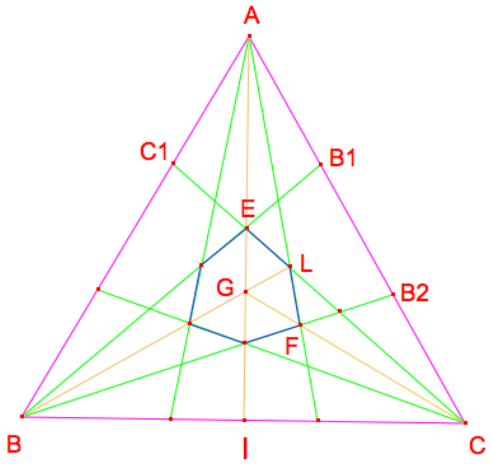
Exercice :
On partage chaque côté d'un triangle en trois parties égales et on joint les deux points du partage au sommet opposé ; les 6 segments obtenus déterminent un hexagone convexe.
Montrer que son aire est le dixième de l'aire du triangle.

Solution :



Par affinité on peut se ramener à un triangle équilatéral.

On note $\langle (\;)\rangle$ l'aire du polygone$(\;)$. Ainsi $2\langle AEB_1\rangle = \langle EB_1C\rangle$; les triangles AEC_1 et AEB_1 sont égaux par symétrie, et $\langle ACC_1\rangle = \frac{1}{3}S$ où S est l'aire du triangle ABC. Par suite $\langle AEC\rangle = \frac{1}{4}S$.

Comme $\langle AIC\rangle = \frac{1}{2}S$, $\langle IEC\rangle = \frac{1}{4}S$, et E est milieu de AI.

Par suite $EG = \frac{1}{3}AE$; de même $GF = \frac{1}{3}FC$ ($GA = 2GI$).

Par symétrie, l'hexagone étudié se décompose en 6 triangles égaux de sommet commun G ; notons s l'aire commune de ces triangles. On a $\langle (LFC)\rangle = 3s$ et $\langle (EGC)\rangle = 5s$. Comme $\langle EGC\rangle = \frac{1}{4}\langle AGC\rangle$ et $\langle AGC\rangle = \frac{1}{3}S$ on en déduit que $s = \frac{1}{60}S$.

L'aire de l'hexagone est le dixième de l'aire du triangle.

Note : On peut reprendre cette démonstration sans se ramener à un triangle équilatéral : il faut seulement montrer que les triangles $AEC1$ et $AEB1$ sont de même aire. Cela peut se faire comme suit :

1) Les triangles $BCC1$ et $CBB1$ sont d'aire égale à $\frac{2}{3}S$, par suite les triangles $BEC1$ et $CEB1$ sont de même aire. Comme les triangles $BB1A$ et $CC1A$ sont d'aire égale à $\frac{1}{3}S$, les triangles $AEC1$ et $AEB1$ sont de même aire.
2) La droite AE coupe le segment $B1C1$ en son milieu (les droites $B1C1$ et BC sont parallèles).

Cet exercice se généralise très bien en prenant des divisions des côtés autres, non nécessairement égales : le rapport trouvé peut être moins “ joli ”.