Un exemple d'algébrisation élidée....

1 Introduction.

On considère le problème suivant :

> Montrer que toute application affine qui transforme toute conique d'excentricité e ($e \neq 1$) en une conique d'excentricité e est une similitude.

On peut remarquer d'abord, que l'on peut se borner à considérer des coniques de même centre, quitte à composer notre application affine par une translation. Nous allons d'abord transformer et résoudre le problème algébriquement avant d'envisager une simplification transversale.

2 Etude algébrique.

2.1 Notations.

Une équation cartésienne de la conique de départ est alors, par exemple

$$(E) : px^2 + 2qxy + ry^2 = 1.$$

Et se donner de la conique revient à introduire une matrice $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$ symétrique telle que

$$(E) : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Les valeurs propres λ et μ sont distinctes car sinon la conique est un cercle et le théorème est évident à condition de tolérer $e = 0$.

Prenons par exemple $\lambda < \mu$.

Si les signes de λ et μ sont différents, dans le cas d'une hyperbole on sait que les constantes de l'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sont telles que $\lambda = \frac{1}{a^2}$ et $\mu = \frac{1}{b^2}$.

On a donc $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$.

Dans le cas d'une ellipse toujours avec $\lambda < \mu$ on trouve la même formule puisque $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$.

Les réels λ et μ sont les racines du polynôme caractéristique

$$t^2 - \mathbf{Tr}(A)t + \det(A)$$

dont le discriminant Δ est réel en vertu du théorème spectral. On peut donc écrire

$$e^2 = \frac{2\sqrt{\Delta}}{\mathbf{Tr}(A)+\sqrt{\Delta}}.$$

Si nous appelons A' la matrice de la conique obtenue après la substitution linéaire de matrice associée M, on sait que $A' =^t MAM$ et donc que $\mathbf{Tr}(A') = \mathbf{Tr}({}^tMAM) = \mathbf{Tr}({}^tMMA)$.
De plus le discriminant de la nouvelle équation caractéristique Δ' vaut $\det(M)^2\Delta$. Ainsi l'invariance des excentricités conduit à l'équation

$$\frac{\mathbf{Tr}(A)+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} = \frac{\mathbf{Tr}(A')+\det(M)\sqrt{\Delta}}{2\det(M)\sqrt{\Delta}}$$

c'est-à-dire à l'équation

$$\det(M)\mathbf{Tr}(A) = \mathbf{Tr}(A').$$

On peut donc énoncer un problème équivalent au problème initial :

> Une matrice M qui permet d'écrire $\det(M)\mathbf{Tr}(A) = \mathbf{Tr}({}^tMMA)$ pour toute matrice symétrique A est nécessairement la matrice d'une similitude.

2.2 Un lemme intermédiaire.

Pour démontrer cette proposition nous aurons besoin d'un lemme intermédiaire.

> **Lemme** :
> Etant donnés deux réels λ et μ, distincts, l'ensemble des matrices symétriques de valeurs propres λ et μ contient au moins une base de l'espace des matrices carrées symétriques de taille deux.

Démonstration :
Soit t un réel pris dans l'intervalle $]\lambda;\mu[$.
Alors $P(t) = -(t-\lambda)(t-\mu)$ est strictement positif.
Considérons les trois matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et

$$C = \begin{pmatrix} \lambda+\mu-t & \sqrt{P(t)} \\ \sqrt{P(t)} & t \end{pmatrix}.$$

Elles ont toutes pour trace $\lambda+\mu$ et pour déterminants $\lambda\mu$. Elles ont donc toutes trois les mêmes valeurs propres λ et μ.
Si une combinaison $\alpha A + \beta B + \gamma C$ est nulle, on voit facilement que $\gamma\sqrt{P(t)} = 0$ et donc que $\gamma = 0$.
En observant les coefficients diagonaux de cette combinaison on obtient le système $\begin{cases} \lambda\alpha+\mu\beta = 0 \\ \mu\alpha+\lambda\beta = 0 \end{cases}$

dont le déterminant $\lambda^2 - \mu^2$ est non nul. Finalement la famille de matrices symétriques A, B, C est bien libre dans l'espace vectoriel (de dimension trois) des matrices symétriques. Elle en constitue donc une base.

2.3 Conclusion.

Revenons à la démonstration du point central.
Notons I la matrice identité et considérons une matrice M telle que pour toute matrice A symétrique

$$\det(M)\mathbf{Tr}(A) = \mathbf{Tr}({}^tMMA)$$

c'est-à-dire, puisque la trace est une forme linéaire

$$\mathbf{Tr}((({}^tMM - \det(M))I)A) = 0,$$

ou

$$\mathbf{Tr}({}^tBA) = 0$$

en notant B la matrice symétrique $({}^tMM - \det(M))I)$.
Comme l'application (A,B) associe $\mathbf{Tr}({}^tBA)$ est une forme bilinéaire symétrique et même un produit scalaire sur l'espace vectoriel des matrices symétriques deux-deux on déduit que B est orthogonal à toute matrice A symétrique associée à une conique d'excentricité e. Fixer e revient, on l'a vu, à fixer $\sqrt{1-\frac{\lambda}{\mu}}$ donc en fait le rapport des valeurs propres. Comme d'après le **lemme** l'ensemble des matrices dont on a fixé les valeurs propres contient une base de l'espace des matrices, *afortiori* l'ensemble des matrices d'excentricité donnée (qui correspond d'ailleurs à une surface de l'espace des matrices symétriques) contient aussi une base. Ceci permet donc enfin d'écrire que $B = ({}^tMM - \det(M))I) = 0$. Comme les termes diagonaux de ${}^tMM$ sont tous positifs on a nécessairement $\det(M) = d > 0$. Puisque la matrice $N = \frac{1}{\sqrt{d}}M$ qui vérifie ${}^tNN = I$ est orthogonale, M est la matrice d'une similitude.
Réciproquement on voit facilement que toute matrice de similitude permet d'écrire l'équation précédente. Cette remarque achève la démonstration algébrique du théorème.

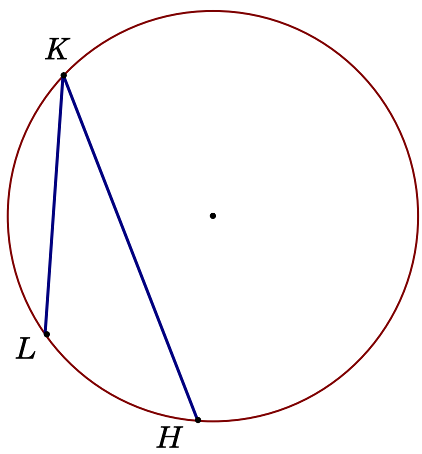
3 Comment supprimer les calculs en introduisant un peu de géométrie.

Puisque la formule qui exprime e en fonction des valeurs propres de la matrice de la conique est identique dans le cas de l'hyperbole et

de l'ellipse commençons par démontrer le théorème dans le cas d'une hyperbole.
En effet, dans ce cas, les asymptotes d'une hyperbole d'excentricité e seront transformées en deux droites asymptotes à la courbe image. Mais, toujours dans ce cas $\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$ représente la valeur absolue des pentes des hyperboles.
En conservant l'excentricité la substitution linéaire conserve donc la valeur absolue d'un angle.
On peut remarquer que la substitution linéaire est nécessairement bijective. En effet si elle transformait tout couple de vecteurs linéairement dépendants de la conique en un couple liée l'hyperbole ne serait pas transformée en une hyperbole (c'est d'ailleurs le même raisonnement avec une ellipse).
Supposons d'abord que le déterminant de cette transformation soit strictement positif. Dans ce cas la tangente de l'angle de droites direct défini par les premières asymptotes est transformé en un angle direct définissant la même tangente. Pour démontrer qu'on aboutit à une similitude il suffit de montrer que l'image de tout cercle du plan reste un cercle.
Soit (C) un cercle donné. Sur (C) on choisit un point K et l'on trace deux droites contenant K recoupant le cercle en H et L. Le cercle (C) (privé des points H et L) est exactement l'ensemble des points m du plan tels que

$$(mH, mL) \equiv (KH, KL) \quad [\pi]$$

et est entièrement déterminé par la donnée des points H, L et de l'angle (KH, KL). Son image sera définie par le même angle et les images de L et de H.



Dans ce cas on trouve donc une similitude directe. Si maintenant la substitution est indirecte, on peut commencer par la composer par une réflexion fixée. On se ramène ainsi au cas d'une substitution directe qui conserve encore les hyperboles d'excentricité donnée. Ainsi dans ce cas on trouve une similitude indirecte.

Puisque la relation $e = \phi(a, b, c) = \Phi(A)$ qui exprime la relation qui unit les composantes de la matrice A de la conique et l'excentricité ne dépend pas de la nature de la conique, on peut étendre les calculs qui expriment cette implication (et que l'on ne fait pas !) mais qui sont vrais pour les hyperboles au cas des ellipses. Le théorème est donc démontré.