Fiche élève (version hard)

Hyperbole, cercle et complexes…

Le plan est muni d'un repère d'origine o.

Question 1

a) **Conjecture**

Tracer à l'écran l'hyperbole H d'équation $y = \dfrac{x}{x-1}$.

Créer un point M libre sur l'hyperbole H puis créer son affixe *z*. Faire afficher *z*.

On associe à M le point M' d'affixe $z' = z^2 - 2(1+i)z$.

Conjecturer l'ensemble des points M' lorsque M décrit H.

b) **Démonstration**

Démontrer votre conjecture.

Question 2

a) **Conjecture**

1. Tracer le cercle Γ de centre o et de rayon $2\sqrt{2}$.
2. En déplaçant le point mobile M, créé à la question 1, conjecturer les coordonnées entières du point d'intersection A de H et de Γ qui a une abscisse et une ordonnée positives.
   Vérifier le résultat par un calcul mental. Créer le point A.
3. Créer deux points libres B et C. Les placer sur les deux autres points d'intersection de H et de Γ.
   Conjecturer la nature du triangle ABC.

b) **Démonstration**

Démontrer votre conjecture.

Corrigé (version hard)

Hyperbole, cercle et complexes…

Cette activité peut être réalisée en utilisant la version de Geoplan-Geospace comportant un module « Nombres complexes ».

Quelques éléments de réponses

Question 1

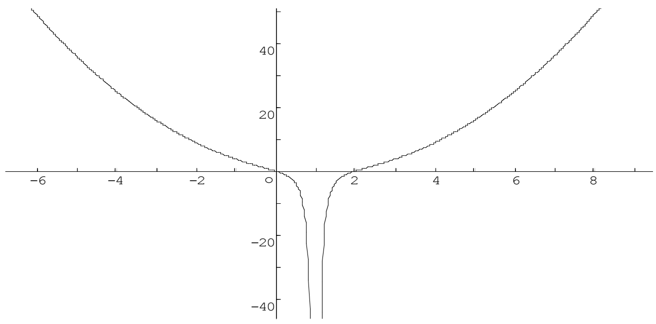
Par le calcul, on trouve $z' = \dfrac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x}{(x-1)^2}$.

Donc pour tout point M de H, M' se trouve sur l'axe des abscisses.

Réciproquement, en posant $f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x}{(x-1)^2}$, sans déterminer le sens de variation de *f*,

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que *f* prend toutes les valeurs réelles lorsque *x* décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Voici l'allure de la courbe de *f* que l'élève peut visionner à l'écran de sa calculatrice :



Donc le lieu des points M' lorsque M décrit H est l'axe des abscisses.

Question 2

On trouve $A(2;2)$.

Le triangle ABC semble équilatéral.

Plusieurs stratégies sont possibles :

- Introduire la rotation de centre o et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Calculer les affixes des points B et C images de A et B par cette rotation.
  On trouve : $z_B = -1 - \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i$ et $z_C = -1 + \sqrt{3} + (-1 - \sqrt{3})i$.
  Alors ABC est par construction équilatéral. Il reste à justifier que B et C appartiennent à H.
- Remarquer que B et C semblent appartenir à la droite d'équation $y = -x - 2$ et résoudre l'équation $x^2 + (x+2)^2 = 8$. On trouve les affixes ci-dessus. Il reste à justifier que B et C appartiennent à H puis, par exemple, que AB = BC = AC.
- Résoudre le système d'équations $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = \dfrac{x}{x-1} \end{cases}$.

  On est amené à résoudre l'équation $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 16x - 8 = 0$ qui admet 2 comme racine et est équivalente à $(x-2)(x^3 - 6x + 4) = 0$ puis à $(x-2)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$.
  On trouve comme solutions 2, $-1 + \sqrt{3}$ et $-1 - \sqrt{3}$ puis les affixes de B et C mentionnés ci-dessus. Il reste à justifier que le triangle ABC est équilatéral.