Environnement informatique	Objectifs et moyens possibles
✓ **Logiciel :** Tableur et calculatrice **graphique (ou grapheur)** ✓ **Type d'utilisation :** DM puis correction en classe ✓ **Matériel :** Ordinateur ✓ **L'apport informatique :** indispensable pour déterminer des valeurs approchées de la solution du problème	✓ **Objectifs :** Devoir de recherche regroupant différentes notions de 1ère S. ✓ **Moyen :** Devoir à la maison sur une période suffisamment grande pour que l'élève puisse demander de l'aide.

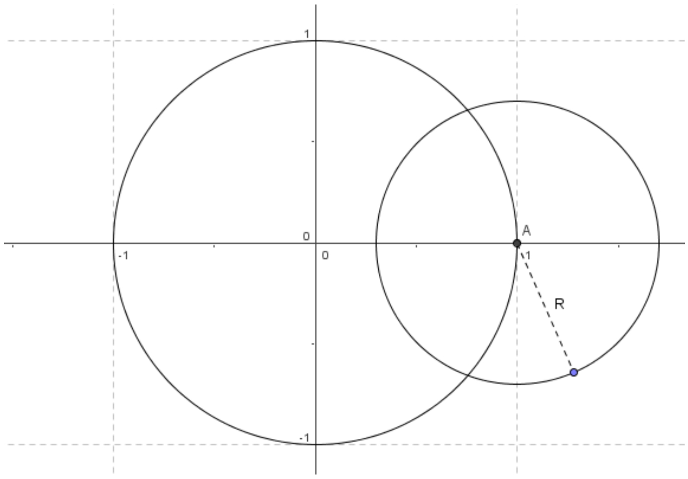
Prérequis informatiques	Prérequis mathématiques
✓ Fonction alea() d'un tableur ✓ Tracer la représentation graphique d'une fonction à la calculatrice ✓ Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ à la calculatrice	✓ Equation de cercle ✓ Trigonométrie : formule de duplication ✓ Fonction

L'énoncé :

« Une chèvre est attachée à une corde fixée à un pieu se trouvant sur la clôture d'un enclos circulaire. Trouver la longueur de la corde pour qu'elle puisse brouter la moitié de la surface de l'enclos. »

<u>Partie A :</u> Caractérisation de l'herbe broutée

Soit le repère orthonormal du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et le cercle de centre O rayon 1 délimitant le pré. On suppose la chèvre attachée centre A et de rayon R.(voir figure)



1. Hachurer la partie broutée par la chèvre.
2. Déterminer une équation du cercle de centre O et de rayon 1.
3. Soit M (x , y). Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de M pour que M soit sur le disque de centre O et de rayon 1.
4. Déterminer une équation du cercle de centre A et de rayon R.
5. Soit M (x , y). Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de M pour que M soit sur le disque de centre A et de rayon R.
6. Soit M (x , y). Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de M pour que M soit dans la partie broutée par la chèvre.

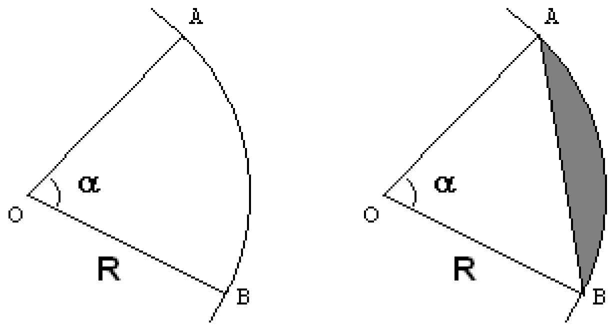
Partie B : Utilisation d’une feuille de calcul

1. Construire 2 cellules permettant de simuler le choix d’un point au hasard dans le carré délimité par les droites d’équation $(y = 1), (y = -1), (x = 1), (x = -1)$.
2. Choisissons $R = 0{,}7$. A l’aide de la fonction $SI()$, trouver une formule permettant de déterminer si le point choisi au hasard se situe dans le pré, dans la partie brouté.
3. Simuler 500 points.
4. En admettant que pour un grand nombre d’essais, l’aire d’un domaine est proportionnelle à la fréquence d’appartenance à ce domaine, estimer l’aire de la partie broutée.
5. Faut-il augmenter ou réduire le rayon R ?
6. Répéter avec d’autres valeurs de R.
7. Représenter dans un repère l’aire du domaine en fonction du rayon du cercle
8. Estimer la valeur de R recherchée.

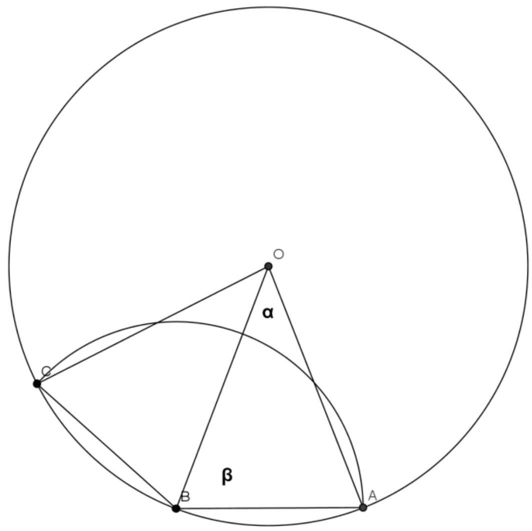
Partie C : Préambule géométrique

Soit le secteur angulaire délimité par OAB et tel que : $OA = OB = R$ et $A\hat{O}B = \alpha$ rad. (voir figure)

1. Déterminer l’aire du secteur angulaire en fonction de R et α.
2. Exprimer l’aire du triangle OAB en fonction de R et α.
3. En déduire l’aire de la partie grisée. (voir figure)



Partie D : Le problème de la chèvre



On note R la longueur de la corde et α, β les angles définis sur la figure ci-dessus.

1. Donner les intervalles dans lesquels se situent αet β.
2. Exprimer α en fonction de β.
3. Tracer la hauteur de OAB issue de O. Exprimer R en fonction de $\cos(\beta)$.
4. Exprimer l'aire de OAB uniquement en fonction de β.
5. Montrer que l'aire de la partie broutée par la chèvre est égale à $A(R) = \beta R^2 + \alpha - 2\cos(\beta)\sin(\beta)$.
6. En déduire une expression de $A(R)$ en fonction de β uniquement.
7. Montrer que résoudre le problème revient à déterminer R tel que :
$$\begin{cases} R = 2\cos(\beta) \\ 2\beta cos(2\beta) - \sin(2\beta) + \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \text{avec } 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$
8. On pose $f(x) = 2xcos(2x) - sin(2x) + \frac{\pi}{2}$
   a. Calculer $f'(x)$, puis étudier le sens de variation de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
   b. Construire le tableau de variation de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
   c. Représenter la fonction f à la calculatrice.
   d. Déterminer à l'aide de votre calculatrice une valeur approchée β puis de R.