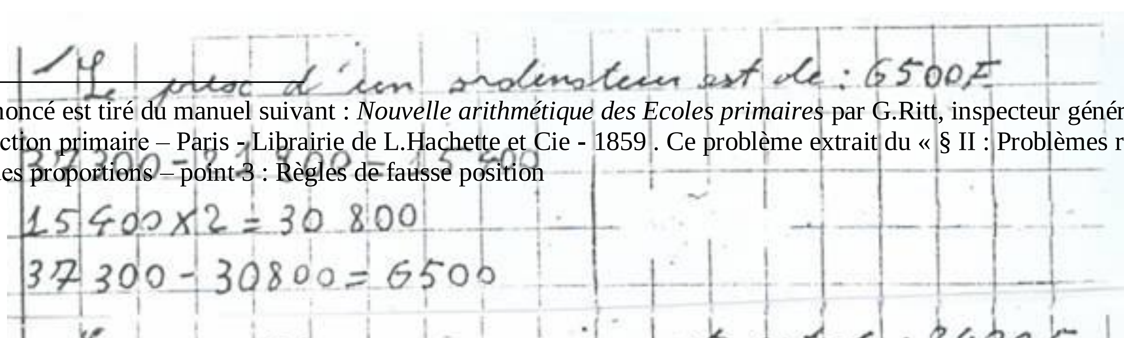
Divers raisonnements utilisés par les élèves
<u>Sans formule les élèves peuvent</u> :
- continuer les essais (par exemple essayer 30, puis 25 qui convient)
- raisonner avec les deux essais 10 et 20 : si le nombre d'étudiants passe de 10 à 20 on réduit l'écart de 225 à 75 soit de 150. Il faut encore réduire l'écart de 75 donc il faut encore augmenter de la moitié soit de 5
d'où la solution 20 + 5. Selon les valeurs essayées les calculs seront plus ou moins faciles
- trouver le raisonnement de l'élève précédemment cité, en l'explicitant plus ou moins.
- trouver un autre raisonnement (par exemple dire que la recette diminue de 15 chaque fois que le nombre d'étudiants augmente de une unité, d'où la proportionnalité qui donne la solution).

3- Méthode pré algébrique- Exemple 2 : L'achat de matériel informatique :

Il s'agit d'un problème posé en 3ème il y a quelques années à propos de la résolution des systèmes de deux équations du premier degré.

<u>Problème :</u> Pour équiper un espace technologique, un collège achète 5 ordinateurs et 2 imprimantes pour un coût total de 37 300 F. L'année suivante, pour compléter le matériel, ce collège achète aux mêmes tarifs, 3 ordinateurs et une imprimante pour un coût total de 21 900F. Quel est le prix d'un ordinateur , quel est le prix d'une imprimante ?

Un élève a esquivé l'écriture formelle d'un système d'équations et a fourni la solution exacte suivante :


1/ Le prix d'un ordinateur est de : 6500F
15 400 × 2 = 30 800
37 300 − 30 800 = 6500

[2] Cet énoncé est tiré du manuel suivant : *Nouvelle arithmétique des Ecoles primaires* par G.Ritt, inspecteur général de l'Instruction primaire – Paris - Librairie de L.Hachette et Cie - 1859 . Ce problème extrait du « § II : Problèmes résolus à l'aide des proportions – point 3 : Règles de fausse position

En désignant par x le prix d'un ordinateur et par y le prix d'une imprimante, la première étape de la résolution avec le système aurait été :

$$\begin{array}{ll} (1) & \\ (2) & \end{array} \begin{cases} 5x+2y=37300 \\ 3x+y=21900 \end{cases}$$

En retranchant membre à membre les deux équations on trouve :

$2x + y = 37\,300 - 21\,900$ (3)

C'est bien la première opération posée par l'élève. Dans son raisonnement cette étape représente la différence entre le premier achat et le second donc le prix de deux ordinateurs et d'une imprimante.
La résolution du système aurait continué ainsi :
- en multipliant les deux membres de l'équation (3) par 2 , $4x + 2y = 15\,400 \times 2 = 30\,800$ (4)
- en retranchant membre à membre (1) et (4) pour trouver x

Ce sont effectivement les opérations que fait l'élève avec les constantes des deuxièmes membres, ce qui correspond dans son raisonnement

- à chercher d'abord le prix de 4 ordinateurs et de 2 imprimantes,
- à faire la différence avec le premier achat qui comporte un ordinateur de plus et le même nombre d'imprimantes
- à trouver ainsi le prix d'un ordinateur.

Nous disons que l'élève a utilisé une méthode pré-algébrique, bien que la désignation des inconnues par des lettres manque. Dans le raisonnement de l'élève elles ont été « dites » en toutes lettres : prix d'un ordinateur, prix d'une imprimante Certains élèves peuvent désigner par exemple le prix d'un ordinateur par o et le prix d'une imprimante par i, lettres qu'ils utilisent comme des abréviations quand ils explicitent davantage par écrit leur raisonnement pour ne pas en perdre le fil. [3].

Remarque : Une recherche orientée vers l'arithmétique serait toute autre car elle consisterait à tester un prix d'ordinateur et un prix d'imprimante de façon à trouver par exemple le prix du deuxième achat et ensuite à corriger en fonction du renseignement fourni par l'autre achat.

4- Une différence essentielle entre l'arithmétique et l'algèbre. Exemple 3 : Les amis :

Problème : Plusieurs amis veulent offrir un disque à Paul pour son anniversaire. Si chacun verse 20F, il manque 12F. Si chacun verse 25F, il y a 18F de trop. Calculer le nombre d'amis de Paul et le prix du disque.

[3] Dans l'histoire de la pensée mathématique on peut se référer à Diophante qui désigne l'inconnue par un mot l' «arithme » (le nombre) « mais ne peut en représenter qu'une seule. Quand il y en a plusieurs, il parle de la première, de la deuxième, de la plus grande, de la plus petite.... Diophante a écrit son oeuvre sous la forme classique du discours continu. Mais il abrège un peu ce verbalisme en utilisant systématiquement certaines abréviations...et remplace quelques mots très fréquents par leurs lettres initiales ou finales » (extrait de l'ouvrage : une histoire des mathématiques –Routes et dédales. A.Dahan-Dalmico et J.Peiffer- Editions du Seuil)

Un élève de 4ème l'a résolu ainsi

nbre d'amis

Il faut que chacun verse 25^F pour qu'il y ~~est~~ ait assez. Il manque 12 si chacun verse 20^F et il y a 18^F de trop si chacun verse 25.

Si j'ajoute 12 et 18 j'obtiens la somme ajoutée à la somme si tout le monde paie 20^F.

il y a donc 30^F, il y a une difference de 5^F ds la part de chacun.

Le nombre d'amis est égale à $\frac{30}{5} = 6$

Il y a donc 6 amis.

•prix du disque

$(6 \times 25) - 18 = 150 - 18 = 132^F$

Le raisonnement de l'élève peut se modéliser ainsi :
Si x est le nombre d'amis, S' et S'' les sommes obtenues et S la somme exacte

$25\,x = S' = S + 18$

$20\,x = S'' = S - 12$ $\qquad x = \dfrac{S' - S''}{25 - 20} = \dfrac{30}{5} = 6$

Cette proportionnalité entre la différence des sommes et la différences des versements de chacun reste implicite pour l'élève, mais c'est bien la base de son calcul.
La solution avec une équation de premier degré conduit aux calculs suivants très proches aussi de ceux réalisés par l'élève à condition de procéder ainsi:
Soit x le nombre d'amis
$20x + 12 = 25x - 18$ soit $25x - 20x = 18 + 12$ soit $5x = 30$ soit $x = 6$

Mais si lors de la résolution de l'équation on passe par une étape comme par exemple
$25x - 20x + 12 = 18$ ou encore $20x - 25x = -12 - 18$, la corrélation avec le problème disparaît.

L'écriture algébrique devient formelle, sans rapport avec la réalité, ce qui est le fonctionnement normal de l'outil algébrique, et plus généralement de la modélisation mathématique d'un problème réel. Le travail mathématique dans le modèle se fait indépendamment de la réalité modélisée. On y revient seulement à la fin pour vérifier si on a obtenu une solution acceptable pour le problème réel, ce qui donne une indication sur l'adéquation plus ou moins bonne du modèle pour traduire la réalité.
Dans le cas très simple de la résolution d'un problème par une équation à une inconnue, ceci se traduit par un changement de statut de la lettre. Dans la première ligne x désigne un nombre inconnu qui a un sens dans le problème. Ensuite la lettre

x fonctionne comme une indéterminée et ne retrouve son statut d'inconnue qu'à la dernière ligne quand la solution est trouvée. Ce jeu avec le statut des lettres devra faire partie de l'apprentissage de l'outil des équations.
C'est une différence fondamentale avec une solution arithmétique pendant laquelle on ne perd jamais de vue le problème de départ.

Conclusion
Dans tous les cas , il faut repérer dans le problème la quantité inconnue et les deux programmes de calcul qui doivent donner le même résultat, qu'on les énonce avec des phrases pour une résolution arithmétique ou pré-algébrique ou bien qu'on les écrive avec des notations algébriques en vue d'une résolution par une équation.

II- Nos choix didactiques

Il y a deux objectifs à mener de front dans cette étude, apprendre aux élèves une technique pour résoudre les équations du premier degré et leur apprendre à utiliser les équations pour résoudre les problèmes de premier degré.

Choix 1 relatif aux problèmes

On introduit la technique de résolution des équations et la résolution de problèmes en même temps
On a vu que tous les élèves de collège doivent arriver à résoudre les problèmes de premier degré par n'importe quelle méthode, pour satisfaire à une évaluation minimale. Les méthodes arithmétiques seront donc acceptées.
Mais peut-on les laisser chercher des méthodes multiples pour chaque problème avec l'incertitude sur la possibilité d'arriver au résultat ?

La mise en équation et la résolution des problèmes du premier degré par l'algèbre est au programme des classes de 4$^{\text{ème}}$ et de 3$^{\text{ème}}$ donc nous devons l'enseigner à tous, sans exigence en revanche de réussite pour tous.
Pour cette raison nous avons décidé de ne pas enseigner la technique de résolution des équations en soi. Nous l'introduisons comme une méthode efficace de résolution des problèmes de premier degré.
L'entrée par les problèmes n'est pas un choix facile à assumer pour l'enseignant car nous avons vu que si le professeur pose un problème relativement classique et même assez difficile comme celui des CD ou celui du concert, les élèves vont chercher, voire trouver une méthode arithmétique, ce qui ne les motivera guère à apprendre la technique algébrique.

Nous avons donc choisi de commencer par un vrai problème différent de ceux cités plus haut, et qui permette d'introduire cette technique progressivement en même temps que les élèves vont avancer dans la mise en équation de problèmes.
Ainsi les élèves
- n'apprendront pas une technique sans en avoir compris l'utilité pour résoudre des problèmes.
- ne seront pas rebutés par une accumulation rapide de difficultés techniques.

Pour cela, nous graduons les difficultés, de sorte que la méthode algébrique soit pour eux de plus en plus sûre et plus simple. Ainsi même s'ils tentent une méthode arithmétique sans succès, ils savent que la méthode algébrique peut leur donner la solution et n'ont pas peur de s'y lancer.

Tous les problèmes ne sont pas aussi efficaces pour l'apprentissage des élèves :

<u>Problème 1</u>*: J'ai choisi un nombre. Je le retranche de 6, j'ajoute son tiers au résultat puis encore son quart au résultat. Je trouve 5,5. Trouver le nombre choisi.*

<u>Problème 2</u> *: Deux élèves Alice et Bertrand ont chacun une calculette. Ils affichent le même nombre sur leur calculette. Alice multiplie le nombre affiché par 6 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 10 au résultat obtenu 2. Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leur calculette affiche le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?*

a- Les problèmes 1 et 2 sont un meilleur choix pour démarrer les équations que le problème du concert par exemple.

Dans les problèmes 1 et 2 il n'y a pas deux inconnues mais une seule, ce qui est plus facile dans un premier temps pour les élèves qui vont tenter la mise en équation. Les deux membres de l'équation qui seront les deux quantités égales sont faciles à repérer.
Ces problèmes peuvent se résoudre par l'arithmétique :
<u>Problème 1 :</u> Un choix judicieux des fausses positions permet des calculs faciles
Calcul pour la valeur 0 $6–0 + 0 + 0 = 6$
Calcul pour la valeur 12 $6–12+4 + 3 = 1$

Je dois trouver 5,5. Pour 0 le résultat trouvé est trop grand. Si j'augmente la valeur de 12, le résultat diminue de 5. Or il doit diminuer de 0,5 donc 10 fois moins. Le nombre doit donc augmenter 10 fois moins. C'est 12/10 = 1,2
Il est peu probable qu'un élève qui commence par faire des essais (1,2.. etc...) persévère à cause des calculs avec des fractions. Or l'idée de proportionnalité arrive après des essais successifs donnant des résultats de préférence entiers.
L'élève qui utilise la méthode algébrique a plus de chances d'aboutir
Problème 2 :
Pour 0 : On trouve 7 pour Alice et 10 pour Bertrand. Différence de 3 dans un sens
Pour 1 : On trouve 13 pour Alice et 12 pour Bertrand Différence de 1 dans l'autre sens
Pour le nombre cherché qui est donc entre 0 et 1 Différence de 0
Entre 0 et 1 la différence varie de 4
Entre 0 et ¼ la différence variera de 4/4 soit de 1
On veut que la différence entre 0 et le nombre cherché varie de 3, donc le nombre cherché est 3 fois ¼ soit ¾

Pour ce problème 2 et comme dans le problème 1, les élèves vont avoir du mal à trouver seuls la solution , avec seulement l'idée de faire des essais , d'autant plus que la solution est, dans les deux cas, un nombre non entier, et pour le problème 2 cette solution est en plus entre 0 et 1. On pourra constater dans le déroulement en classe décrit dans la suite de ce texte, que les stratégies des élèves varient selon que la solution est un entier simple (3 par exemple) ou un décimal.

b- Les problèmes 1 et 2 sont un meilleur choix pour la résolution des équations en 4ème qu'un problème du type :
Je choisis un nombre, je le double, je retranche 7, je trouve 5. Quel est ce nombre ?

Le problème proposé a les mêmes avantages que les précédents mais un gros inconvénient car sa résolution ne nécessite pas une équation, pas plus qu'un raisonnement arithmétique par proportionnalité. Il suffit de prendre les opérateurs réciproques. Il est dans la continuité des petites équations (voire égalités à trou) résolues en 6ème et 5ème par la définition de la différence, $x + a = b$ puis par la définition du quotient : $ax = b$
Il suffit de composer les deux fonctions réciproques dans l'ordre contraire.

Il serait dommage de laisser les élèves chercher une solution arithmétique parfois difficile comme nous venons de le voir (bien qu'elle soit toujours possible) en se privant de la force de l'algèbre. La méthode algébrique n'est pas plus difficile à apprendre que la méthode arithmétique. Néanmoins il ne faut pas déprécier les recherches des élèves qui vont dans ce sens.

Choix 2 relatif à la technique de résolution

Jusqu'en fin de 5ème, pour résoudre des équations du type $ax + b = c$ nous avons utilisé les définitions de la différence et du quotient.
Ce n'est plus possible pour des équations de la forme $ax + b = cx + d$
Pour résoudre cette équation il y a deux techniques :

Avec les propriétés de l'égalité
Retrancher cx et b aux deux membres ce qui donne $ax - cx = d - b$ soit $a'x = b'$
que l'on résout en divisant par a' ou en raisonnant sur le quotient

Avec la différence nulle
$$ax + b = cx + d \Leftrightarrow ax + b - (cx + d) = 0 \Leftrightarrow a'x + b' = 0$$

Nous avons décidé d'enseigner la technique de résolution des équations en utilisant les propriétés de l'égalité vis à vis de l'addition et de la multiplication et non la technique de la différence nulle.
En effet ces propriétés de l'égalité sont nécessaires dans la résolution des systèmes de premier degré par la méthode de combinaisons linéaires des équations. En 3ème ou en seconde nous n'excluons pas l'enseignement de la technique par différence nulle qui est employée dès que le degré de l'équation est supérieur à 1. Pour les inégalités et inéquations les deux techniques sont utiles dès la 3ème .

Choix 3 relatif à l'utilisation de la balance

Nous utilisons l'analogie entre une égalité et l'équilibre d'une balance à plateaux que l'on retrouve dans l'histoire des mathématiques à deux moments.

- Pour la méthode de fausse position.
Nous avons vu qu'elle consiste à repérer les écarts entre deux quantités qui ne sont pas égales pour les valeurs choisies mais qui devraient l'être (« méthode des plateaux » Ibn al Banna- 1256-1321- Marrakech).

- Pour la résolution des équations
Ainsi Al Kwarizmi (780-850-Bagdad) s'attaque aux équations de degré 2 en classant ces équations en six types.
Par exemple $ax^2 + c = bx$ est un de ces types qu'il sait résoudre. Pour cela il doit changer les termes de membres dans l'équation initiale par exemple quand il part de $2x^2 – 13x + 8 = x^2 + 3$.
Il faut garder à l'esprit qu'il ne s'agit pas d'une équation au sens actuel, l'expression de ses « membres » se fait par des phrases, et il n'y a pas de signe =.
Al Kwarizmi utilise alors la métaphore de l'équilibre de la balance pour transformer cette équation.[4].

Pour nos élèves la balance peut être utile
- pour la résolution arithmétique des problèmes quand ils optent pour une méthode avec des essais
- pour la mise en équation d'un problème

Dans les deux cas il faut comprendre que deux quantités doivent être égales et trouver comment les calculer en fonction d'une inconnue.
- enfin pour la technique de résolution des équations avec la méthode des propriétés de l'égalité.

Nous avons décidé de faire conjecturer par les élèves de 4ème les propriétés de l'égalité pour résoudre un vrai problème mis en scène avec une balance. Ainsi la balance n'est pas une simple illustration ou une « métaphore ». Elle est un élément du « milieu » qui permet de transmettre le problème aux élèves.

Nous sommes conscients des reproches qui sont faits à l'encontre de la balance utilisée comme une image.

1- Les élèves ne seraient plus familiarisés avec l'utilisation de ce type de balance.
En fait depuis leur jeune âge ils utilisent, dans les jardins publics, la balançoire où un enfant est assis à chaque extrémité d'une planche. Ils ont vu la balance à plateaux à l'école primaire puis en physique. Les chimistes « équilibrent » leurs « équations » , sans compter avec le symbole de la justice expliqué en instruction civique....

2- Cette représentation atteint rapidement ses limites avec l'utilisation des nombres négatifs.
Certes, mais les élèves peuvent ainsi utiliser les propriétés de l'égalité avec les positifs et démontrer ensuite qu'elles sont vraies pour tous les nombres y compris les négatifs. Il s'agit de la question didactique des représentations « concrètes » en général. En mathématique, une représentation mentale d'un concept n'est valable que dans un domaine limité. Il faut en changer selon les problèmes, et parfois une représentation mentale peut faire obstacle à un savoir nouveau. Il est raisonnable d'admettre qu'il est plus facile pour un élève d'abandonner une représentation mentale qu'il a construite lui-même au cours d'un apprentissage que d'abandonner une représentation mentale qui lui a été fournie toute construite par le professeur. En conséquence le but de l'enseignement devrait davantage permettre à l'élève de construire ses représentations et les faire évoluer, plutôt que lui fournir des représentations toutes faites. Nous partageons cette position sans toutefois en faire un dogme. Nous introduisons d'autres représentations de l'égalité différentes de la balance

III- Déroulement en classe

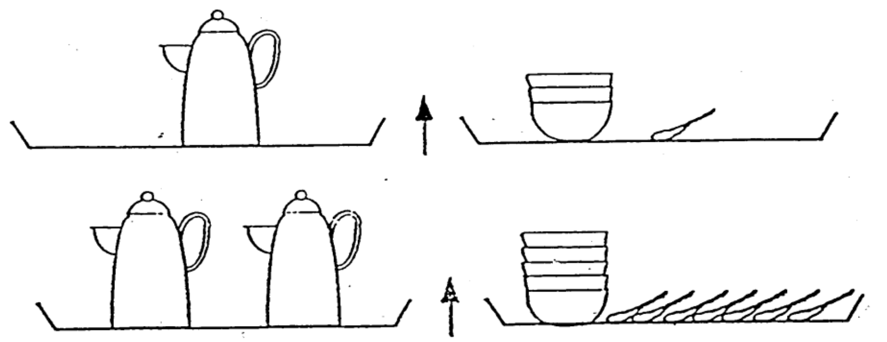
Situation 1 : Les propriétés de l'égalité
L'objectif de cette situation 1 en trois étapes est de conjecturer les propriétés de l'égalité vis à vis des opérations.
Dans les trois étapes les élèves utilisent en acte toutes les propriétés de l'égalité vis à vis de l'addition et de la multiplication, avec des nombres entiers positifs. Ils les formulent comme des conjectures pour tous les nombres.

---

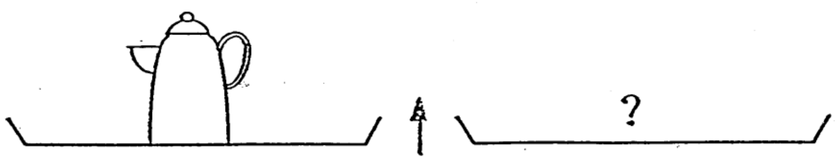
[4] Elle devient: $x^2 + 5 = 13x$ par deux rééquilibrages qui sont :
- al-gàbr ou restauration :si le premier membre $2x^2 – 13x + 8$ doit se transformer $2x^2 +8$, il faut restaurer l'équilibre en rajoutant $13x$ au second
- muqàbalah ou confrontation qui consiste à enlever 3 des deux côtés.
La distinction vient du fait qu'enlever $–13x$ pose des difficultés de représentation concrète car Al Kwarizmi ne dispose pas des nombres négatifs.

Etape 1 : Conjecture
C'est parce que ce problème pourrait se traduire par un système de deux équations à trois inconnues que les propriétés de l'égalité vont fonctionner utilement[5].

Sur les plateaux de ces deux balances il y a des pots, des bols et des petites cuillères. Ces balances sont en équilibre.



Combien faut-il mettre de petites cuillères sur le plateau de droite pour que la balance soit en équilibre ?



Rédiger la façon dont vous avez raisonné.

Stratégies des élèves :
Lors de cette première activité, les élèves trouvent principalement deux méthodes :
Première méthode : Ils déduisent de la première balance que deux pots ont la même masse que six bols et deux cuillères, ils concluent alors grâce à la deuxième balance que six bols et deux cuillères ont la même masse que cinq bols et sept cuillères et donc qu'un bol a la même masse que cinq cuillères.

Deuxième méthode : Ils déduisent par différence entre les deux équilibres qu'un pot a la même masse que deux bols et six cuillères. Deux bols et six cuillères ont alors la même masse que trois bols et une cuillère et donc un bol a la même masse que cinq cuillères.

Une fois arrivés à ce résultat, les élèves n'ont plus beaucoup de difficultés pour donner la réponse : un pot a la même masse que seize cuillères.

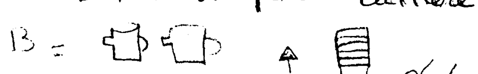
Quelques élèves affectent au hasard des masses aux objets mais le système essai -erreur qu'ils mettent ensuite en place ne leur permet pas d'aboutir à la solution.

La rédaction de la justification n'est pas aisée. Certains élèves font des phrases comme nous venons de le faire, d'autres font des dessins, d'autres encore utilisent des égalités et écrivent :
1 pot = 3 bols + 1 cuillère pour décrire le premier équilibre.
Des élèves écrivent même $1\ p = 3\ b + 1\ c$. On pourrait alors conclure que ceux là ont intégré l'usage de la lettre dans la mise en équation. Cependant, pour la plupart d'entre eux, la lettre « *p* » ne désigne pas la masse du pot mais simplement l'abréviation du mot « pot » et donc $3b$ est loin de signifier pour eux $3 \times b$ soit « trois fois la masse d'un bol » !

Voici quelques productions d'élèves qui appliquent la première méthode:
Production 1 :


= 5 x 3 = 15 + 1
16

5 cullères = 1 bol car pour passer du schéma A au B, on pourait multiplier par deux le nombre de bol et de petite cuillère :



[5] Ce problème

Cet élève annonce d'abord son résultat (avec une erreur de dessin) : un pot égale 16 cuillères en expliquant 16 par le calcul 5 x 3 + 1. Il justifie ensuite pourquoi un bol égale 5 cuillères en utilisant la première méthode et en raisonnant sur les écarts. Il rédige sa solution en utilisant uniquement des dessins.

Production 2 :
Ce deuxième élève utilise des opérations et des égalités pour rédiger sa solution. Il utilise lui aussi la première méthode pour débuter puis il termine en exprimant la valeur de 2 pots en cuillères et il divise par deux.

1 pot = 3 bols + 1 cuillère

2 pots = 6 bols + 2 cuillères = 5 bols + 7 cuillères donc 1 bol = 5 cuillère

donc 2 pots = 5 bols + 7 cuillères = (5x5) + 7 = 25 + 7 = 32

2 pots = 32 cuillères = donc 1 pot = 16 cuillères.

Au cours de la mise en commun, on peut décider de la meilleure présentation et l'usage des lettres obtient l'adhésion de tous !

Voici un exemple de rédaction de la solution, utilisant cette fois la deuxième méthode, à laquelle la mise en commun peut aboutir :

On désigne par p la masse d'un pot, par b, celle d'un bol et par c celle d'une cuillère.

$1p = 3b + 1c$

$2p = 6b + 2c$ on a doublé la masse de chaque plateau

or $2p = 5b + 7c$ donc $5b + 7c = 6b + 2c$

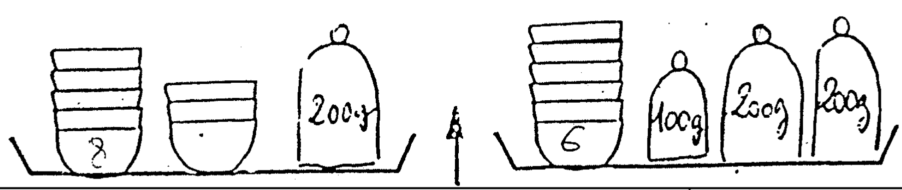
$7c = 1b + 2c$ on a enlevé 5b à chaque plateau

$5\,c = 1b$ on a enlevé 2c à chaque plateau

donc $1p = 3 \times 5c + 1c = 16c$. 1 pot est donc en équilibre avec 16 cuillères.

Etape 2 : Vers la formalisation

Cette balance est en équilibre. Quelle est la masse d'un bol ?



Le nombre de bols est marqué par le professeur pour éviter les erreurs de comptage.

Cette étape permet de retravailler les propriétés de l'égalité déjà vues à l'étape 1, elle permet de poursuivre la formalisation jusqu'à arriver à la technique des équations.
Les élèves, pour résoudre ce problème, enlèvent 6 bols et 200g sur chaque plateau. Ils arrivent alors au fait que deux bols et 300g ont la même masse.
Nous avons vu que les élèves avaient tendance à confondre la lettre *b* qui désigne la masse d'un bol avec l'objet bol. Quand les plateaux de la balance portent des objets mais aussi des masses marquées, si *b* est la masse d'un bol les élèves seront amenés à écrire par exemple sur un des plateaux $8b + 200$ (200 grammes). Une telle écriture souligne que *b* désigne un nombre et non pas un bol. Néanmoins nous verrons plus loin que les élèves qui ont bien compris que *b* est un nombre écriront plutôt $8 \times b + 200$, même s'ils savent en 4ème qu'on peut supprimer le signe $\times$.

Voici quelques productions d'élèves.
Production 1 :

8b + 200g   6b + 100g + 200g + 200g
1er balance = 8b + 200g
2ème balance = 6b + 100g + 200g + 200g
-200g (8b + 200g = 6b + 100g + 200g + 200g) -200g
8b = 6b + 100g + 200g
-6b (2b = 100g + 200g) -6b
÷2 (1b = 150g) ÷2

Production 2 :

Sa On soustrait 8 Bol par 6 sa fait 2 Bol. Comme Dans la 2ème Balance il y a 300g en trop. Ses 300g font 2 Bol alors je divise 300g par 2. Sa fait 150g.
1 Bol est fait 150g

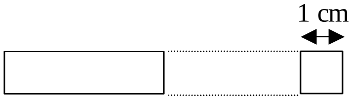
Ainsi, certains élèves ont bien amorcé le travail sur les équations (production 1) et vont encore le parfaire à l'étape suivante. D'autres, cependant, ne sont pas passés à la formalisation (production 2).

Pour consolider l'utilisation des propriétés des égalités, nous proposons l'étape 3 où les élèves sont amenés à utiliser une autre représentation mentale que celle de la balance. La grandeur en jeu sera la longueur et non plus la masse. L'égalité se vérifie par juxtaposition des deux bandes et non par l'équilibre des plateaux d'une balance. Cela donne une autre image mentale de l'égalité aux élèves.

Etape 3 : Des égalités de longueur

On possède un stock de rectangles identiques et de carrés identiques qui ont été découpés dans une baguette de 1 cm de largeur. On constate que si l'on met bout à bout 2 rectangles et 8 carrés cela fait la même longueur que si l'on met 7 rectangles et 2 carrés. Quelle est la longueur d'un rectangle ?

1 cm

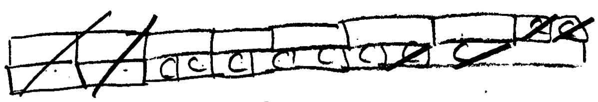


Stratégies des élèves :

On voit apparaître dans la classe plusieurs méthodes, certains écrivent une équation mais rares sont ceux qui vont au bout de la résolution. Parmi ceux-là, il y en a qui utilisent même deux inconnues pour désigner le carré et le rectangle (voir production n°2) : certains aboutissent à : 5 rectangles = 6 carrés. Il y a là encore confusion entre la longueur du rectangle et l'abréviation du mot rectangle.

D'autres font des schémas, et ils sont confrontés au problème de l'égalité des longueurs des deux alignements car ils ont pris une mesure quelconque pour le côté du rectangle. Ils prennent alors conscience qu'une seule mesure doit être solution.
Ils mettent alors en place plusieurs stratégies :
- soit ils raisonnent avec deux longueurs différentes des alignements en faisant comme si elles étaient égales,
- soit ils « s'arrangent » pour avoir des alignements de même longueur (voir production n°1).
D'autres encore utilisent les propriétés de l'égalité en faisant des phrases (voir production n°3).

Production 1 :



C = carré

5 rectangle = 6 carrée

6 : 5 = 1,2

Une rectangle fait 1,2 cm de long.

Cet élève rédige sa solution en faisant un dessin. Il supprime deux rectangles et deux carrés à chaque ligne. Le dessin est difficile à faire car pour une longueur de rectangle quelconque, les deux assemblages n'ont pas la même longueur. C'est pourquoi il a étiré le dernier « carré ». Cette difficulté va conduire les élèves à se passer du dessin pour aller vers plus de formalisation mathématique.

Production 2 :

carré = x
rectangle : y

$2y + 8x = 7y + 2x$

$6x = 5y$

$6 \div 5 = 1,2$

$1,2 \times 1 = 1,2$ cm

La longueur du rectangle est de 1,2 cm

On enlève deux carré partout et deux rectangles partout donc 6 carrés est égal à 5 rectangles.
$6 \div 5 = 1,2$; $1,2 \times 1 = 1,2$ cm.
donc la longueur du rectangle est de 1,2 cm

Cet élève utilise des lettres pour rédiger sa solution, il a même choisi *x* et *y* et non *c* et *r* , initiales des mots « carré » et » rectangle ». Dans la deuxième colonne, il explique son calcul par une phrase. Il a bien utilisé les propriétés de l'égalité.

Production 3 :

si l'on enlève 2 rectangles et 2 carrés il reste
5 rectangles et 6 carrés

$6 \div 1.2 = 5$ et $5 \times 1.2 = 6 \div 5 = 1.2$

Donc la largeur d'un rectangle est de 1.2 cm

Cet élève utilise uniquement des phrases pour rédiger sa solution.

Mise en commun et bilan

Lors de la mise en commun, la classe se met d'accord sur la présentation de la solution, en appelant par exemple x la longueur du rectangle et en écrivant l'équation. Le professeur indique la résolution classique, en faisant le lien avec la production des élèves.

A la fin de cette étape, le professeur incite les élèves à formuler les propriétés de l'égalité.
Quand on a une égalité, on obtient une autre égalité
- en ajoutant (ou en soustrayant) le même nombre aux deux membres de l'égalité.
- en multipliant (ou en divisant) chaque membre par un même nombre (non nul).

Le professeur peut les justifier de la façon suivante pour les institutionnaliser.
Comme $a = b$, si on ajoute c à a , cela donne : $a + c$. Il suffit de substituer a à b dans cette somme et on obtient $a + c = b + c$. On peut revenir en arrière en ajoutant $(-c)$ ou en enlevant c .
On peut procéder de même pour la multiplication dont on pourrait se passer car on se ramène à une équation du type $ax = b$ en utilisant seulement la transformation des membres par addition, puis x se trouve en utilisant la définition du quotient.

Jusque là les élèves ont soustrait un nombre positif aux deux membres, ou ils ont multiplié ou divisé par un nombre positif. Maintenant il faut imaginer que les lettres a b, c peuvent désigner n'importe quel nombre, voire une expression algébrique.

La démonstration proposée par les manuels est la suivante : $a = b$ donc $a - b = 0$
Calculons $(a + c) - (b + c) = a - b = 0$ donc $a + c = b + c$.
Nous préférons utiliser la substitution qui nous semble intuitivement plus immédiate.

Situation 2 : Trois problèmes où le passage à l'algèbre est relativement simple[6].

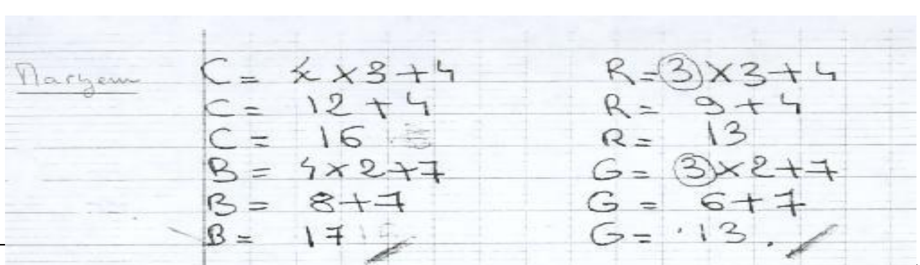
<u>Problème 1</u> : Deux élèves Alice et Bertrand ont chacun une calculette. Ils affichent le même nombre sur leur calculette. Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 4 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé ils s'aperçoivent que leurs calculettes affichent le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

<u>Problème 2</u> : Deux élèves Alice et Bertrand ont chacun une calculette. Ils affichent le même nombre sur leur calculette. Alice multiplie le nombre affiché par 6 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 10 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé ils s'aperçoivent que leurs calculettes affichent le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Ces problèmes nous ont parus intéressants à double titre:
- Ils permettent d'éviter autant que faire se peut le recours à l'arithmétique. Le contexte très abstrait, diffère de celui du problème suivant: « le prix de 6 sucettes et de 7 bonbons est le même que celui de 2 sucettes et 10 bonbons ; sachant qu'un bonbon coûte 1€, quel est le prix d'une sucette ? ». Dans ce cas, l'équation n'est pas la méthode la plus efficace et une grande majorité d'élèves résout le problème, comme il l'aurait fait à l'école primaire, en disant que 4 sucettes coûtent le même prix que 3 bonbons et donc qu'une sucette coûte 0,75€.
-Le contexte très abstrait entraîne une mise en équation plus facile que dans un problème dit « concret ».

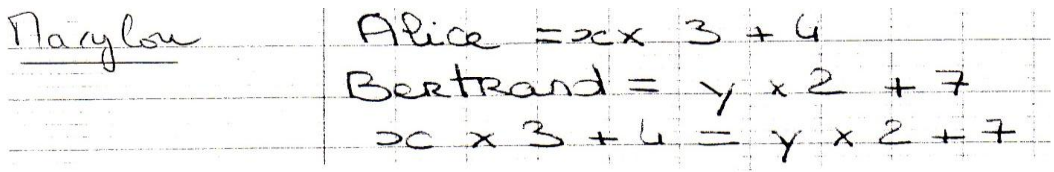
Le professeur commence avec le problème 1 dont la solution est 3. Certains élèves trouvent rapidement la solution en faisant des essais, il leur donne alors aussitôt le problème 2 où la solution est 0,75, plus difficile à trouver avec des essais car elle est décimale et de plus inférieure à 1.

Voici la production d'une élève qui a fait des essais :



[6] Ces pro[illegible]P et repris dans les commentaires de programmes « Du numérique au littéral »

Quand les élèves font des essais, la lettre a pour eux le statut de variable. Ce statut de variable leur fait oublier le statut d'inconnue, d'autant plus que les deux membres de l'équation sont des programmes de calcul abstraits.
Par exemple cette élève désigne la variable de chaque programme de calcul par deux lettres différentes et s'arrête en oubliant qu'il s'agit de la même inconnue.


Marylou

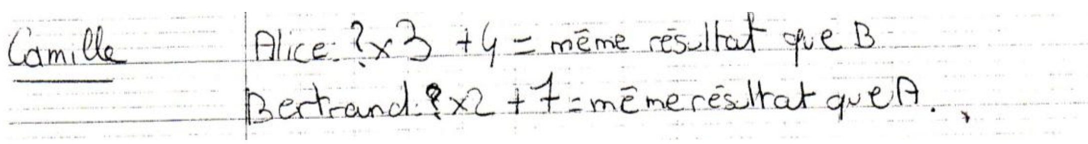
Alice = $x \times 3 + 4$

Bertrand = $y \times 2 + 7$

$x \times 3 + 4 = y \times 2 + 7$

Nous avons trouvé des productions du genre : Alice $3 \times 5 + 4 = 19$ et Bertrand $2 \times 6 + 7 = 19$
Ces élèves ont la même difficulté que Marylou, ils prennent deux nombres différents au départ et pensent avoir résolu le problème car ils ont trouvé le même résultat. Ils disent qu'il y a égalité, mais ne peuvent pas conclure.
Envisager la lettre comme une variable devient un obstacle à la compréhension de ce qu'est une équation.

Il y a d'autres difficultés aussi bien pour le problème 1 que pour le 2, qui viennent de la transitivité de l'égalité.

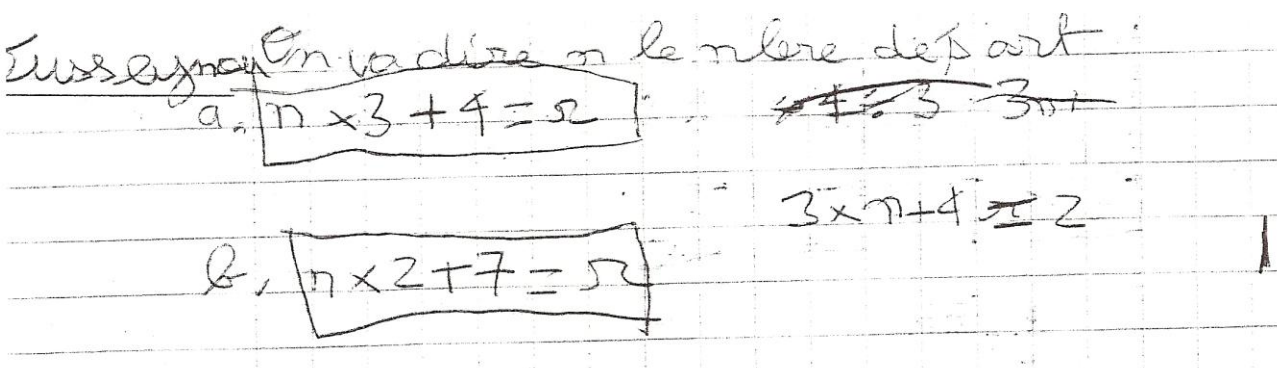

Camille

Alice: ?×3 + 4 = même résultat que B

Bertrand: ?×2 + 7 = même résultat que A.

Cet élève a bien désigné l'inconnue par un point d'interrogation, mais il a oublié qu'il peut la trouver en écrivant une égalité. Rappeler la balance ou les bandes de même longueur lui sera utile. De plus avec la notation « ? », on ne sait pas si l'élève a bien compris qu'il s'agit du même nombre dans les deux calculs.

D'autres désignent le résultat commun d'Alice et Bertrand par une lettre et ils n'arrivent pas à écrire l'équation, car pour eux il y a deux inconnues, le nombre choisi et le résultat du calcul.


On va dire n le nbre départ

a. $\boxed{n \times 3 + 4 = \Omega}$

$3 \times n + 4 = 2$

b. $\boxed{n \times 2 + 7 = \Omega}$

D'autres écrivent :
Alice : $x \times 6 + 7$ Bertrand : $x \times 2 + 10$ et $x \times 6 + 7 = x \times 2 + 10$
Ils ont écrit l'égalité mais ne savent pas continuer en utilisant ses propriétés car ils ne reconnaissent pas la situation rencontrée dans les problèmes précédents de masses ou de longueurs égales.

Ils confondaient jusque là, les objets, les grandeurs et les mesures associées à cause de l'écriture $6x$ qui peut se lire comme une multiplication externe (6 objets aussi bien que 6 fois une mesure). Ceci a facilité implicitement la construction du sens dans leur travail. Ici, la mise en équation étant facile, ils écrivent $x \times 6$ qui ne peut être qu'une multiplication interne car ici x ne peut être autre chose qu'un nombre.

La rencontre à ce moment de la progression avec ces problèmes abstraits est donc indispensable pour franchir cet obstacle que les élèves rencontrent toujours dans les mises en équation pour résoudre des problèmes, quel que soit le mode d'introduction des équations adopté par l'enseignant.

Certains élèves, après avoir écrit l'équation, raisonnent sur les écarts pour la résoudre.
L'écart $6x - 2x$ vaut $4x$ et l'écart $10 - 7$ vaut 3. Ils en déduisent facilement que : $4x = 3$

Ceux qui raisonnent ainsi sur les écarts vont plus vite que les autres, ils sont donc persuadés d'avoir trouvé une méthode plus efficace. Cela les empêche de comprendre la méthode générale si on ne remet pas leur méthode en cause avec le problème suivant :

Problème 3 : Alice et Bertrand ont chacun une calculette. Ils affichent le même nombre sur leur calculette. Alice multiplie le nombre affiché par 5 puis ajoute 4 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 10 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé ils s'aperçoivent que leurs calculettes affichent le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

La solution de ce problème est négative. Les élèves sont conduits à écrire $5x + 4 = 10x + 7$
Celui qui raisonne avec les écarts pour résoudre cette équation va trouver $5x = 3$
d'où une solution positive qui se révèlera fausse au moment de la vérification. D'autres pensent que c'est impossible car $10x > 5x$ et $7 > 4$ donc $10x + 7$ est forcément supérieur à $5x + 4$. Ils ne pensent pas aux nombres négatifs.

A la suite de cet enchaînement de situations, le professeur pourra mettre en place la méthode de résolution des problèmes à l'aide d'une mise en équation.

Situation 3 : Suite ordonnée de problèmes à résoudre en classe

Chaque exercice permet d'aborder des difficultés de plus en plus grandes pour la mise en équation, et/ ou une difficulté différente au niveau des calculs algébriques nécessaires pour résoudre l'équation
Parallèlement à ces problèmes traités en classe, le professeur fait résoudre des exercices techniques en rapport avec les difficultés rencontrées dans les problèmes.

Toutes les solutions arithmétiques de ces problèmes proposées par les élèves sont acceptées. Ils en trouvent toujours quelques unes assez astucieuses. Mais à la fin de cette progression, ils ont compris que le recours à l'algèbre leur permet de trouver toujours la solution, et ils n'hésitent plus à l'utiliser.

Problème 1 : Un nombre est tel que son double augmenté de 16 est égal à son triple diminué de 21. Quel est ce nombre ?

Pour la première fois ici, il est nécessaire d'ajouter le même nombre aux deux membres de l'égalité. La confrontation des différentes méthodes est l'occasion de rappeler que soustraire – 21 c'est ajouter 21.

Problème 2 : Je pense à un nombre, j'enlève son double de 20, je trouve le même résultat que si j'ajoute 15 à son triple. Quel est ce nombre ?

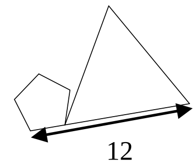
Dans ce problème, l'un des coefficients de x est négatif, il va falloir ajouter $2x$ aux deux membres de l'égalité. C'est plus difficile que d'ajouter un nombre connu comme au problème précédent.

Problème 3 : Je pense à un nombre, je lui ajoute 20, puis je double le résultat obtenu. Curieusement, je trouve 10 fois le nombre de départ. A quel nombre ai-je pensé au départ ?

Il faut d'abord utiliser la distributivité, pour réduire l'expression, avant de résoudre l'équation.
La mise ne équation donne $2(x + 20) = 10x$

Problème 4 : Calculer le côté x du pentagone régulier pour que son périmètre soit égal à celui du triangle équilatéral.

La mise en équation donne $5x = 3(12 - x)$
Cet exercice nécessite l'utilisation de la distributivité
de la multiplication par rapport à la soustraction.



Problème 5 : Un père a 42 ans. Il a deux enfants de 11, 9 et 4 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses trois enfants ?

La mise en équation devient difficile car il ne s'agit plus de programmes de calcul. Les élèves doivent se représenter la situation en imaginant les années qui passent.
Le choix de la variable "nombre d'enfants" est important. Avec deux enfants seulement (par exemple 11 et 9 ans) la mise en équation présente exactement la même difficulté qu'avec trois enfants. Elle conduit à :
$42 + x = 11 + x + 9 + x$ Mais, dans ce cas, pas mal d'élèves évitent l'algèbre en raisonnant sur l'écart entre l'âge du père et la somme des âges des deux enfants qui diminue d'une année par an. Ils suivent l'évolution de la différence à mesure que la variable nombre d'années augmente . Cela se fait mentalement, ce qui donne la solution par simple différence sans équation.
$42 - (11 + 9) = 20$ et la réponse est 20 ans.
C'est un peu plus difficile avec trois enfants car l'écart diminue de 2 ans chaque année, donc il faut diviser par 2 la différence, d'où notre choix de trois d'enfants.

Après ce problème 5, un élève nous a demandé s'il était possible qu'un tel problème « concret » ait des solutions négatives. Le problème 6 est la réponse à sa question.

Problème 6 : Un père a 38 ans. Ses quatre enfants ont 18, 12, 8 et 6 ans. Est-il possible que l'âge du père soit égal à la somme des âges de ses quatre enfants ?

La mise en équation est plus difficile car la question ne porte pas sur l'inconnue à désigner par x
La solution est -2 : il y a deux ans l'âge du père était la somme des âges de ses quatre enfants.

Ces deux problèmes 5 et 6 sur les âges sont du même type que ceux où on cherche l'instant de rencontre de deux mobiles (ici l'un serait l'âge du père et l'autre la somme des âges des deux enfants). On observe les mobiles à l'instant 0, au moment où ils ont entre eux une distance d, (ce serait ici la différence des âges), l'un allant à une vitesse v et l'autre à une vitesse v'.
Il faut trouver si les mobiles se rencontreront ou se sont rencontrés.
Pour les mobiles on peut avoir des vitesses de signe contraire, ce qui ne peut se produire pour les âges. Dans les problèmes de mobiles, certains élève trouvent une solution qui évite l'algèbre en divisant la distance d qui les sépare par la différence des vitesses. On a vu cette méthode pour les âges dans le problème 5. Cette situation fournit toute la discussion du nombre de solution de l'équation $ax = b$ selon les valeurs des paramètres qui sont a (ici $v - v'$) et b (ici d)

Problème 7 : Un nombre est tel que son tiers augmenté de son cinquième est égal à 110. Quel est ce nombre ?

La résolution nécessite ici un travail sur la somme de deux écritures fractionnaires.

Problème 8 : On a trois sacs de bonbons. Le premier contient 30 bonbons de plus que le troisième, le deuxième contient 6 bonbons de moins que le troisième.
En tout il y a 150 bonbons. Quel est le nombre de bonbons dans chaque sac ?

Même si le problème comporte trois inconnues il n'est pas difficile d'écrire deux inconnues en fonction de la troisième.

Si on pose ce même problème en début d'apprentissage, les élèves proposent des solutions qui n'utilisent pas d'équations, c'est rarement le cas lorsqu'il vient à la fin d'une série de problèmes comme celle-ci.

Quelles sont ces résolutions non algébriques ? Ils peuvent utiliser la méthode des essais :
Méthode 1 : en conservant la contrainte de la somme, ils divisent 150 par 3 et trouvent 50 bonbons pour chaque sac. Ensuite, ils ajustent pour satisfaire les autres contraintes. Cette méthode, très rapide quand il n'y a que deux sacs, devient ardue avec trois sacs.
Méthode 2 : en prenant un nombre arbitraire pour le troisième sac, 40 par exemple, ils conservent les deux autres contraintes : 40 + 30 ; 40 + 6 ; 40. La somme est 144 soit 6 bonbons de moins que 150, on ajoute deux bonbons à chaque sac.

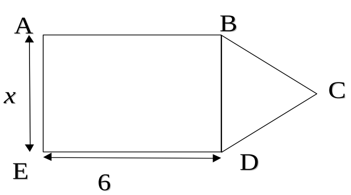
Ceux qui ont divisé par 3 pour trouver 50 continuent parfois avec la méthode 2. Le calcul de 50 leur a servi à trouver un ordre de grandeur pour la valeur de l'essai.

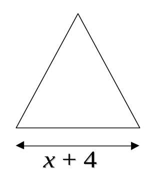
Cette méthode 2 signifie que l'élève est prêt à écrire deux inconnues en fonction de la troisième. Cela peut le conduire à une résolution facile, sans équation, avec une méthode pré-algébrique cette fois et non arithmétique. Il suffit de représenter le contenu des sacs par trois segments par exemple. La première longueur a 30 unités de plus que la troisième et il en manque 6 à la seconde pour avoir la troisième. Le calcul 150 –30 + 6 donne trois fois la contenance du troisième sac.

Lors de la mise en commun, en traduisant dans le langage de l'algèbre cette solution fournie par des élèves, ils comprennent qu'il s'agit sur le fond de la « même solution » , même si elle est très différente sur la forme.

Situation 4 : Différents types d'égalités

Etape 1 : Identité
ABDE est un rectangle , BDC est un triangle équilatéral. TUP est un triangle équilatéral.
Pour quelle(s) valeur(s) de x ces deux figures ont-elles le même périmètre ?





Les élèves, pour la plupart, écrivent sans difficulté l'équation mais quand ils obtiennent des égalités du type
$3x+12 = 3x+12$ ou $0\,x = 0$, ils ne savent plus que répondre ….
Et ce qu'ils disent le plus souvent est « ce n'est possible ! ».
La mise en commun permet de distinguer le calcul des deux périmètres avant de se lancer dans l'écriture d'une équation, on obtient alors $3x + 12$ pour les deux et on conclut que les deux figures ont le même périmètre quelle que soit la valeur de x.

<u>Bilan :</u> Cette égalité est toujours vraie pour n'importe quelle valeur de x , cela s'appelle une identité.

Etape 2 : Plusieurs solutions
On donne l'égalité $x^2 – 2x = x – 2$ Les nombres 1 et 2 vérifient-ils cette égalité ?
Quelle conjecture peut-on faire ? Est-elle exacte ?

Comme l'égalité est vraie pour 1 et 2, la majorité des élèves a vite fait de dire que c'est une identité. Heureusement quelques sceptiques testent avec d'autres valeurs et le nombre 0 est une des premières valeurs à être donnée pour démentir la conjecture.
C'est l'occasion de distinguer cette égalité de celle qui a été vue à l'étape 1, de montrer en quoi elles sont différentes bien que le même signe « = » soit employé et de mettre l'accent sur la notion de contre-exemple.

Bilan : Cette égalité est vraie pour $x = 1$, $x = 2$ mais elle n'est pas vraie pour $x = 0$, $x = 3$ etc …C'est une équation.

Etape 3 : Aucune solution
Deux élèves Alice et Bertrand ont chacun une calculette . Ils affichent chacun un nombre sur leur calculette. Alice ajoute 5 au nombre affiché puis multiplie par 4 le résultat obtenu. Bertrand ajoute 7 au double du nombre affiché puis multiplie le résultat obtenu par 2.. Quand ils ont terminé ils s'aperçoivent que leurs calculettes affichent le même résultat. Ils pensent qu'ils ont peut-être affiché le même nombre au départ.
1- Si c'est vrai , peut-on trouver de quel nombre il s'agit ?
2- Ils ont trouvé 16 tous les deux. Pouvez-vous trouver ce qu'ils ont affiché ?

Les élèves écrivent l'équation et restent dubitatifs devant l'égalité obtenue : $0\,x = 6$…. que certains écrivent $0 = 6$. Le fameux « c'est impossible » retentit dans la classe et cette fois-ci, c'est vrai !
On conclut que ce problème n'a pas de solution car il n'existe pas de nombres x tel que $(x + 5)\times 4 = (2x + 7)\times 2$.

Étape 4 : Plusieurs inconnues
J'ai payé 5 € pour deux cafés et un chocolat. Pouvez vous savoir quel est le prix d'un chocolat et celui d'un café ?

Les élèves s'aperçoivent qu'il y a plusieurs possibilités et que si on fixe le prix d'une des consommations, on peut calculer le prix de l'autre.

Le professeur peut alors rajouter une deuxième condition : un chocolat coûte 0,50 € de plus qu'un café.

Les élèves constatent qu'il n'y a plus d'une solution.
Ils peuvent écrire deux équations où d'emblée une seule comme dans le problème du concert. C'est un des types de problème proposé en 4ème le plus difficile pour la mise en équation.

Les problèmes du type de celui du concert peuvent être réservés à la 3ème au moment de l'étude des systèmes d'équations. Nous préparons ainsi la leçon sur les systèmes où nous pourrons représenter les deux fonctions affines dans un même repère, pour expliquer ce qui se passe.

Conclusion

Nous avons vu des problèmes où les relations entre les nombres concernent un seul nombre inconnu et fournissent une seule égalité entre deux programmes de calcul. Mais au lieu d'une égalité, les conditions données peuvent conduire à une inégalité. Il y a aussi des relations qui concernent plusieurs inconnues et les élèves ont commencé à comprendre qu'elles peuvent conduire à plusieurs égalités.

Nous venons de voir que, lors de la résolution d'un problème par la méthode algébrique, les élèves manipulent trois des statuts de la lettre en algèbre : inconnue, variable quand ils font des essais, indéterminée quand ils remplacent l'expression d'un des membres par une expression réduite.
Nous avons remarqué que parfois les élèves privilégient le statut de variable dans les équations en centrant leur attention sur l'expression de chacun des membres vus comme deux fonctions de cette variable, comme cela est nécessaire dans les méthodes arithmétiques de fausse position. Parfois même certains élèves ne voient plus alors que deux programmes de calcul indépendants, au détriment de l'écriture d'une égalité. Le statut de variable est devenu un obstacle, mais il ne peut être évité, il fait partie de l'apprentissage. Nous avons néanmoins décidé de ne pas démarrer cet apprentissage en mettant en scène la méthode des essais pour résoudre un problème ou une équation de premier degré choisis de sorte que la solution non entière ne puisse être trouvée par un petit nombre d'encadrements avec des essais. Ceci renforce de prime abord le statut de variable de la lettre. Or les élèves font d'eux-mêmes des essais, ce qui suffit pour rencontrer puis franchir l'obstacle. De plus, il en ressort implicitement que la technique algébrique de résolution des équations permet seule de trouver la solution, d'où la nécessité de l'apprendre. Ce n'est pas le cas pour le premier degré puisqu'un raisonnement par proportionnalité sur ces essais y conduit.

Le professeur ne doit pas hésiter cependant à introduire ce statut de variable en 3ème en passant dans le cadre graphique pour résoudre des équations ou des systèmes d'équations. Dans les problèmes relevant de la résolution d'inéquations, le statut de variable de la lettre est indispensable pour comprendre que l'ensemble des solutions est un intervalle ou une réunion d'intervalles dans lesquels l'inconnue peut prendre tout un ensemble ordonné de valeurs.
Une réflexion sur les différents statuts des lettres peut guider le professeur dans la préparation des prochaines leçons, pour construire des situations d'enseignement jusqu'en seconde.