Fiche élève (version soft)

Hyperbole, cercle et complexes…

Le plan est muni d'un repère d'origine o.

Question 1

a) **Conjecture**

Tracer à l'écran l'hyperbole H d'équation $y = \dfrac{x}{x-1}$.

Créer un point M libre sur l'hyperbole H puis créer son affixe *z*. Faire afficher *z*.

On associe à M le point M' d'affixe $z' = z^2 - 2(1+i)z$.

Conjecturer l'ensemble des points M' lorsque M décrit H.

b) **Démonstration**

Démontrer votre conjecture.

Indication : vous exprimerez z' en fonction de x.

Attention : il y a une double inclusion à démontrer.

Question 2

a) **Conjecture**

1. Tracer le cercle Γ de centre o et de rayon $2\sqrt{2}$.
2. En déplaçant le point mobile M, créé à la question 1, conjecturer les coordonnées entières du point d'intersection A de H et de Γ qui a une abscisse et une ordonnée positives.
   Vérifier le résultat par un calcul mental. Créer le point A.
3. Créer le point B image du point A par la rotation de centre o et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

   Créer de même l'image C du point B par cette même rotation.
   Qu'observez-vous ?

b) **Démonstration**

Démontrer votre conjecture.

Corrigé (version soft)

Hyperbole, cercle et complexes…

Cette activité peut être réalisée en utilisant la version de Geoplan-Geospace comportant un module « Nombres complexes ».

Quelques éléments de réponses

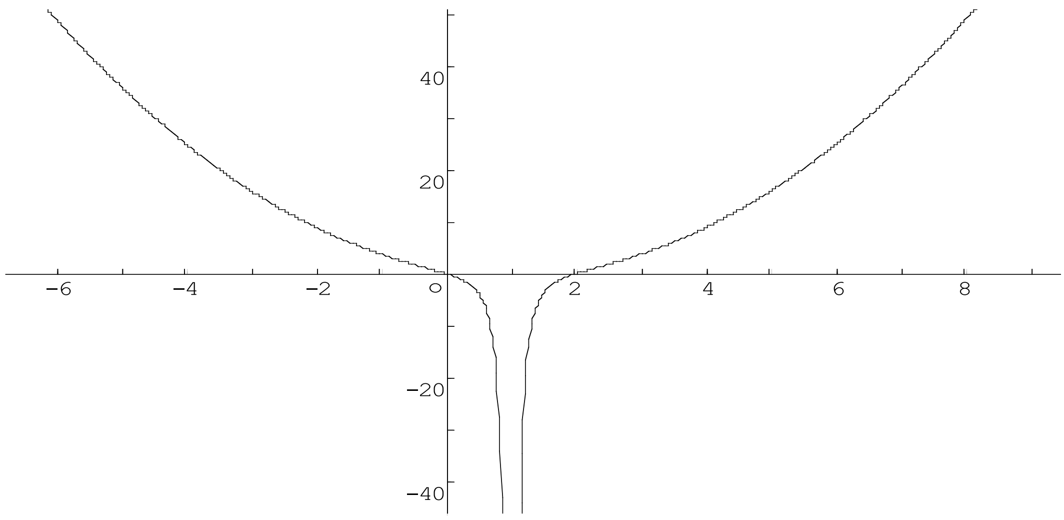
Question 1

Par le calcul, on trouve $z' = \dfrac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x}{(x-1)^2}$.

Donc pour tout point M de H, M' se trouve sur l'axe des abscisses.

Réciproquement, en posant $f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x}{(x-1)^2}$, sans déterminer le sens de variation de *f*, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que *f* prend toutes les valeurs réelles lorsque *x* décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Voici l'allure de la courbe de *f* que l'élève peut visionner à l'écran de sa calculatrice :



Donc le lieu des points M' lorsque M décrit H est l'axe des abscisses.

Question 2

On trouve $A(2;2)$.

Par le calcul, on trouve $z_B = -1 - \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i$ et $z_C = -1 + \sqrt{3} + (-1 - \sqrt{3})i$.

ABC est par construction équilatéral.

Il reste à justifier que B et C appartiennent à H.