Commission Inter IREM (Université)

Exposé

Effet des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants.

Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur.

Ridha NAJAR
Laboratoire LDAR
Université Paris Diderot-Paris 7

Sommaire

I. La problématique et le contexte de la recherche

I. 1. La problématique

1. Un constat de difficultés partagé entre enseignants, étudiants et opinion publique dans plusieurs pays.

2. Des difficultés d'apprentissage dues, entre autres facteurs, à :

- **l'écologie des notions ensemblistes** dans les programmes du Secondaire ;

- **l'obstacle du formalisme** dans le Supérieur.

3. Des difficultés mises en évidence dans plusieurs travaux de recherche dans différents pays.

Ces travaux peuvent être organisés selon trois axes principaux :

- **cognitif ;**
- **institutionnel et culturel ;**
- **usage de la logique et du formalisme mathématique.**

❖ Les approches cognitives

Ces approches se sont surtout développées dans les travaux anglo-saxons : Dubinsky (1991) (APOS Theory), Sfard (1991) (Les trois phases de formation d'un concept mathématique), Tall (2002) (The three worlds of mathematics), …

Pour ces approches, la transition est étudiée comme le passage d'une **pensée mathématique élémentaire** à **une pensée mathématique supérieure.**

Elles conduisent à distinguer deux niveaux dans la connaissance et l'usage d'un concept mathématique :

✓le niveau ***procédural*** (le concept comme *processus*)

✓le niveau ***structurel*** (le concept comme *objet*).

La possibilité de caractériser de façon conforme les objets mathématiques et d'acquérir une pensée mathématique opératoire et efficace est liée aux possibilités de **nouer des rapports dialectiques entre ces deux niveaux**.

❖ Les approches institutionnelles et culturelles

Pour ces approches, il existe **une culture mathématique propre à chaque institution :**

Praslon, (2000), Bloch (2000), Bosch et al. (2004), Gueudet, (2005), Ghedemsi, (2008)… ont mis en évidence des éléments qui caractérisent le changement culturel dans le passage du lycée à l'université :

- Accélération du temps didactique à l'université.

- Evolution du degré d'autonomie requis dans l'apprentissage.

- Evolution des objets d'enseignement et accroissement du niveau d'abstraction.

- Modification du contrat didactique (exigences de rigueur, modes de validation).

Selon ces approches, les difficultés de la transition sont associées à **des discontinuités institutionnelles et culturelles insuffisamment prises en compte**.

❖ L’usage de la logique et du formalisme mathématique

Dorier (1997), Durand-Guerrier et Arsac (2003), Chellougui (2004), Corriveau (2007)… ont pointé chez les étudiants entrant à l’université **des déficiences en logique élémentaire et des difficultés dans l’usage du langage ensembliste.**

Ces déficiences et ces difficultés conduisent souvent **à des blocages dans la résolution des problèmes** et rendent souvent **inopérantes les connaissances mathématiques** mobilisées.

Pour ces auteurs, cette situation est due au fait que le langage ensembliste et le symbolisme dans lesquels sont exprimées les mathématiques enseignées à l'université, ainsi que les règles de logique qui régissent les énoncés mathématiques ne sont pas vraiment introduits au lycée et seulement par la « bande » à l'université.

I. 2. Les objectifs de notre recherche :

- ✓**comprendre les origines des difficultés de la transition** compte tenu de la spécificité du système d'enseignement tunisien;

- ✓**étudier les effets de ces difficultés** sur les possibilités d'apprentissage des étudiants ;

- ✓**développer une action visant à remédier aux difficultés constatées**.

I. 3. Le contexte de la recherche

✓**Domaine d'étude :** Les notions fonctionnelles dans leurs aspects ensembliste et algébrique.

✓**Type d'activité :** la résolution de problèmes.

✓**Population d'étude :** étudiants de première année des classes préparatoires scientifiques.

II. Le cadre théorique et la méthodologie de recherche

II. 1. Le cadre théorique

Notre recherche se situe essentiellement dans une approche anthropologique portée par :

- ✓ **la théorie anthropologique du didactique** (TAD) (Chevallard 1989) ;
- ✓ **la notion de discontinuité des organisations praxéologiques mathématiques** (rigidité d'une technique, complétude/incomplétude des organisations mathématiques) (Bosch et al., 2004) ;
- ✓ **la notion de composante pratique d'une technologie**, (Castela, 2008).

Nous prenons aussi en compte les acquis des approches cognitives, notamment en ce qui concerne :

✓ La forme du savoir construit : **procédural/structurel** (Dubinsky & Tall)

✓ Les **niveaux de mise en fonctionnement des connaissances** (*technique, mobilisable, disponible*) (Robert, 1998)

II. 2. La méthodologie de recherche

Elle combine trois dimensions principales :

1) Une **étude des rapports des institutions** enseignement secondaire (ES) et première année des classes préparatoires scientifiques (CPS1) aux notions ensemblistes fonctionnelles (**EF**) et au formalisme mathématique associé (continuité/discontinuité, complétude/incomplétude et potentialités des programmes d'étude)

Comprendre les origines des difficultés de la transition

2) Une **étude des rapports personnels** des étudiants entrant en CPS1 aux notions **EF** et de leur évolution après deux trimestres d'étude.

Étude des effets des choix institutionnels sur les possibilités d'apprentissage des étudiants.

3) L'élaboration et l'expérimentation d'**une ingénierie didactique**.

Etude des possibilités de remédiation par action au niveau de l'enseignement

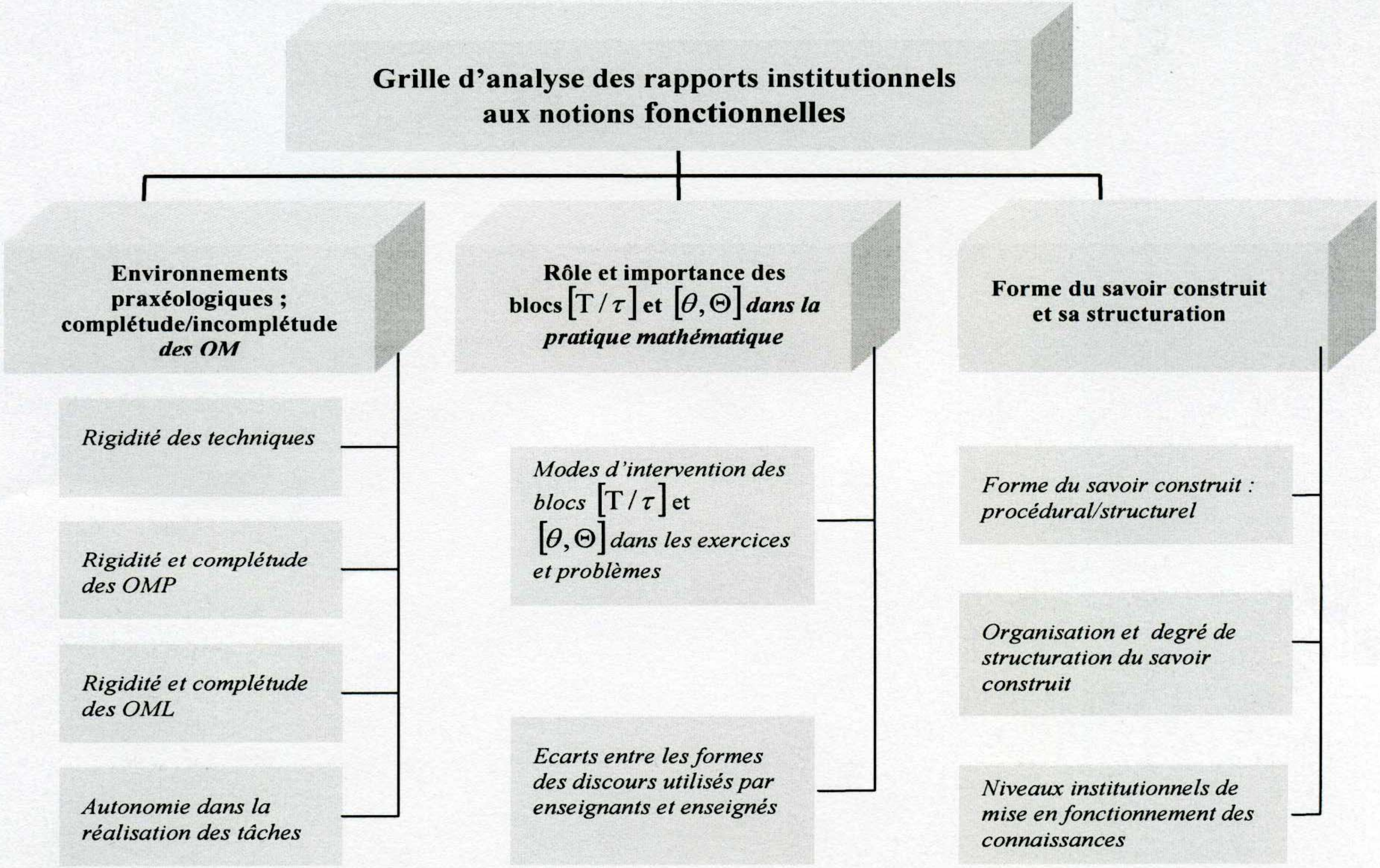
III. Les rapports institutionnels

Matière de base de nos analyses :

✓Pour l’institution ES : programmes, manuels officiels et sujets de baccalauréat ;

✓Pour l’institution CPS1 : programmes, polycopies de cours et fiches de travaux dirigés (dans le domaine de l’Algèbre).

Diagramme 1 : Grille d'analyse des rapports institutionnels



Résultats des analyses

Les environnements praxéologiques :

	Institution ES	Institution CPS1
Niveau dominant des praxéologies	Ponctuel	Local
Caractéristique dominante des techniques	Rigide/Moyennement rigide	Rarement rigide
Mode d'intervention des praxéologies le plus fréquent	Bloc pratico-technique	Bloc technologico-théorique
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Technique	Mobilisable/Disponible
Ecart entre le fonctionnement des connaissances dans le topos des apprenants et dans celui des enseignants	Fort	Faible

Le savoir construit :

Dans l’enseignement secondaire	Dans les classes CPS1
Malgré la présence et **la nécessité d’usage des notions** EF dans les programmes d’étude de l’ES, nous constatons un **vide institutionnel** concernant la façon d’introduire et de travailler ces notions.	Les notions de base de la théorie des ensembles est **un objectif d’étude**. Les programmes officiels le mentionnent explicitement et précisent le contenu théorique à enseigner.
Absence dans les manuels officiels de présentation générale de la plupart des notions utilisées et un manque d’institutionnalisation des propriétés et des règles d’usage de ces notions, avec présence d’un discours technologique assez formel dans les développements théoriques des cours.	Les notions sont explicitement présentées dès le début de façon structurée, générale et fonctionnent au niveau formel-structurel aussi bien dans les cours que dans les exercices .

Un exemple: la notion de bijection

1) Dans l'enseignement secondaire

- ➢ rôle important dans l'étude théorique des transformations géométriques et dans la réalisation des tâches qui leur sont associées ;
- ➢ intervient aussi en analyse dans l'étude des fonctions numériques;
- ➢ mais nous ne rencontrons dans les manuels officiels (programmes de 1998) aucun thème consacré à la présentation générale de cette notion ni à l'institutionnalisation de ses propriétés. Ces notions sont introduites au gré des besoins ;
- ➢ la plupart des techniques de travail, sont institutionnalisées dans des exercices types corrigés dans les manuels, dont la reproduction ne requiert pas de se référer aux propriétés ensemblistes sous-jacentes.

Les tâches associées dans les exercices

En géométrie :

elles se réfèrent aux deux propriétés exclusives suivantes :

- Si f est bijective, $N=f(M)$ équivaut à $M=f^{-1}(N)$
- Pour une bijection f de P sur P, $fof^{-1}=Id$

En analyse :

➢ c'est le théorème sur les fonctions continues et strictement monotones qu'on utilise toujours pour :

- montrer qu'une fonction numérique est bijective ;
- montrer qu'une équation admet une solution unique dans un intervalle donné.

➢ la détermination de f^{-1} s'effectue toujours via la résolution de l'équation en x : $y=f(x)$.

Exemples de techniques de travail liées à la notion de bijection dans ES (manuel officiel de géométrie de la classe terminale)

Dans un plan orienté, on considère deux points fixes A et B et les rotations $R_A = R(A, \frac{\pi}{2})$ et $R_B = R(B, \frac{\pi}{2})$. Pour tout M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par R_A et R_B. On veut déterminer l'image par l'application $T = R_B o R_A^{-1}$ du point M_1 :

On a : $T(M_1) = R_B o R_A^{-1}(M_1)$

Comme $M_1 = R_A(M)$, alors $R_A^{-1}(M_1) = M$

D'où : $T(M_1) = R_B(M) = M_2$

1) Soit la transformation $T = t_{\vec{u}} o S_D = S_D o t_{\vec{u}}$ (où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D).

Déterminer la nature de la transformation ToT :

$ToT = t_{\vec{u}} o S_D o S_D o t_{\vec{u}} = t_{2.\vec{u}}$

2) Déterminer la nature de la transformation K telles que : $K\, o\, H(D, \sqrt{2}) = S(D, \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$

$K = R(D, \frac{3\pi}{4}) o H(D, \sqrt{2}) o H(D, \frac{\sqrt{2}}{2}) = R(D, \frac{3\pi}{4})$

Extrait du sujet de Baccalauréat (juin 2005)

Soit f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{x}}$

et soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

A- 1) Dresser le tableau de variation de f

2) a- Déterminer les branches infinies de (C)

b- Tracer (C)

3) a- Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$

b- Tracer la courbe (C') représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f.

c- Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$

Extrait du sujet de Baccalauréat (juin 2007)

Dans tout le problème n désigne un entier naturel on nul

A- 1) Soit g_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $g_n(x) = n(x+1) + e^x$

a- Dresser le tableau de variation de g_n

b- Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans $\mathbf{R}$ une unique solution α_n .

c- Prouver que $-2 < \alpha_n < -1$

d- En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Dans les classes CPS1

- La notion de bijection joue un rôle important et constitue un outil essentiel dans les différents thèmes d'étude.

- Les résultats technologiques sont développés et démontrés de façon détaillée dans les cours. Certaines démonstrations sont laissées à la charge des étudiants.

- La réalisation des tâches données aux étudiants requiert généralement un discours technologique assez théorique et formel très proche de celui utilisé dans les cours.

- Il y a une absence presque totale d'exercices illustrant de façon pratique et simple les résultats théoriques établis dans les cours.

Exemple d'exercice donné dans la première fiche de TD d'Algèbre des classes CPS1 (2005/2006) :

Soient E, F, G et H quatre ensembles tels que H possède au moins deux éléments et f une application de F vers G. On désigne par $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E vers F.

1) Montrer que :

a- f est injective $\Leftrightarrow$ $[\forall\, g, h \in \mathcal{F}(E, F), (fog = foh \Rightarrow g = h)]$

b- f est surjective $\Leftrightarrow$ $[\forall\, g, h \in \mathcal{F}(G, H), (gof = hof \Rightarrow g = h)]$

2) Soit $u \in \mathcal{F}(E, F)$, $v \in \mathcal{F}(G, H)$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F}(F, G) &\rightarrow \mathcal{F}(E, H) \\ f &\mapsto \varphi(f) = vofou \end{aligned}$$

Montrer que si u est surjective et v est injective, alors φ est injective.

IV. Les rapports personnels

Méthodologie d'étude

Notre travail est organisé selon trois axes

- Un **test diagnostique** soumis aux étudiants de deux classes de CPS1 le premier jour de la rentrée universitaire.
- Un **test d'évaluation** passé avec les mêmes étudiants après deux trimestres d'enseignement.
- Un **questionnaire** sur les modalités de travail personnel des étudiants.

Les tests diagnostique et d’évaluation

Le test diagnostique	Le test d'évaluation
Insuffisances et fragilité dans les connaissances technologico-théoriques.	Connaissances « brutes » généralement bien apprises.
Aptitudes à réaliser convenablement des tâches routinières dont les techniques ne nécessitent pas de se rapporter aux notions ensemblistes sous-jacentes.	Possibilités à mobiliser les connaissances théoriques étudiées dans des tâches familières et moins familières.
Difficultés dans l'usage et la gestion du symbolisme mathématique et dans le travail hors des contextes familiers.	Difficultés dans l'usage du langage ensembliste et dans la mobilisation des connaissances dans des tâches non routinières, entrainant des difficultés résistantes au niveau du raisonnement.

Des exemples illustratifs

Pour le test diagnostique :

Pour tout réel x on pose : $f(x) = - x^3$
Montrer que f définie une bijection de **R** *sur* **R** *et déterminer sa bijection réciproque*

	Réponse correcte (C+)	Réponse correcte (C-)	Réponses fausses	Sans réponse
Tâche 1 (f bijection)	75 %	25 %	0	0
Tâche 2 (Détermination de f^{-1})	14 %	0	69 %	17 %

Tableau 1 : Erreurs relatives à la bijection réciproque de $f(x) = -x^3$

$\begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x},\ si\ x \in IR_+ \\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x},\ si\ x \in IR_- \end{cases}$	$\begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{-x},\ \forall x \in IR_- \\ f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x},\ \forall\ x \in IR_+ \end{cases}$	$y = -\sqrt[3]{\lvert x \rvert}$	$\forall\ x \in IR,\ f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$
$\begin{cases} si\ x \in IR_-,\ y = \sqrt[3]{-x} \\ si\ x \in IR_+,\ y = \sqrt[3]{\lvert -x \rvert} \end{cases}$	$\begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{y},\ si\ x \in IR_- \\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-y},\ si\ x \in IR_+ \end{cases}$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\lvert -x \rvert}$	$\forall\ x \in IR,\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x}$
		$f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{y},\quad y \in IR$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-y},\quad y \in IR$

Pour le test d'évaluation :

Exercice

A est une matrice de $M_n(\mathbf{C})$. On considère l'application f_A de $M_n(\mathbf{C})$ dans lui-même définie par : $f_A(M) = AM - MA$

1) a- Montrer que f_A est une application linéaire.
b- En déduire que l'ensemble **F** des matrices M de $M_n(\mathbf{C})$ vérifiant: $MA = AM$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{C})$.

2) a- Calculer $f_A(I_n)$ où I_n désigne la matrice unité de $M_n(\mathbf{C})$.
b- Existe-t-il des matrices A de $M_n(\mathbf{C})$ telles que f_A soit injective ?
c- Existe-t-il des matrices A de $M_n(\mathbf{C})$ telles que f_A soit surjective ?

Question 1-b : F est un *sev* de M_n(C).

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
72 %	5 %	23 %	0 %

b°) $F = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, MA = AM \}$ sev de $\mathcal{M}_n \mathbb{C}$?

(i) $F \neq \emptyset$ car $O_n \in F$ $(OA = O = AO)$.

$F = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, f_A(M) = 0 \}$.

ii) $\forall M, N$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $\quad f_A(\lambda M + N) = 0 \Leftrightarrow$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\quad \Leftrightarrow \lambda f_A(M) + f_A(N) = 0$ car f linéaire.

$\Rightarrow f_A(\lambda M + N) \in F$.

∴ cl F est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Question 1-b : F est un *sev* de M_n(C).

b/ $F = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid MA = AM \}$ SeV de $M_n(\mathbb{C})$

i/ $F \neq \emptyset$ car $A \in F$ $(A^2 = A^2)$.

?? ii/ on a $F = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid f_A(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \}$.

or comme f_A est une application linéaire de la

$f_A(\lambda M + N) = \lambda f_A(M) + f(N) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} + f(N) \in F.$

Alors F est un SeV.

Question 2-b : Existe-t-il des matrices A de $M_n(C)$ telles que f_A soit injective ?

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
37 %	16 %	40 %	7 %

f_A injective $\Rightarrow$ $\ker f_A = \{0\}$

or $f_A(I_n) = 0$

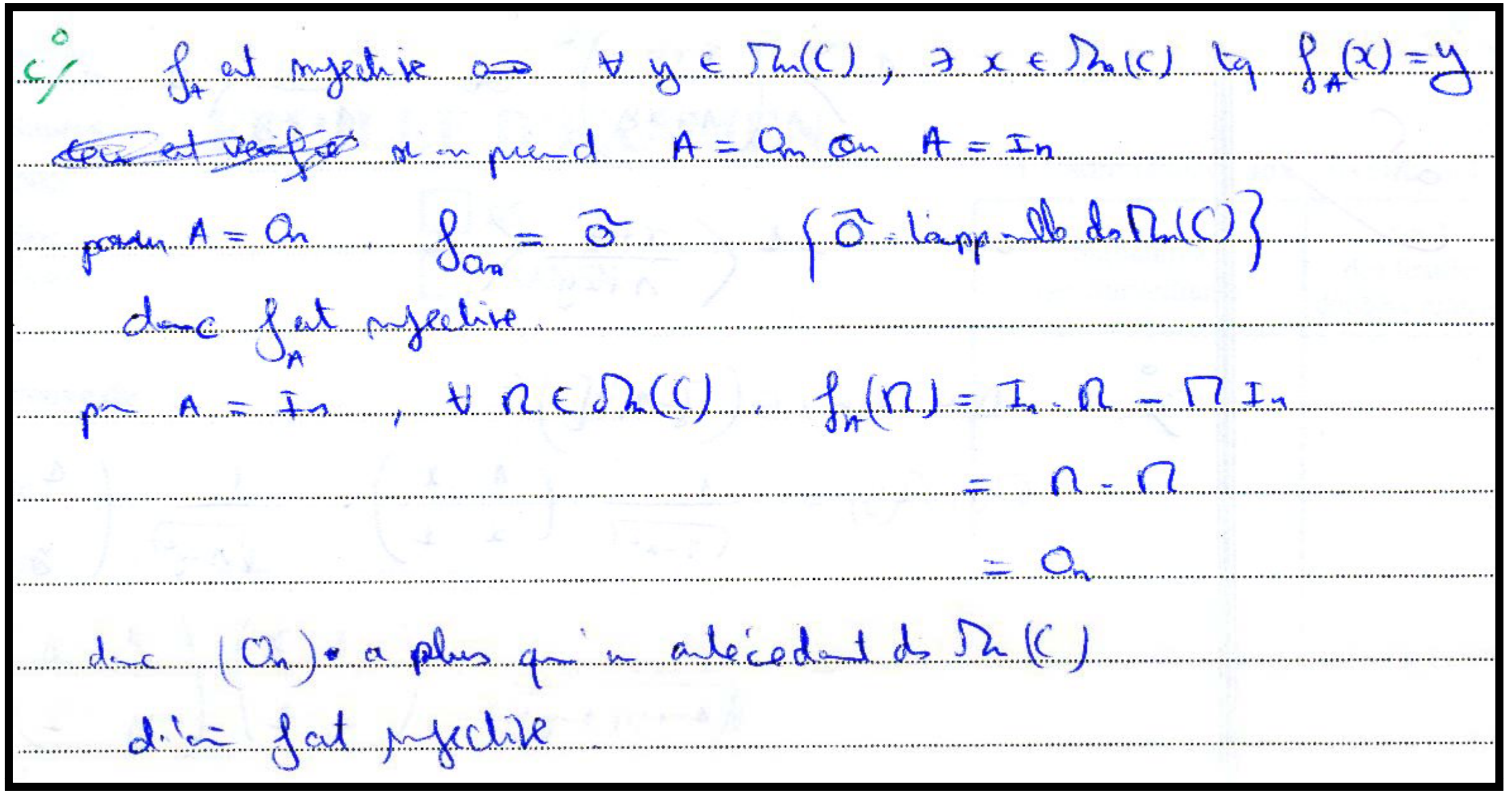
$\Rightarrow$ $I_n = \ker f_A$

$\Rightarrow$ $\exists\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ / f_A injective

qui n'est autre que la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Question 2-c : Existe-t-il des matrices A de $M_n(\mathbf{C})$ telles que f_A soit surjective ?

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
21 %	0 %	49 %	30 %


c/ f_A est surjective $\Leftrightarrow$ $\forall y \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists x \in M_n(\mathbb{C})$ tq $f_A(x) = y$

~~ceci est vérifié~~ si on prend $A = O_n$ ou $A = I_n$

pour $A = O_n$ $\quad f_{O_n} = \tilde{O}$ $\quad \{\tilde{O}$: l'application nulle de $M_n(\mathbb{C})\}$

donc f_A est surjective.

pour $A = I_n$, $\forall M \in M_n(\mathbb{C})$, $f_A(M) = I_n . M - M I_n$

$= M - M$

$= O_n$

donc (O_n) a plus qu'un antécédent de $M_n(\mathbb{C})$

d'où f_A est surjective

Le questionnaire

Objectifs :

✓étudier l'influence des contraintes institutionnelles sur les modes de travail personnels des étudiants ;

✓étudier les liens éventuels entre ces modes de travail et les difficultés constatées dans le test d'évaluation.

Les réponses

Habitudes de travail non conformes aux exigences de formation en CPS1.

Ces habitudes se caractérisent notamment par :

- ✓ une **faible attention portée aux aspects théoriques** des enseignements ;
- ✓ une **centration sur la mémorisation et l'imitation.**

V. La recherche d’une remédiation

Objectif :

Étudier la possibilité d’améliorer les aptitudes des étudiants dans l’activité de résolution de problèmes, et particulièrement dans la mise en fonctionnement des notions EF, et ce en agissant sur les habitudes de travail des étudiants.

Éléments orientant la conception générale de l'ingénierie :

Les travaux antérieurs montrent que les difficultés qu'éprouvent les étudiants se situent essentiellement dans les points suivants :

- obstacles dus à **l'aspect formel et abstrait des mathématiques** enseignées ;
- difficultés dans **l'usage du symbolisme mathématique** ;
- difficultés dans **la mise en fonctionnement des notions étudiées**.

Ces difficultés sont associées à **la pratique des mathématiques**. Il s'agit de connaissances ancrées dans l'expérience, qui débordent le savoir théorique mais qui s'avèrent **nécessaires pour son fonctionnement**.

Conception générale de l’action de remédiation :

Cette action s’est articulée autour de deux axes :

1) Les travaux de Duval (2000) concernant **le rôle de l’écrit dans l’activité mathématique**.

2) Les travaux de Castela (2008) relatifs aux **composantes pratiques des praxéologies mathématiques**.

Concernant le second axe, une ingénierie didactique a été conçue et implémentée avec un groupe réduit d’étudiants. Cette ingénierie comportait deux parties :

- ✓ une partie diagnostique (2 séances) ;
- ✓ une partie de remédiation et d’évaluation (3 séances).

La partie diagnostique a mis en évidence :

- ✓**des acquis** chez les étudiants sur le plan de **la connaissance du savoir enseigné** ;
- ✓**des aptitudes** dans la réalisation **des tâches de démonstration** ;
- ✓**des difficultés** dans la réalisation de **tâches de construction ou de preuve d'existence** d'objets mathématiques.

Ces difficultés apparaissent à trois niveaux :

- **Stratégique :** exploration de l'espace de résolution, élaboration de stratégies de travail, choix et pilotage de techniques non indiquées ;

- **Contrôle et exploitation du Milieu :** manque de sensibilité aux ostensifs, interprétations inadaptées des représentations sémiotiques, reformulations de données non pertinentes et/ou non opératoires ;

- **Conceptuelle :** distinction entre le monde ensembliste et celui de l'algèbre linéaire.

La remédiation :

Notre travail dans les séances de remédiation s’est organisé autour de:

- ✓**les processus d’exploration du Milieu** ;
- ✓**l’exploitation pertinente de ses composants** ;
- ✓**la prise de conscience de ses rétroactions.**

Organisation des séances de remédiation :

- **Les exercices :** peu familiers, avec des tâches dépourvues d’indications, requérant organisation, disponibilité et mise en relation de connaissances, ainsi que l’identification de problèmes intermédiaires.

- **Les séances :** sont aménagées de façon à favoriser les échanges et les interactions entre étudiants.

- **Rôle de l’enseignant :** des interventions minimales de la part de l’enseignant sont introduites sur les copies des étudiants en vu d’enrichir le milieu de résolution et de favoriser les rétroactions avec ce milieu.

Résultats de l'ingénierie

Des améliorations au niveau de :

- ✓l'exploration de l'espace de résolution ;
- ✓la mobilisation des connaissances ;
- ✓l'organisation, la cohérence et le contrôle des connaissances utilisées ;
- ✓l'usage du symbolisme mathématiques ;
- ✓la rédaction des solutions produites.

Des difficultés persistantes au niveau de :

- ✓l'identification de données non indiquées ou l'adoption d'un cadre de travail non suggéré ;
- ✓la gestion des formulations symboliques complexes ;
- ✓La construction d'objets sous contraintes.

VI. La conclusion

Notre recherche montre, semble t-il :

- la pertinence d'une approche anthropologique institutionnelle, alliée à des catégorisations émergeant d'approches épistémologiques cognitives dans l'étude et l'explication des difficultés résultantes de la transition Secondaire/Supérieur ;

- le rôle crucial que joue le monde ensembliste et le symbolisme mathématique, notamment en ce qui concerne les notions fonctionnelles, dans cette transition.

Elle met en évidence :

- **une rupture et un dysfonctionnement institutionnels, des discontinuités dans les environnements praxéologiques** et montre **leur impact sur les possibilités d'apprentissage** des étudiants ;

- **des difficultés chez les étudiants pour se conformer aux exigences de la formation visée** par l'institution CPS1 et pour **acquérir de façon autonome des connaissances d'ordre pratique** ignorées par l'institution mais qui s'avèrent nécessaires pour leur réussite.

Nous constatons que :

- l'environnement praxéologique des notions **EF** dans l'institution ES présente **des potentialités et des précurseurs** pouvant être exploités pour un premier apprentissage de ces notions et pour permettre des ponts entre les mathématiques du Secondaire et celles du Supérieur ;

- une action outillée par ces analyses didactiques, même avec les marges de manœuvre très limitées que permettent l'institution CPS1, peut faire bouger les choses dans le sens positif.

Perspectives :

Il nous semble **d’une part que** :

- L’**identification des connaissances d’ordre pratique**, nécessaires au fonctionnement du savoir mathématique ;
- l’**étude des modes de leur intervention** dans la pratique des mathématiques ;
- la **recherche des moyens et des modalités** pouvant aider les élèves et étudiants à les acquérir ;

et d’autre part,

- l’étude des situations didactiques pouvant amener les étudiants à **voir les spécificités des cadres de travail ensembliste et linéaire ainsi que les liens entre ces cadres** ;

sont des points qui méritent d’être approfondis dans les recherches didactiques futures.

Merci

$\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l’ensemble des matrices carrées d’ordre n $(n \geq 2)$ à coefficients réels.

Nous notons $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ [16] la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et nous rappelons que pour tout i,j, k et l dans $\{1,\ldots,n\}$, $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$

Les deux questions de l’exercice sont indépendantes.

1) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : pour tout A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, f(AB)=f(BA). Montrer que f est proportionnelle à la trace.

2) Montrer que pour tout φ dans le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, il existe une unique matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$, où tr désigne l’application trace.

La résolution de l’exercice requiert :

- choix d’un cadre de travail ;
- choix de stratégies et de techniques de travail ;
- identification de problèmes intermédiaires ;
- mobilisation de connaissances non indiquées et leur mise en relation de façon pertinente avec les données de l’exercice.

Deux pratiques mathématiques pourraient être utiles :

- Usage de la stratégie de spécification ;
- donnée sens à l’outil sémiotique

$$M = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{i \neq j} a_{ij} E_{ij}$$

$$\varphi(M) = tr(AM) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,\varphi(E_{ii}) + \sum_{i \neq j} a_{ij}\,\varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_{ki}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,\varphi(E_{ii}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_{ki}\right)$$

$M = I_n$ $\quad \varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(E_{ii})$. ?

$$\varphi(E_{11}) + \dots + \varphi(E_{nn}) = (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn})$$

$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\quad \varphi(M) = a\,\varphi(E_{11}) + b\,\varphi(E_{21}) + c\,\varphi(E_{12}) + d\,\varphi(E_{22})$

$$AM = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha_{11} + b\alpha_{12} & c\alpha_{11} + d\alpha_{12} \\ a\alpha_{21} + b\alpha_{22} & c\alpha_{21} + d\alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\varphi(M) = tr(AM) \Leftrightarrow a\,\varphi(E_{11}) + b\,\varphi(E_{21}) + c\,\varphi(E_{12}) + d\,\varphi(E_{22})$$

$$= a\alpha_{11} + b\alpha_{12} + c\alpha_{21} + d\alpha_{22}.$$

$$\Leftrightarrow a(\varphi(E_{11}) - \alpha_{11}) + b(\varphi(E_{21}) - \alpha_{12}) + c(\varphi(E_{12}) - \alpha_{21}) + d(\varphi(E_{22}) - \alpha_{22}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = d = 0. \\ \text{ou} \\ \varphi(E_{11}) = \alpha_{11},\ \varphi(E_{21}) = \alpha_{12},\ \varphi(E_{12}) = \alpha_{21} \\ \quad \text{et } \varphi(E_{22}) = \alpha_{22}. \end{cases}$$

Réponse question 2, page 2
(Groupe 1)

$\varphi = M \longrightarrow tr(AM) = \varphi_A(M)$.

$\varphi : \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} \varphi_A = \varphi$

$\mathcal{M}_n^*(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n^*(\mathbb{R})$.

$\forall \varphi, \quad \exists! A \ / \ \varphi = \varphi_A$

g bijective ?

$g(A) = \varphi_A : M \longrightarrow tr(AM)$

$g(A) \cdot M = tr(AM)$

Posons $A = (a_{ij})$ $\quad M = (m_{ij})$ et $AM = (c_{ij})$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{kj}$

$tr(AM) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki} \right)$.

$\varphi = \varphi_A$

$\Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = \varphi_A(M) = tr(AM)$.

$\cancel{\sum_{i,j} m_{ij}\, \varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki} \right)}$

$\sum m_{ij}\, \varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki} \right)$

$g(A) = g(B) \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$

$\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi_A(M) = \varphi_B(M)$

$\Leftrightarrow \quad$ " $\quad tr(AM) = tr(BM)$

$\Leftrightarrow \quad$ " $\quad tr((A-B)M) = 0$.

$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} m_{ki} \right)$

$\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik} m_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{k=1}^{2} b_{ik} m_{ki} \right)$

$(a_{11} m_{11} + a_{12} m_{21}) + (a_{21} m_{12} + a_{22} m_{22}) = (b_{11} m_{11} + b_{12} m_{21}) + (b_{21} m_{12} + b_{22} m_{22})$

$a_{11} = b_{11} \quad a_{12} = b_{12} \quad a_{21} = b_{21}$ et $a_{22} = b_{22}$

$\Rightarrow A = B$.

donc de même dans le cas général. donc g est injective.

Réponse question 2, page 2
(Groupe 2)