Présentation C2IU 21 janvier 2012

La logique dans les nouveaux programmes pour le lycée.

Zoé MESNIL
Laboratoire de Didactique André Revuz
zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr

Je m'intéresse à cette question dans le cadre d'une thèse de didactique des mathématiques. Je l'aborde avec une formation en logique mathématique, ce qui n'est pas anodin car cette approche mathématique de la logique constitue pour moi une référence, par rapport à laquelle questionner ce qu'est « la logique ».

Une vaste question : les professeurs de mathématiques enseignent-ils la logique ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

Un contexte particulier pour poser cette question concernant les professeurs de lycée : le nouveau programme de 2010 pour la classe de Seconde.

Les pratiques des professeurs en matière d'enseignement de la logique, notamment au lycée, n'ont pas été beaucoup étudiées. Les nouveaux programmes fixant des objectifs qui concernent des objets de la logique mathématique, la question des pratiques peut se poser d'une manière particulière en termes de modifications des pratiques. Et puis on peut s'attendre à ce que les professeurs soient plus mobilisés sur ces questions. Enfin, les manuels ont publiés des pages et exercices « logique », ce qui est une nouveauté par rapport aux éditions précédentes, qui peuvent être analysés.
Une question en amont :
pourquoi est-ce que les professeurs auraient à enseigner la logique ? (et donc à l'étudier dans leur formation…)
Et derrière une question épistémologique : à quoi sert la logique dans l'activité mathématique ?

A quoi ça sert la logique pour faire des mathématiques ?

- la position de Descartes/Poincaré : c'est un outil de contrôle, mais l'important c'est l'intuition (guidée par le bon sens).
- la position logiciste de Frege/Russell : la logique c'est le fondement des mathématiques.
- une position moins extrême (je pense assez courante chez les mathématiciens universitaires) : on apprend naturellement le minimum de logique dont on a besoin pour faire des mathématiques en faisant des mathématiques.

Poincaré : « avec la logique on démontre, avec l'intuition on invente ».
Pas sûre que pour les élèves ça vienne si naturellement que ça…
On peut considérer que le fait que la négation d'un énoncé universel soit un énoncé existentiel, ou dit de manière un peu plus formelle, que la négation de « pour tout x P(x) » soit « il existe x tel que non P(x) » est une règle assez naturelle. Pourtant il a été maintenant montré plusieurs fois que la négation de « tous » pour les élèves est souvent « aucun ». Prendre la logique mathématique comme

référence pour ces questions c'est considérer que ceci est un théorème de la logique mathématique (ce qui ne veut pas dire que c'est comme ça que je préconise de l'enseigner !). C'est un théorème que l'on trouve généralement dans les livres de logique dans le chapitre sur le langage des prédicats, langage formel qui nous sert de référence quand nous faisons des mathématiques, même si nous utilisons selon les besoins (cours à des étudiants, exposé à des collègues, rédaction d'un ouvrage) des niveaux de formalisation différents par rapport à ce langage.

Une réponse :
La logique est une branche des mathématiques qui modélise non pas les mathématiques mais ce que nous faisons quand nous faisons des mathématiques.

Ce que nous faisons c'est notre langage et nos raisonnements. Pour le langage, ce qui est modélisé c'est ce qui nous sert à dire les faits sur les objets mathématiques, pas tout le discours des mathématiques qui englobe des commentaires sur notre activité mathématique.

A l'Université :
compte-rendu d'une expérience d'enseignement d'un cours « Langage Mathématique » proposé en première année dans les parcours math, math-info, info et Mass (facultatif).

Objectif du cours : familiariser les étudiants avec le langage mathématique.

Des notions de base de logique : statut des variables, connecteurs, quantificateurs, les différents types de raisonnement à partir de l'étude du langage mathématique.

Par exemple, on prend des énoncés du cours de math :

(b) Tout partie finie de $\mathbb{R}$ admet un plus grand et un plus petit élément.

et on l'écrit dans un langage « à contrainte », dans lequel notamment les quantifications sont explicites (« unpacking the logic », exercice thème/version).

Écrire les énoncés de manière plus formelle permet de faire des liens entre structure de l'énoncé et structure de la démonstration. Évidemment, ça ne suffit pas pour avoir l'idée de la démonstration, seuls résultats que je connaisse pour l'instant c'est Selden et Selden : les étudiants qui n'arrivent pas à dégager la structure logique des énoncés n'arrivent pas à valider leurs preuves (on retrouve la dimension outil de contrôle). Le problème est la question de la réciproque. Au delà du lien avec les capacités à proposer des preuves, on peut faire l'hypothèse que proposer différentes formulation participe à la construction de ce que Selden et Selden appellent « statement image » qui inclus « tous les énoncés alternatifs, les exemples, les contre-exemples, les visualisations, les propriétés, les concepts, les conséquences etc associés à un énoncé ».

Pas d'expérimentation organisée et de résultats, une impression : certains élèves s'emparent d'outils proposés (par exemple la notion de variable libre/liée pour vérifier la synonymie d'expressions) mais restent de grosses difficultés dès qu'il s'agit de produire un raisonnement un peu complexe, notamment dans leurs démonstrations se baladent un peu partout des variables qui n'ont pas été introduites.

Difficulté de passer d'exercices du type :
x est un nombre réel.
Montrer que *P(x)*
À
Montrer que pour tout *x* réel on a *P(x)*
Voire
Montrer que l'on a $\forall x \quad P(x)$

Dans le premier cas, le plus courant au lycée, pas de notion d'élément générique puisque le caractère universel de ce qui est montré n'est pas mentionné. De plus ce qui pourrait avoir un statut d'élément générique est donné.
Dans le deuxième cas, tout ça est à la charge de l'étudiant, voire en plus dans le troisième cas une compréhension d'un énoncé symbolique (ce qui n'est peut-être pas le plus dur)

Des nouveautés dans le programme pour la classe de Seconde de 2010 :

Est-ce que ça va changer quelque chose ?

Un regard en arrière : petit historique de l'enseignement de la logique au lycée depuis 1960.

Ça peut changer quelque chose si les pratiques des professeurs changent : étude en cours.
Dans le questionnaire, sur 35 professeurs, 18 disent qu'ils travaillaient avec leurs élèves de Seconde sur des notions de logique déjà avant ces nouveaux programmes, 33 disent qu'ils le font depuis les nouveaux programmes. Ce qui est sûr c'est qu'il y a dans les manuels des choses qui n'étaient pas présentes avant, ce qui n'est pas sûr c'est que ça aide les élèves… Dans des discussions avec des professeurs qui enseignent en branche scientifique (TS et 1S), certains disent qu'ils vont se sentir plus autorisés à parler de logique et à systématiser l'utilisation de certaines notions, par exemples les quantificateurs, la contraposée… mais le nouveaux programme est-il adapté à cette volonté ? (exemple des deux définitions de la convergence des suites).
Je démarre en 1960, premiers textes dans lesquels apparaissent notions ensemblistes et flèches d'implication et d'équivalence (et également symboles de quantificateurs dans certains manuels).

« C'est donc à l'enseignant du second cycle qu'incombe la tâche d'entreprendre et de poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression, étant bien entendu que ces notions ne doivent pas faire l'objet d'un exposé systématique, théorique et abstrait; elles doivent être dégagées et précisées peu à peu, puis être mises à l'épreuve à l'occasion de l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories et des nombreux problèmes que comporte chacune d'elles. »

Programme de 1960

« Le développement de l'argumentation et **l'entraînement à la logique** font partie intégrante des exigences des classes de lycée. A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique formelle de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre place naturellement dans tous les chapitres du programme.»

Programme de 2009

Des objectifs qui se ressemblent : amener progressivement les élèves à maîtriser la logique en oeuvre dans la pratique des mathématiques. Dans le passage de l'expression « une initiation plus complète » à « l'entraînement à la logique » on peut voir le passage d'un enseignement magistral à un enseignement où l'élève est acteur de ses apprentissages. Le terme « initiation » peut avoir une connotation spirituelle, le terme « entraînement » une connotation sportive, en caricaturant nous pouvons donc comparer le professeur de 1960 à un gourou et celui de 2009 à un coach.
On retrouve dans les deux programmes la volonté de ne pas faire de cours de logique, mais « l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories » ne semble plus être pratiquée aujourd'hui.
Une différence importante : « modes élémentaires de la pensée logique et à **ses moyens d'expression** » prépare l'approche des maths modernes, introduction des symboles avec mise en garde.

- 1960 : une entrée discrète dans les textes, une préparation sur le terrain
- 1969 : le programme des maths modernes : la logique, associée à la théorie des ensembles, comme base du langage mathématique propre à expliquer le monde
- 1981 : programme de la contre-réforme : la logique bannie
- 2001 : un retour timide
- 2010 : le tableau des objectifs

Rappelons le contexte du programme de 1960 : 1939 : Premier Bourbaki, 1954 : le cours d'analyse de Gustave Choquet, soutenu par Henri Cartan, remplace celui de George Valiron à l'université de Paris, les mathématiques « bourbakistes » gagnent l'université, Frege a plus d'un demi-siècle, de grands théorèmes de logiques ont été démontrés (complétude, incomplétude), la logique est une branche des mathématiques, même si pas très reconnue en France (Bourbaki va chercher des logiciens ailleurs). Dans la décennie 60-70, c'est sur le terrain que va se préparer la réforme des maths modernes, comme en témoigne les bulletins de l'APMEP qui publient cours de logique, récits d'expériences d'enseignement des maths modernes. Puis vient la réforme des math modernes, préparées, mais insuffisamment par manque de temps, par la commission Lichnerowicz (fondée en décembre 1966, programmes pour la rentrée 1969, « vrais » programmes en 1973). Dans des instructions de 1970, un rapide cours de logique pour expliquer les notions du chapitre « langage des ensembles ». Et dans les manuels, c'est l'époque des tables de vérité. La réforme n'a pas été un succès : très vite critiquée car jugée trop abstraite, élitiste (abstraction revendiquée en partie par la commission, élitisme en oppositions avec les volontés de la commission). Manifestement, la pratique de la logique formelle telle qu'on peut la voir proposée dans les manuels n'a pas clairement aidé les élèves.
Nous n'avons pas accès aux pratiques de cette époques (il y a bien quelques récits d'anciens combattant, mais ça ne fait pas un corpus…), à travers l'étude des manuels, on peut voir des différences dans la présentation de la logique selon les manuels qui révèlent une connaissance plus ou moins grande en logique mathématique (par exemple en 1969 Queysanne-Revuz et Aleph 0).
La contre-réforme : la logique jetée avec l'eau du formalisme et de l'abstraction. Ces programmes marquent une volonté de rendre l'élève acteur : les 8 moments de l'activité mathématique. Exclusion de la logique reprise dans les programmes de 1990.
Dans les programmes de 2001, retour de la logique dans l'introduction : « Le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée. À l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de

commencer à détacher les principes de la logique formelle de ceux de la logique du langage courant ». Une place plus explicite dans le programme de 1ère L de 2004 :

Pour ce qui concerne la logique, l'arithmétique semble un domaine privilégié pour travailler le raisonnement, car les notions de base qu'on y rencontre sont depuis longtemps familières aux élèves et ne nécessitent que peu de connaissances techniques. […]

Ce travail devrait permettre de dégager *en situation* le domaine de validité de certaines phrases à priori « ouvertes » pour eux, de faire distinguer les notions de condition nécessaire et de condition suffisante et de poser comme question centrale celle de la vérité ou non de propositions générales, comportant si nécessaire de façon explicite des quantifications existentielles et universelles et des connecteurs (« et », « ou », négation). […] Des compétences élémentaires de logique sont visées par ce travail transversal *sur les deux années* de cette formation. Les élèves devront être capables de les utiliser *dans un champ de connaissances qui leur est suffisamment familier*. Ce travail d'appropriation de quelques règles de logique ne peut se faire que progressivement, par petites touches, et de façon non dogmatique.

Une nouveauté dans le programme de 2010 : un tableau qui fixe des objectifs en matière de notations et raisonnement mathématique.

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Dans les manuels, des pages autour de la logique et des exercices estampillés.

Mais des présentations très différentes.

II. Et – Ou, Intersection – Réunion

- Dans le **langage usuel** on emploie les mots « et », « ou ».

Le mot « et » peut signifier :
- « à la fois » comme dans la phrase « cet élève est blond **et** porte des lunettes » ;
- « et puis » comme dans la phrase « l'élève ouvre son sac **et** sort sa calculatrice ».

Le mot « ou » peut signifier :
- « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux à la fois » comme au restaurant, dans l'expression « fromage **ou** dessert ».
  Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens exclusif.
- « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois » comme dans la phrase « s'il pleut **ou** s'il vente, je ne sortirai pas ».
  Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens non exclusif.

- On emploie aussi ces mots **en mathématiques** :

Le mot « et » signifie uniquement « à la fois ».

Le mot « ou » signifie uniquement « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois ».

Par exemple : « 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3. » (1)

« 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3. » (2)

La phrase (1) est vraie car les deux phrases « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » sont vraies. La phrase (2) est vraie car pour chacun des nombres 0, 2, 3 6, l'une au moins des deux phrases est vraie.

Manuel Indice

Définition 6

Soient P et Q deux propositions :
– **(P et Q)**, appelé **conjonction** des propositions P, Q est vraie lorsque P **et** Q sont vraies toutes les deux.
– **(P ou Q)**, appelée **disjonction** des propositions P, Q est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P **ou** Q est vraie (et donc fausse lorsque P et Q sont fausses toutes les deux).

Exemple : « le triangle ABC est rectangle et isocèle » est une conjonction d'« être rectangle » **et** « isocèle » ; « le triangle ABC est rectangle ou isocèle » est une disjonction d'« être rectangle » **ou** « isocèle », ce qui conduit souvent à distinguer deux cas : 1. le triangle est rectangle, 2. le triangle est isocèle.

Manuel Symbole

Dans les exercices, prédominance des Vrai/faux.

Et des confusions sur les notions en jeu :

Par exemple, dire que la phrase « les solutions de f(x)=1 sont -3 ou 4 » est fausse montre une confusion entre un « ou » conjonction de coordination (c'est le cas ici) et un « ou » connecteur logique entre deux propositions.

Voire des erreurs :

Compléter la phrase :
« Il existe au moins un réel *x* tel que si *x^2*=36, alors ... »
Pour obtenir :
a) une proposition vraie
b) une proposition fausse

Est-ce que les professeurs ont des connaissances en logique mathématique qui leurs permettent d'avoir de ce point de vue un regard critique sur ce qui est proposé dans les manuels ?

Dans le bilan du stage « initiation à la logique »,30 professeurs sur 35 stagiaires se déclarent demandeurs d'une formation théorique en logique mathématique.
Dans le questionnaire, 28 professeurs sur 35 répondent que leurs connaissances leurs paraissent suffisantes pour atteindre les objectifs fixés par le programme.

Des réponses variées dans deux publics peut-être différents. A approfondir.
J'ai dit « de ce point de vue » car on peut aussi posé la questions des connaissances didactiques.

La logique pour raisonner
La logique pour s'exprimer

Deux fonctions sont attribuées à la logique, liées l'une au langage et l'autre au raisonnement.

- la logique étudie des langages formels, par exemple le langage des prédicats que nous utilisons rarement dans sa version complètement formelle mais qui sert de référence par exemple si l'on veut analyser la structure d'une proposition.
- En 1970 : présentation d'un « nouveau » langage *vs* En 2010 : précisions sur les règles d'utilisation du langage courant en mathématiques.

Par rapport au langage, la logique explicite le fonctionnement du langage des prédicats. Pendant les maths modernes il y avait clairement une volonté d'apprendre ce langage particulier (plus « démocratique » que ça soit un nouveau langage), dans le programme actuel, ce langage de référence n'est pas présent, il semble y avoir juste un langage courant que l'on pratique d'une certaine manière en mathématique. Bien sûr, on peut estimer que cette référence formelle n'est pas nécessaire, ni pour les profs ni pour les élèves. On peut aussi penser qu'elle est importante pour les profs, et qu'elle peut être graduellement présente pour les élèves (par exemple associer le contre-exemple à la négation d'un énoncé universel, utilisé ce langage formel pour expliquer pourquoi la négation de « tous » ça n'est pas « aucun »…). Manque dans tous les manuels une brique importante du langage mathématique : la notion de variable. Et manque dans presque tous les manuels la notion de proposition (le mot est assez utilisé mais défini comme « phrase pouvant être vraie ou fausse » dans seulement 2 manuels).

- La logique étudie des systèmes de déductions (par exemple la déduction naturelle) mais je fais l'hypothèse que cette modélisation est beaucoup moins connue des mathématiciens (qui ont tous vu un symbole de quantificateur, mais ne savent pas tous ce qu'est le modus ponens, ou règle de détachement, ou règle d'élimination de l'implication).
- En 1970, les types de raisonnement étaient reliés à des règles de déduction, plus en 2010.

Je pense donc que les relations entre logique mathématique et raisonnement sont plus complexes que l'immédiate association des termes « logique » et « raisonnement ».

- Est-ce que pour les professeurs la logique mathématique fournit des outils pertinents pour remédier au constat récurrent de difficultés chez les élèves en matière d'expression et de raisonnement ?
- Si oui, ont-ils une formation suffisante en logique pour présenter ces outils ?
- Si oui, comment ces outils pour l'activité mathématique deviennent-ils objets d'enseignement ?