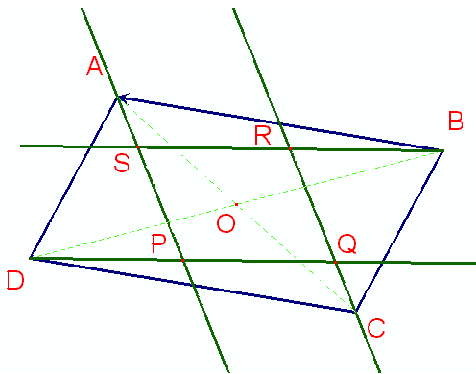


I. Introduction

L'histoire de cet atelier débute en Juin 2003, lorsqu'un des auteurs de l'article a cru comprendre que Rudolf Bkouche posait, lors d'une réunion de la commission *Inter-Irem de Géométrie* le problème suivant :



Par les quatre sommets d'un parallélogramme (ABCD) on mène quatre droites $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D$ deux à deux parallèles. On obtient ainsi un parallélogramme (PQRS).

A quelle condition ce quadrilatère est-il un carré ?

Rudolf disait avoir trouvé cet exercice dans un livre de géométrie de Vacquant et Macé de Lépinay (1896), il cherchait une solution géométrique élémentaire. Comme on le verra par la suite, le problème initial était beaucoup plus général que celui de Vacquant ce qui montre que l'un des auteurs de cet article ne suit pas bien les séances de la commission...

De retour à Rouen le groupe *Géométrie* s'est donc attelé à la résolution du *faux* problème de Vacquant. Thierry Hamel (paragraphe) donna, le premier, grâce à la trigonométrie, l'expression analytique des deux directions que l'étude expérimentale (*Cabri*) avait fait apparaître. Mais ce calcul ne donne apparemment pas une expression facile à interpréter géométriquement.

La solution algébrique, permet en revanche, de produire une construction géométrique simple et de nombreuses généralisations.

- On peut partir de quatre points quelconques et donc l'hypothèse du parallélogramme est superflue.
- On peut chercher à construire, par le même principe, un losange dont les angles sont fixés à l'avance.
- On peut généraliser à la construction de polygones réguliers.

Voilà pourquoi il nous a paru intéressant de raconter cette méprise.

Depuis longtemps le groupe *Géométrie* de Rouen travaille les applications mécaniques et cinématiques de la géométrie. Mais nous avons laissé, dans toutes nos publications, une grande place à l'Algèbre. En effet la géométrie projective (et souvent projective complexe¹) n'est plus enseignée qu'à très peu d'étudiants alors que l'algèbre est une langue plus facilement comprise. Le recours à l'algèbre (ou à la géométrie analytique) est donc parfois obligé.

Mais au delà de cette raison utilitaire, il nous a toujours paru intéressant de mélanger l'Algèbre et la Géométrie. Certes il ne s'agit pas de revenir aux programmes des années 1970-1980 dans lesquels l'algèbre avait, en quelque sorte, mangé la géométrie. Mais force est de constater que depuis, l'algèbre a été peu à peu éradiquée des programmes de Lycée (même l'enseignement des complexes en Terminale est de moins en moins algébrique). Quand ils sont enseignés ensuite, les objets algébriques présentent, en eux-mêmes, trop de difficultés -abstraction, définition et enchevêtrement des notions- pour que les étudiants puissent facilement comprendre leur intérêt et leurs applications. Impossible donc d'acquérir ce qu'on pourrait appeler une pensée *algébrique*.

La démonstration algébrique du problème de Vacquant ne contient pas d'objets algébriques sophistiqués, mais elle présente pourtant plusieurs caractéristiques intéressantes d'une démarche algébrique.

- Le problème géométrique est remplacé par un jeu de *formes* et de symboles qui permettent de s'abstraire du calcul proprement dit.
- Le choix des symboles assure la symétrie général du problème, si bien que plusieurs résultats sont obtenus par leur permutation. Ceci correspond à une vieille pratique des premiers algébristes².
- La formule finale permet une *interprétation* géométrique³ très simple qui donne donc la solution géométrique du problème.

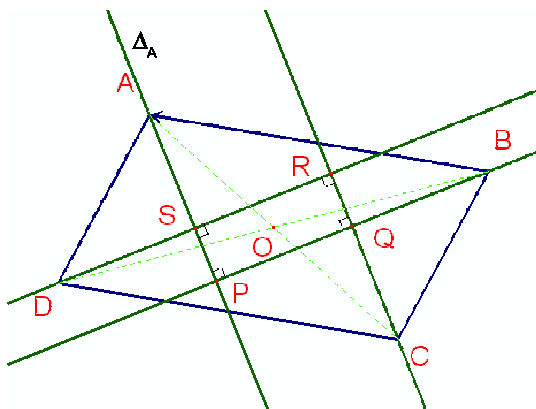
¹Par exemple dans *Quelques problèmes obtenus en faisant tourner une équerre* ([?]), on trouve à la fois des preuves cinématiques, et aussi toute une partie algébrique qui permet d'expliquer la dualité et donc toutes les équations tangentielles.

²Nous avons remarqué au colloque *Inter-Irem Epistémologie* de Douai, à propos du texte de Cayley *Note sur quelques formules relatives aux coniques* ([?]), que la technique algébrique de l'auteur opérait sans que les objets fussent précisément nommés. Les simplifications et regroupements de termes y étaient faits avant même que des mots existent pour préciser à quelle propriété ils correspondaient. La dualité entre les formes se traduisait par exemple par le passage des caractères romains aux caractères gothiques

³En France le mot *interprétation* est associé à l'interprétation géométrique des nombres complexes, qui est un lointain avatar de l'enseignement de l'algèbre au début du dix-neuvième siècle. Pour l'anglais George Peacock toute écriture "symbolique" doit pouvoir s'appliquer (avec des restrictions) aux grandeurs "réelles"

On peut exhiber *a posteriori* une preuve géométrique de la formule, comme l'a trouvé un des stagiaires de Limoges. Mais cette preuve ne remet pas en cause notre démarche d'ensemble qui veut avant tout raconter une recherche algébrique.

– On obtiendra, en prime, quelques généralisations.

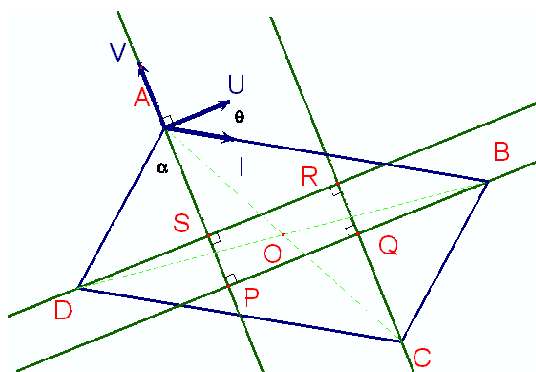


Puisque l'on cherche à construire un carré, on peut toujours choisir les directions des quatre droites orthogonales. On obtiendra déjà un rectangle. C'est donc ainsi que nous avons attaqué le problème.

Existe-t-il des droites Δ_A , pour lesquelles le rectangle associé (PQRS) est un carré ?

Remarque : Soit O le centre du parallélogramme (ABCD). La symétrie centrale S_O envoie Δ_A sur sa parallèle contenant C, ie Δ_C . De même elle envoie Δ_D sur Δ_B . L'intersection $\Delta_A \cap \Delta_D = S$ a donc pour image l'intersection des droites images ie Q. On démontre ainsi que O est aussi le centre du rectangle.

II. Résolution analytique.



Dans la figure ci-contre on note ABCD le parallélogramme de départ. Le vecteur U est un vecteur normal de Δ_A et V est le vecteur directement orthogonal à U.

Appelons α l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ du parallélogramme et appelons θ l'angle que fait U avec l'axe [AB] dirigé par I. Nous ferons varier θ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On observe que, quel que soit θ dans l'intervalle choisi⁴, on a

$$\overline{AP} = \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{V} = L \cos \left(\widehat{(\overrightarrow{AB}, \mathbf{U})} + \frac{\pi}{2} \right) = -L \sin \theta$$

et

$$\overline{AS} = \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{V} = l \cos \left(\widehat{(\overrightarrow{AD}, \mathbf{U})} + \frac{\pi}{2} \right) = l \sin(\alpha - \theta).$$

et donc

$$\overline{PS} = \overline{AS} - \overline{AP} = l \sin(\alpha - \theta) + L \sin \theta = \cos \theta (l \sin \alpha) + \sin \theta (L - l \cos \alpha).$$

De la même façon on montre que

$$\overline{PQ} = L \cos \theta + l \cos(\theta - \alpha) = \cos \theta (L + l \cos \alpha) + \sin \theta (l \sin \alpha).$$

Le rectangle PQRS est un carré si et seulement si $\overline{PS} = \pm \overline{PQ}$ ce qui donne, en posant $\lambda = \frac{l}{L}$ deux équations

$$\tan \theta = \frac{\lambda + \cos \alpha - \sin \alpha}{\lambda - \cos \alpha - \sin \alpha}$$

ou

$$\tan \theta = \frac{-\lambda - \cos \alpha - \sin \alpha}{\lambda - \cos \alpha + \sin \alpha}.$$

de l'arithmétique et réciproquement toute écriture arithmétique est susceptible d'une généralisation. Ces principes (extrait cité dans [?])

- **A** : Toute forme qui est algébriquement équivalente à une autre quand elle est exprimée en symboles généraux doit continuer à lui être équivalente, quel que soit ce que ces symboles représentent".
- **B** : Toute forme qui est découverte en algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente quand les symboles sont généraux dans leur nature aussi bien que dans leur forme.

seront mis à mal lorsque Hamilton, en découvrira en 1843 la multiplication non commutative des quaternions, et, en même temps, élargira le champ d'investigation des algébristes anglo-saxons (Cayley, Sylvester, Peirce).

⁴Pendant que P parcourt le cercle de diamètre [A, B], le point S parcourt le cercle de diamètre [A, D] et Q celui de diamètre [B, C]... ce qui donne assez bien le signe des quantités exprimées sous forme algébrique

Le problème de Vacquant.

Entre temps nous avons retrouvé l'énoncé initial du problème de Vacquant. Il s'agissait de prendre Δ_A, Δ_B , etc. comme les bissectrices des angles en A, B et donc de rechercher une condition sur le parallélogramme initial. Dans ce cas on a $\alpha - \theta = \pi + \theta$ si bien que

$$PS = (L-l)|\sin\theta| \quad \text{et} \quad PQ = (L-l)\cos\theta$$

de sorte que la condition $PS = PQ$ donne de façon immédiate :

$$\tan\theta = \pm 1 \quad \text{autant dire} \quad \theta = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Ceci impose au parallélogramme $ABCD$ d'être rectangle, à moins qu'il ne le fût au préalable sous la forme dégénérée d'un losange ($L = l$).

III. Approche algébrique

L'idée est de trouver un vecteur $\mathbf{U} = {}^t(u, v)$ unitaire qui va donner la bonne direction à mener à partir de A ; on note aussi $\mathbf{V} = {}^t(-v, u)$.

La droite (PA) a pour équation une forme du type $ux + vy = ux_A + vy_A = U \cdot A$, de même la droite (QB) a pour équation $-vx + uy = -vx_B + uy_B = V \cdot B$, si bien que les coordonnées de P sont données par les formules de Cramer (le système est Cramérien de déterminant 1).

$$x_P = \begin{vmatrix} U \cdot A & v \\ V \cdot B & u \end{vmatrix}$$

$$y_P = \begin{vmatrix} u & U \cdot A \\ -v & V \cdot B \end{vmatrix}$$

Ceci peut encore être écrit

$$P = K \begin{pmatrix} U \cdot A \\ V \cdot B \end{pmatrix}.$$

si on introduit la matrice (de rotation) $K = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$.

On détermine les autres sommets du rectangle $PQRS$, par une autre technique algébrique usuelle, la combinaison ou la permutation des symboles (*faire "tourner" les lettres*) :

$$Q = K \begin{pmatrix} U \cdot C \\ V \cdot B \end{pmatrix}, \quad R = K \begin{pmatrix} U \cdot C \\ V \cdot D \end{pmatrix}, \quad S = K \begin{pmatrix} U \cdot A \\ V \cdot D \end{pmatrix}$$

et enfin trouver les diagonales :

$$\vec{RP} = K \begin{pmatrix} U \cdot (A - C) \\ V \cdot (B - D) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{SQ} = K \begin{pmatrix} U \cdot (A - C) \\ V \cdot (D - B) \end{pmatrix}.$$

$$\vec{RP} \cdot \vec{SQ} = (U \cdot (A - C) \quad V \cdot (B - D))^t K K \begin{pmatrix} U \cdot (A - C) \\ V \cdot (D - B) \end{pmatrix}.$$

La condition d'orthogonalité des diagonales du rectangle $PQRS$ se traduit donc par la condition⁵ nécessaire et suffisante

$$(U \cdot (A - C))^2 - (V \cdot (B - D))^2 = (U \cdot (A - C) - V \cdot (B - D))(U \cdot (A - C) + V \cdot (B - D)) = 0.$$

Notons \mathfrak{R} la rotation d'un quart de tour direct, et revenons aux notations du Lycée, la condition devient

$$\pm \mathbf{U} \cdot \vec{CA} = \mathbf{V} \cdot \vec{DB} = \mathfrak{R}(\mathbf{U}) \cdot \vec{DB} = \mathbf{U} \cdot \mathfrak{R}^{-1}(\vec{DB})$$

ou

$$\mathbf{U} \cdot (\vec{CA} \pm \mathfrak{R}^{-1}(\vec{DB})) = 0$$

⁵Ici la géométrie se venge cruellement car on peut remarquer directement que la condition

$$|\vec{u} \cdot \vec{AC}| = |\vec{v} \cdot \vec{BD}|$$

traduit directement l'égalité

$$SR = SP,$$

puisque dans le rectangle $PQRS$ on a par exemple

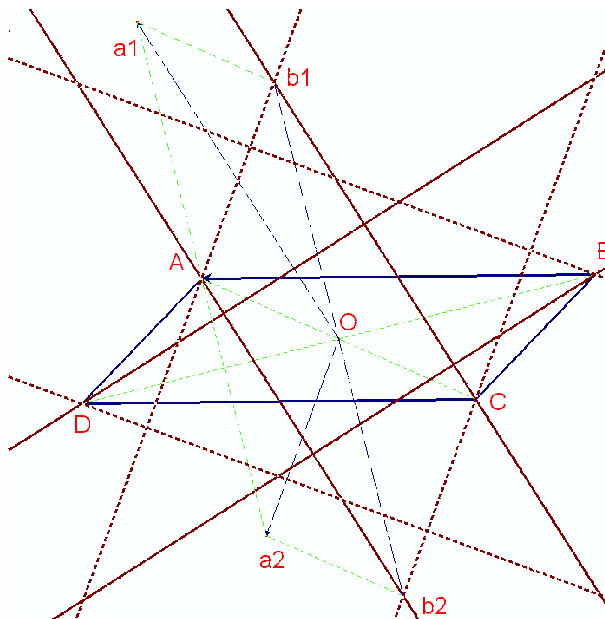
$$\vec{RS} = \vec{u} \cdot \vec{RS} = \vec{u} \cdot \vec{RA} + \vec{u} \cdot \vec{AC} + \vec{u} \cdot \vec{CS} = \vec{u} \cdot \vec{AC}$$

puisque les autres produits scalaires sont nuls.

et puisque O est le milieu des diagonales

$$\mathbf{U} \cdot (\overrightarrow{OA} \pm \mathfrak{R}^{-1}(\overrightarrow{OB})) = 0$$

Pour construire les bonnes directions il suffit donc de trouver par exemple les images b_1 et b_2 de B par les rotations de centre O (centre du parallélogramme) et d'angles $\pm \frac{\pi}{2}$. Les vecteurs $\overrightarrow{Oa_1}$ (et $\overrightarrow{Oa_2}$) sont obtenus en sommant $\overrightarrow{Ob_1}$ ($\overrightarrow{Ob_2}$) et \overrightarrow{OA} .



Une fois la construction acquise on peut chercher une démonstration géométrique élémentaire⁶. Mais nous renvoyons cette partie à la fin de l'article, dans le cadre des applications pour le Lycée.

⁶On peut néanmoins, tout de suite retrouver ainsi, la solution du véritable problème de Vacquant. Si l'on prend \vec{U} et \vec{V} unitaires et directeurs des bissectrices de l'angle en A et notons $AB = L$ et $AD = l$. On a alors $\vec{U} \cdot \frac{1}{l}\vec{AD} = \vec{U} \cdot \frac{1}{L}\vec{AB}$, ce qui donne

$$L \vec{U} \cdot \vec{AD} = l \vec{U} \cdot \vec{AB}$$

$$L \vec{U} \cdot \vec{AC} = L \vec{U} \cdot \vec{AB} + L \vec{U} \cdot \vec{AD} = (L+l) \vec{U} \cdot \vec{AB}$$

De même

$$l \vec{V} \cdot \vec{BA} = L \vec{V} \cdot \vec{BC}$$

$$L \vec{V} \cdot \vec{BD} = L \vec{V} \cdot \vec{BA} + L \vec{V} \cdot \vec{BC} = (L+l) \vec{V} \cdot \vec{BA}$$

Finalement, compte tenu de la relation $\vec{U} \cdot \vec{AC} = \vec{V} \cdot \vec{BD}$ $\vec{U} - \vec{V}$ est orthogonal à \vec{AB} , ce qui montre (en raisonnant de même pour B) que les directions des côtés du parallélogramme doivent être les bissectrices de l'angle (\vec{U}, \vec{V}) donc orthogonales.

Une condition nécessaire de la résolution du problème de Vacquant est donc de prendre un rectangle.

Si réciproquement nous supposons que $(ABCD)$ est rectangle et si nous prenons \vec{U} et \vec{V} soient unitaires et directeurs des bissectrices de l'angle en A .

La symétrie orthogonale s d'axe la médiatrice de $[A, B]$

$$s : \begin{array}{l} A \longleftrightarrow B \\ C \longleftrightarrow D \\ \vec{U} \longleftrightarrow \vec{V} \end{array}$$

Donc le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{AC} = \vec{V} \cdot \vec{BD}$, ce qui montre que la condition est suffisante.

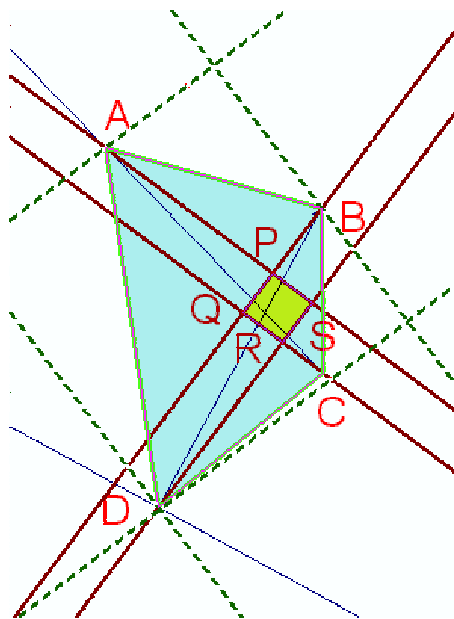
IV. Les premières généralisations.

IV.1 Le quadrilatère de Vacquant.

La première généralisation est immédiate. Il suffit de constater que nous n'avons pas utilisé que $ABCD$ était un parallélogramme. En utilisant la condition

$$U \cdot (\overrightarrow{CA} \pm \mathfrak{R}^{-1}(\overrightarrow{DB})) = 0,$$

qui évite le point O , on trouve deux directions, désormais non orthogonales, qui font de $PQRS$ un carré.



IV.2 Une généralisation au losange.

On pourrait généraliser le problème initial par l'énoncé suivant :

Etant donnés quatre points du plan A, B, C, D construire un losange dont les côtés contiennent respectivement un de ces points, et dont les angles soient donnés.

Il suffit donc de se donner deux vecteurs $U = {}^t(u, v)$ et $V = {}^t(-v_1, u_1)$ unitaires dont l'angle $(\widehat{U, V}) = \theta + \frac{\pi}{2}$ est fixé par les données du problème, de construire le parallélogramme $(PQRS)$ par la méthode algébrique qui précède, pour ensuite rechercher la condition d'orthogonalité des diagonales.

On s'aperçoit que la méthode algébrique que l'on a mise en oeuvre ci-dessus reste valable à condition de prendre comme nouvelle matrice

$$K = \begin{pmatrix} u & -v_1 \\ v & u_1 \end{pmatrix}.$$

Le même calcul donne

$$P = K \begin{pmatrix} U \cdot A \\ V \cdot B \end{pmatrix}.$$

et

$$Q = K \begin{pmatrix} U \cdot C \\ V \cdot B \end{pmatrix}, \quad R = K \begin{pmatrix} U \cdot C \\ V \cdot D \end{pmatrix}, \quad S = K \begin{pmatrix} U \cdot A \\ V \cdot D \end{pmatrix}.$$

De la même façon qu'auparavant on trouve

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{QS} = (U \cdot (A - C) \quad V \cdot (B - D))^t K K \begin{pmatrix} U \cdot (A - C) \\ V \cdot (D - B) \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{QS} = (U \cdot (A - C) \quad V \cdot (B - D)) L \begin{pmatrix} U \cdot (A - C) \\ V \cdot (B - D) \end{pmatrix}.$$

Avec L la matrice d'une forme⁷ dont on cherche en quelque sorte les vecteurs isotropes

$$L = {}^t K K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sin \theta \\ \sin \theta & -1 \end{pmatrix}.$$

⁷Au passage on peut souligner que la matrice ${}^t K K$ est la célèbre matrice de *Gram*, associée, si φ est l'endomorphisme qui envoie la base canonique sur les vecteurs U et V , à l'endomorphisme $\varphi^* \circ \varphi$.

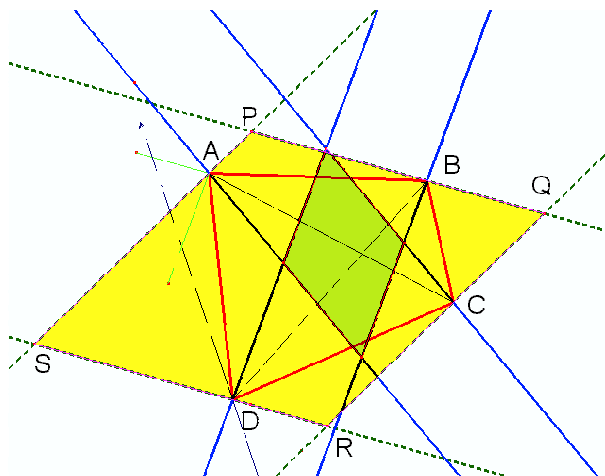
Un simple calcul montre⁸ que

$$(\alpha \ \beta) .L \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha^2 - \beta^2.$$

La factorisation est donc la même dans ce cadre que celle effectuée pour le carré ! Mais désormais \mathfrak{R} représente la rotation vectorielle qui envoie \mathbf{U} sur \mathbf{V} :

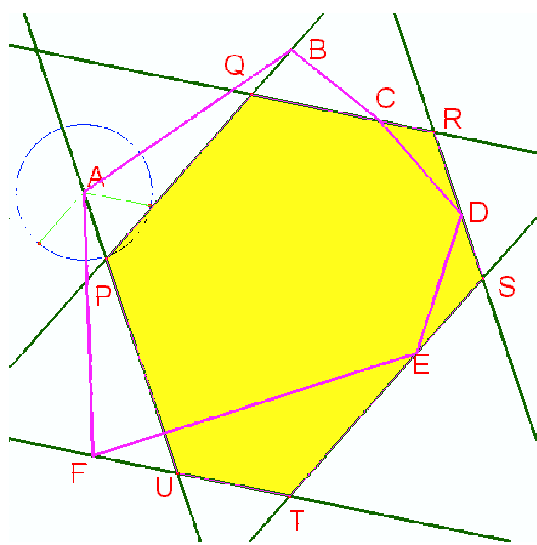
$$\mathbf{U} \cdot (\overrightarrow{CA} \pm \mathfrak{R}^{-1}(\overrightarrow{DB})) = 0.$$

La même construction géométrique va donc s'appliquer de-rechef. Il faut d'abord choisir l'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$ que l'on souhaite obtenir pour le losange final. On opère la rotation vectorielle d'angle $-\theta$ sur \overrightarrow{DB} . Ceci nous donne le vecteur $\overrightarrow{DB'}$. Enfin les translations de vecteurs $\overrightarrow{DB'}$ et $-\overrightarrow{DB'}$ appliquées au point C donnent deux points qui permettront de tracer les droites Δ_C dans les deux cas de figures.



V. Construction d'un hexagone régulier.

On construit six droites $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D, \Delta_E, \Delta_F$ passant respectivement par six points (A, B, C, D, E, F) donnés du plan telles que $\Delta_B = \mathfrak{R}(\Delta_A), \Delta_C = \mathfrak{R}(\Delta_B)$ etc. (\mathfrak{R} désigne la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$)



Existe-t-il une direction de Δ_A telle que l'hexagone (P, Q, R, S, T, U) construit par les intersections $\Delta_A \cap \Delta_B, \Delta_B \cap \Delta_C, \Delta_C \cap \Delta_D$ etc. soit régulier ?

Pour formaliser le problème, en généralisant la démonstration algébrique précédente on note $\Omega = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ la matrice de \mathfrak{R} . Les trois vecteurs normaux aux trois premières droites seront notés U_1, U_2, U_3 avec $U_2 = \Omega U_1$ et $U_3 = \Omega^2 U_1$.

En transposant⁹ le calcul d'intersection des droites Δ_A et Δ_B on trouve que P a pour coordonnées $K \begin{pmatrix} U_1.A \\ U_2.B \end{pmatrix}$ avec¹⁰ $K =$

⁸On peut remarquer que ce type de matrices, somme d'une matrice diagonale et d'une matrice antisymétrique a une très longue histoire algébrique. Déjà Cayley analysait le déterminants de telles matrices dès 1843 (la notion de matrice, elle ne sera introduite qu'en 1858, par le même mathématicien d'ailleurs(cf [?])). Les deux textes portent donc sur la réduction de ces déterminants, appelés *déterminants gauches* en somme de carrés. Ces calculs sont à la charnière entre les recherches sur de nouveaux nombres imaginaires suscitées par la découverte des quaternions par Hamilton en 1843, recherches associés à des décompositions en sommes de carrés, et les paramétrisations du groupe orthogonal qui apparaîtront(cf [?]) dans les années 1850. L'interprétation géométrique des coefficients de la partie antisymétrique de la matrice gauche, et leur paramétrisation par la formule de *Olinde Rodrigues*, est donnée dès le texte de 1846, sans référence au texte original ([?]) du mathématicien Bordelais.

⁹On a exactement $K = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix}$ où $U_1 = {}^t(u_1 \ v_1)$ et $U_2 = {}^t(u_2 \ v_2)$

¹⁰On convient que toute matrice carrée écrite avec des crochets doit être lue par ses vecteurs colonnes.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} [-\Omega V_1 \quad V_1] \text{ où } V_1 = {}^t (-v_1 \quad u_1).$$

Quand on va recommencer la recherche des coordonnées de Q , on sera amené à introduire la matrice $K' = \frac{2}{\sqrt{3}} [-\Omega V_2 \quad V_2]$

avec $V_1 = {}^t (-v_2 \quad u_2)$. Cette matrice K' est donc $\frac{2}{\sqrt{3}} [-\Omega^2 V_1 \quad \Omega V_1] = \Omega K$.

Il ne reste plus qu'à écrire les coordonnées des autres points par permutation circulaire.

$$P = K \begin{pmatrix} U_1 \cdot A \\ U_2 \cdot B \end{pmatrix} \quad Q = \Omega K \begin{pmatrix} U_2 \cdot B \\ U_3 \cdot C \end{pmatrix}, \quad R = \Omega^2 K \begin{pmatrix} U_3 \cdot C \\ U_1 \cdot D \end{pmatrix}.$$

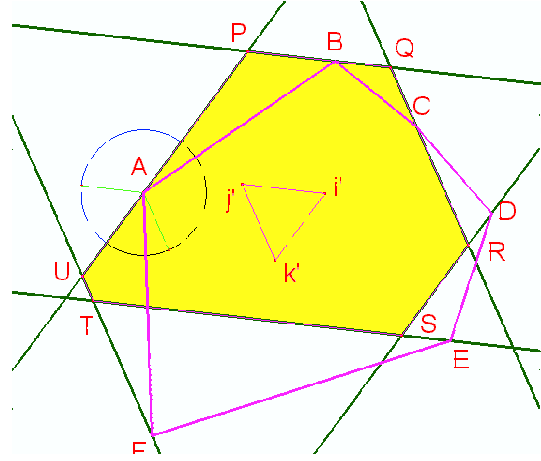
$$S = K \begin{pmatrix} U_1 \cdot D \\ U_2 \cdot E \end{pmatrix} \quad T = \Omega K \begin{pmatrix} U_2 \cdot E \\ U_3 \cdot F \end{pmatrix}, \quad U = \Omega^2 K \begin{pmatrix} U_3 \cdot F \\ U_1 \cdot A \end{pmatrix}.$$

V.1. Le triangle des milieux d'un hexagone construit par méthode Vacquant.

Appelons i j et k les milieux des diagonales du premier hexagone et i' j' et k' les milieux des nouvelles diagonales.

Proposition :

Le triangle $i' j' k'$ est toujours équilatéral, quelles que soient les positions des points de départ $A B$ etc. et quelle que soit la direction de la première droite construite.



Démonstration :

Les coordonnées de i' et j' sont d'après ce qui précède.

$$\frac{1}{2} K \begin{pmatrix} U_1 \cdot (A+D) \\ U_2 \cdot (B+E) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} U_1 \cdot i \\ U_2 \cdot j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \Omega K \begin{pmatrix} U_2 \cdot (B+E) \\ U_3 \cdot (C+F) \end{pmatrix} = \Omega K \begin{pmatrix} U_2 \cdot j \\ U_3 \cdot k \end{pmatrix}.$$

Donc en notant $a = U_1 \cdot i$ $b = U_2 \cdot j$ et $c = U_3 \cdot k$

$$\vec{i'j'} = \Omega K \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\|\vec{i'j'}\|^2 = (a \ b) {}^t K K \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (b \ c) {}^t K' \Omega \Omega K \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} - 2 (a \ b) {}^t K \Omega K \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}.$$

Si \mathbf{r} désigne la matrice de la rotation de $\frac{\pi}{3}$, et $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, il est facile de vérifier $\mathbf{r} K = K \mathbf{I}$ et donc $\Re K = K \mathbf{I}^2$.

Or comme nous avons déjà vu que ${}^t K K = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$${}^t K K \mathbf{I}^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

et compte tenu que Ω est orthogonale :

$$\|\vec{i'j'}\|^2 = (a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2) - 2 (a \ b) {}^t K \Omega K \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{i'j'}\|^2 = (a^2 + 2b^2 + c^2 + ab + bc - 2 (a \ b) {}^t K K \mathbf{I}^2 \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix})$$

$$\|\vec{i'j'}\|^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc) + (ba - b^2 + 2ca + cb) = (a + b + c)^2.$$

La symétrie de l'expression prouve donc la proposition.

V.2. Première condition nécessaire.

La première condition nécessaire pour pouvoir construire un hexagone régulier est donc de s'arranger pour que le triangle $(i'j'k')$ soit réduit à un point c'est-à-dire que

$$a + b + c = 0$$

ou

$$U_1 \cdot i + U_2 \cdot j + U_3 \cdot k = 0.$$

En revenant aux premières notations ceci donne :

$$U_1 \cdot i + \Re U_1 \cdot j + \Re^2 U_1 \cdot k = 0.$$

$$U_1 \cdot (i + \Re^2 j + \Re k) = 0.$$

Ce qui revient à prendre¹¹ U_1 orthogonal à $i + \Re^2 j + \Re k$.

V.3. Une condition nécessaire et suffisante.

Si on suppose que les diagonales de l'hexagone construit se coupent en leur milieu, une condition nécessaire et suffisante pour que cet hexagone soit régulier est que

$$\overrightarrow{PS} = \mathbf{r}^\varepsilon \overrightarrow{QT}$$

où l'on a écrit (\mathbf{r} pour désigner la rotation de $\frac{\pi}{3}$ et $\varepsilon = \pm 1$), donc

$$K \begin{pmatrix} U_1 \cdot (D - A) \\ U_2 \cdot (E - B) \end{pmatrix} = \mathbf{r}^\varepsilon \Omega K \begin{pmatrix} U_2 \cdot (E - B) \\ U_3 \cdot (F - C) \end{pmatrix}$$

et pour les autres diagonales

$$\Omega K \begin{pmatrix} U_2 \cdot (E - B) \\ U_3 \cdot (F - C) \end{pmatrix} = \mathbf{r}^\varepsilon \Omega^2 K \begin{pmatrix} U_3 \cdot (F - C) \\ U_1 \cdot (A - D) \end{pmatrix}$$

Or il est simple de remarquer $\mathbf{r}^\varepsilon \Omega = \mathbf{r}^{2+\varepsilon}$ qui vaut $-Id$ ou \mathbf{r} et donc que après simplification par K notre première équation devient si l'on pose $\alpha = U_1 \cdot (D - A)$ et $\beta = U_2 \cdot (E - B)$ $\gamma = U_3 \cdot (F - C)$

– Dans le cas où $\varepsilon = 1$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \gamma \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

Ce qui permet de retrouver

$$\alpha = -\beta = \gamma.$$

Dans le premier cas on trouve donc comme système de contraintes nécessaire et suffisant :

$$\begin{cases} U_1 \cdot (\overrightarrow{AD} - \Re^2(\overrightarrow{EB})) = 0 \\ U_1 \cdot (\overrightarrow{AD} - \Re(\overrightarrow{CF})) = 0 \\ U_1 \cdot (i + \Re^2 j + \Re k) = 0 \end{cases}.$$

– Dans le cas où $\varepsilon = -1$ on a

$$K \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathbf{r} K \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Or il est facile de voir qu'avec $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $\mathbf{r} K = K \mathbf{I}$ et donc l'équation devient

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathbf{I} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma \\ \beta + \gamma \end{pmatrix}$$

Ce qui va donner, compte tenu de la seconde équation $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dans le second cas l'hexagone dégénère en un triangle équilatéral $P = S, Q = T, R = U$, ce qui n'est pas très intéressant.

¹¹Une condition suffisante pour réaliser cette condition est par exemple d'annuler le vecteur $i + \Re^2 j + \Re k$. Or comme

$$i + \Re^2 j + \Re k = i - j + \Re(k - j) = 0 \iff \overrightarrow{ji} = -\Re(\overrightarrow{jk}),$$

avec $-\Re$ la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$, il suffit de prendre le triangle ijk équilatéral.

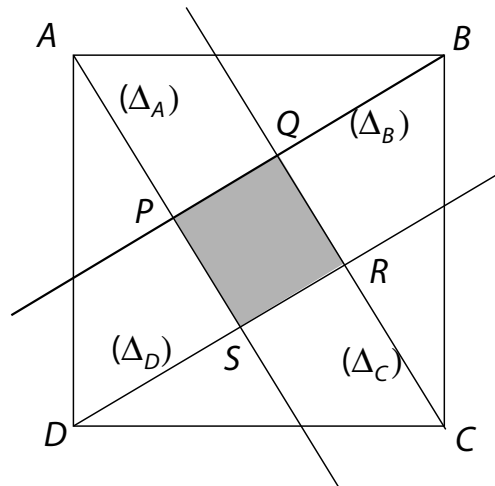
VI. Et dans nos classes ?

La formulation initiale du problème de Vacquant utilisant des configurations assez simples (parallélogramme, rectangle, droites parallèles, ...), on peut penser à transposer ce problème dans nos classes de lycée.

Le travail peut être facilement accessible dans le cas du quadrilatère $PQRS$ construit dans un carré ou un rectangle. Dans le cas d'un parallélogramme la rédaction des énoncés devient un peu trop rigide et semble artificielle. Il y peut-être moyen de la simplifier ? On s'est contenté dans la dernière partie de ce paragraphe d'indiquer une présentation possible sous forme de devoir libre.

VI.4. Dans un carré.

La première idée qui vient à l'esprit est de considérer le cas particulier d'un carré $ABCD$ mais l'étude est vite terminée car le quadrilatère $PQRS$ est toujours un carré.

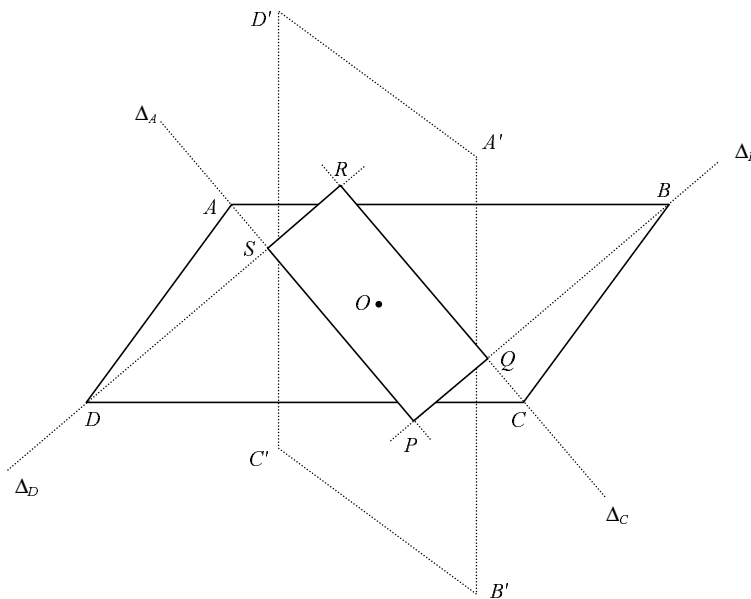


VI.5. Avec des outils de seconde.

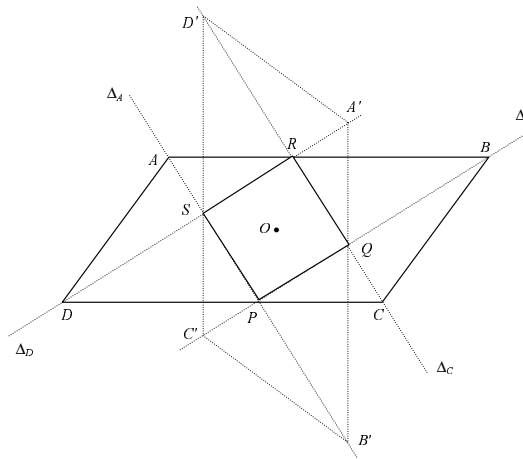
Considérons maintenant le cas du parallélogramme. Le quadrilatère construit $PQRS$ étant invariant par quarts de tours d'origine le centre du parallélogramme, on peut avoir l'idée d'augmenter la figure initiale de façon à ce qu'elle aussi le soit :

Toujours avec les mêmes notations à partir du parallélogramme $ABCD$. On note $A'B'C'D'$ son image par la rotation r de centre O , le centre du parallélogramme, et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

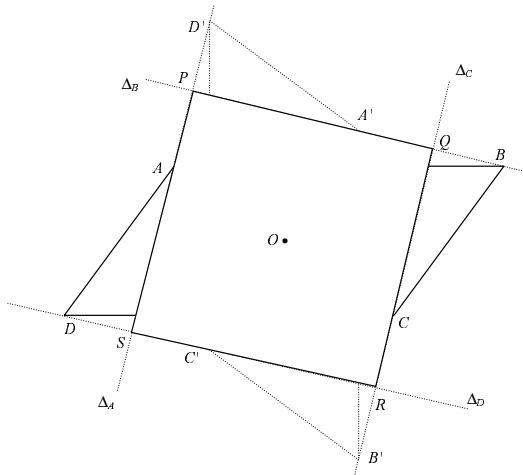
$PQRS$ est un carré si, et seulement si $r([PQ]) = [PS]$ ou $r([PQ]) = [QR]$ c'est-à-dire si, et seulement si $r(\Delta_B) = \Delta_A$ ou $r(\Delta_B) = \Delta_C$



Dans le cas où $r(\Delta_B) = \Delta_A$.
 Comme $B \in \Delta_B$, il faut que $B' \in \Delta_A$
 donc il faut que Δ_A passe par A et B'
 et réciproquement cela convient.



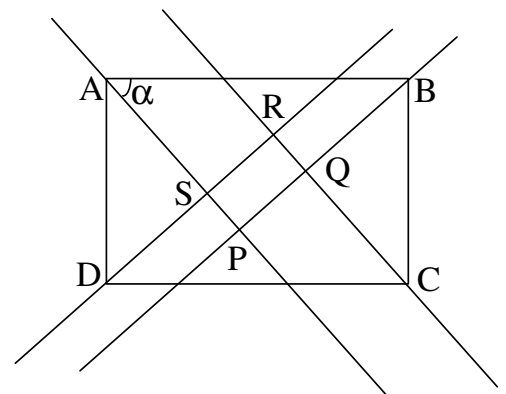
Dans le cas où $r(\Delta_B) = \Delta_C$.
 Comme $B \in \Delta_B$, il faut que $B' \in \Delta_C$
 donc il faut que Δ_C passe par C et B'
 et réciproquement cela convient.



VI.6. En terminale S.

La recherche de ce problème coïncidait avec un travail de création d'exercices pour des élèves de terminale. Voici un exemple de construction à l'aide des nombres complexes mais cette formulation d'exercice est trop guidée pour être intéressante dans le cadre de la nouvelle épreuve de maths au baccalauréat : elle ne laisse que peu de liberté à l'élève.

Dans le plan complexe (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère le rectangle $ABCD$ dont les points A, B, C et D ont pour affixes respectives a, b, c et d et tel que les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Par le point A , on mène une droite Δ_A quelconque. On construit successivement :
 la droite Δ_B perpendiculaire à la droite Δ_A passant par B ,
 la droite Δ_C perpendiculaire à la droite Δ_B passant par C ,
 la droite Δ_D perpendiculaire à la droite Δ_C passant par A .
 Les droites $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ et Δ_D se coupent deux à deux en P, Q, R et S comme sur la figure ci-dessous :



On note α l'angle $(\vec{AB}, \vec{\Delta_A})$. Par construction, le quadrilatère $PQRS$ est un rectangle. Le but de ce problème est de trouver une condition sur la droite Δ_A , donc sur α , pour que le rectangle $PQRS$ soit un carré.

1. a) Montrer que les triangles APB et BQC sont semblables.
 b) Justifier que $a + c = b + d$.
2. a) Montrer qu'il existe une unique similitude plane directe de centre P et telle que l'image de A soit le point B .

On note k_α le rapport $\frac{PB}{PA}$.

- b) Donner les éléments caractéristiques de cette similitude et une écriture complexe. En déduire l'affixe p de P en fonction de celles des sommets du carré $ABCD$ et de k_α .
 - c) En utilisant 1), donner les éléments caractéristiques de la similitude de centre Q et telle que l'image de B soit le point C . En déduire l'affixe q de Q en fonction de celles des sommets du carré $ABCD$ et de k_α .
 - d) De même, déterminer les affixes r et s respectivement de R et S en fonction de celles des sommets du carré $ABCD$ et de k_α .
- 3.
- a) Montrer que $\frac{q-p}{s-p} = -i \frac{k_\alpha AB - AD}{AB - k_\alpha AD}$.
 - b) Dans le cas où $PQRS$ est un carré, exprimer $q-p$ en fonction de $s-p$.
 - c) Répondre au problème initial.