

La réforme des programmes du lycée : et alors ?

Apport pour les futurs étudiants
de l'enseignement de la **statistique**
et des **probabilités** au lycée

Colloque CII : LYON - 24, 25 & 26 mai 2013
Conférence 2

1 - Le lycée, les programmes et les pratiques

Michel Henry (michel.henry@univ-fcomte.fr)

Hélène Lample (Helene.Lample@ac-lyon.fr)

1 - Le lycée, les programmes et les pratiques

a. Cohérences des programmes de la seconde à la terminale
(Michel Henry)

b. Place de la simulation et de la modélisation
(Michel Henry)

c. Intervalles de fluctuation
(Michel Henry)

d. Le vécu des professeurs de lycée
(Hélène Lample)

a. Cohérences des programmes de la seconde à la terminale

I - Le lycée, les programmes des années 1990

Programme de 1991 en classe de première (arrêté du 27 mars 1991) :

*« Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et **la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois...** La notion de probabilité est utilisée pour **modéliser** des situations simples de la vie courante... ».*

Le choix d'introduire la notion de probabilité par l'observation de la “relative” stabilisation des fréquences lors de la répétition d'une même expérience aléatoire, induit un regard expérimental sur cette notion. **Cela suppose la mise en œuvre dans la classe d'expériences concrètes (répétées par l'accumulation des observations de chacun des élèves) et de simulations sur ordinateur ou calculette.**

Risque de confusion entre le domaine des observations expérimentales des fréquences et le domaine du modèle mathématique représentatif où la probabilité peut être définie.

a. Cohérences des programmes de la seconde à la terminale

II - Le programme de seconde des années 2010

Un changement de point de vue

Programme de seconde, BO n° 30 du 23 juillet 2009

Objectifs visés par l'enseignement des *statistiques* et *probabilités* à l'occasion de résolutions de problèmes

- dans le cadre de l'échantillonnage

+ faire réfléchir les élèves à la conception et la mise en oeuvre d'une *simulation* ;

+ sensibiliser les élèves à la *fluctuation d'échantillonnage*, aux notions d'intervalle de fluctuation et d'intervalle de confiance et à l'utilisation qui peut en être faite.

Échantillonnage : notion d'échantillon.

Intervalle de *fluctuation d'une fréquence* au seuil de 95% *.

Réalisation d'une *simulation*.

L'objectif est d'amener les élèves à un questionnement lors des activités suivantes :

- l'*estimation* d'une proportion inconnue à partir d'un échantillon ;
- la *prise de décision* à partir d'un échantillon

a. Cohérences des programmes de la seconde à la terminale

II - Le programme de seconde des années 2010

Programme de seconde, BO n° 30 du 23 juillet 2009

Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes

*- dans le cadre des **probabilités**, rendre les élèves capables :*

*+ d'étudier et **modéliser** des expériences relevant de l'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou de dés, tirage de cartes) ;*

*+ de proposer un **modèle probabiliste** à partir de l'**observation de fréquences** dans des situations simples ;*

+ d'interpréter des événements de manière ensembliste ;

*+ de mener à bien des calculs de **probabilités**.*

Capacité attendue : *Utiliser des **modèles définis** à partir de **fréquences observées***

Le point de vue de la modélisation qui considère les probabilités comme des outils théoriques au sein de modèles représentatifs de situations aléatoires, est clairement affirmé.

b. Place de la simulation et de la modélisation

1 - Notion de simulation

Les programmes font largement appel à la simulation informatique. Le document d'accompagnement des programmes de première des années 2000 précisait :

« Modéliser consiste à associer un modèle à des données expérimentales, alors que simuler consiste à produire des données à partir d'un modèle prédéfini. Pour simuler une expérience, on associe d'abord un modèle à l'expérience en cours, puis on simule la loi du modèle ».

On trouve cette définition de la simulation dans l'Encyclopédie Universalis :

« La simulation est l'expérimentation sur un modèle. C'est une procédure de recherche scientifique qui consiste à réaliser une reproduction artificielle (modèle) du phénomène que l'on désire étudier, à observer le comportement de cette reproduction lorsque l'on fait varier expérimentalement les actions que l'on peut exercer sur celle-ci, et à en induire ce qui se passerait dans la réalité sous l'influence d'actions analogues ».

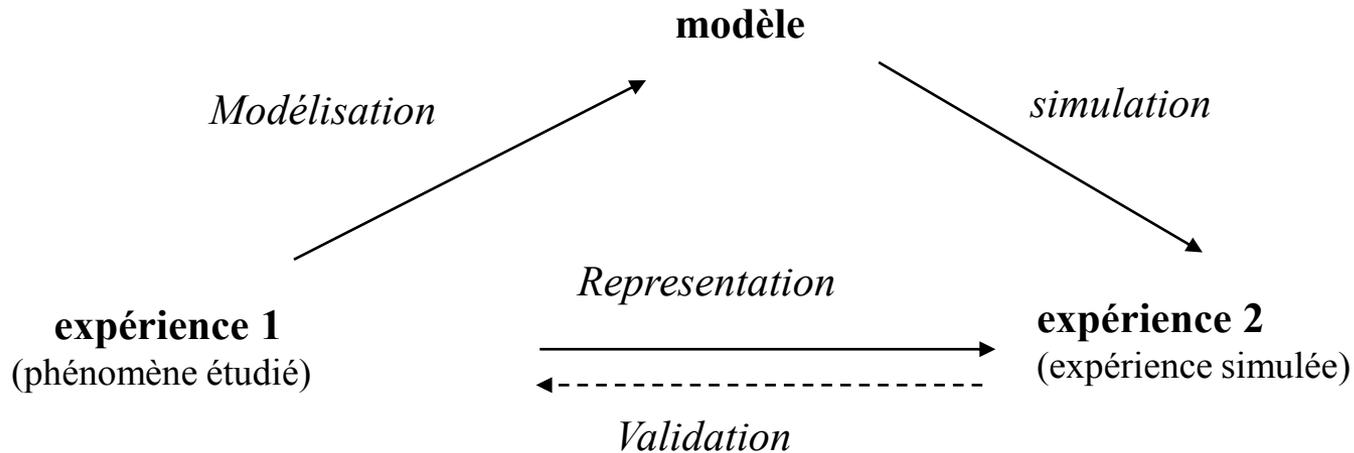
Il convient donc de faire d'abord le choix d'un modèle pour l'implanter dans les instructions de calcul d'un ordinateur ou d'une calculette.

Il faut comprendre le statut de la simulation : à partir d'un protocole expérimental, on dégage des hypothèses de modèle et on programme une simulation de ce modèle.

b. Place de la **simulation** et de la modélisation

2 - La modélisation

On a le schéma suivant, dû à B. Parzysz :



Quand une simulation est comprise comme une simple interprétation d'une expérience réelle représentée sur un écran, l'étape de la modélisation est ignorée et ce schéma triangulaire est remplacé par un schéma linéaire.

3 - Simulations pour expliciter le processus de modélisation

Des premiers exemples simples de **simulations** conduisent les élèves à une meilleure compréhension de ce qu'est un **modèle probabiliste** et à s'intéresser au processus de modélisation :

- **décrire et analyser une expérience aléatoire,**
- **expliciter un protocole expérimental, i. e. l'ensemble des éléments qui définissent l'expérience d'un point de vue probabiliste, permettant d'affirmer que l'on peut répéter la même expérience dans les mêmes conditions,**
- **expliciter des hypothèses de travail en vue de contrôler la pertinence du modèle en construction,**
- **interpréter les caractéristiques de l'expérience réelle en termes d'hypothèses de modèle (notamment les probabilités représentant le caractère aléatoire de l'expérience),**
- **transposer ces hypothèses en instructions informatiques,**
- **exploiter ce modèle théorique pour en tirer des propriétés relatives au phénomène qui peuvent être observées dans la réalité,**
- **interpréter enfin les résultats de la simulation en les relativisant par les hypothèses de modèle**

c. Intervalles de fluctuation

II - Le programme de seconde des années 2010

Programme de seconde, BO n° 30 du 23 juillet 2009

Les outils de la prise de décision : quelle valeur pour une proportion ?

* **Intervalle de fluctuation** :

Pour des échantillons de taille $n > 25$ et des proportions p du caractère comprises entre 0,2 et 0,8 : si f désigne la fréquence du caractère dans l'échantillon, f appartient à l'intervalle $[p - 1/\sqrt{n} ; p + 1/\sqrt{n}]$, avec une probabilité d'au moins 0,95.

- vérification de cette propriété par la **simulation** de nombreux échantillons de taille n .

- Prise de **décision** : si en pratique, lors de la répétition n fois d'une expérience aléatoire, la fréquence de succès observée est en dehors de l'intervalle de fluctuation, alors on peut rejeter l'hypothèse que la proportion inconnue est égale à p .

Décision erronée dans 5% des échantillons.

a. Cohérences des programmes de la seconde à la terminale

III - Le programme de première S des années 2010

Programme de Première S, BO spécial n° 9 du 30 septembre 2010

Les lois de probabilité sont présentées comme des outils pour la modélisation :

La notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire permet de modéliser des situations aléatoires, d'en proposer un traitement probabiliste et de justifier certains faits observés expérimentalement en classe de seconde.

Dans la colonne de droite du programme, on lit :

À l'aide de simulations et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on fait le lien avec la moyenne et la variance d'une série de données

Le programme se limite donc à une « approche heuristique de la loi des grands nombres », on ne devrait plus parler de « stabilisation » ou de « convergence » des fréquences.

c. Intervalles de fluctuation

III - Le programme de première S des années 2010

Programme de première S, BO spécial n° 9 du 30 septembre 2010

Dans la partie **Échantillonnage**, on peut lire :

Échantillonnage : utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence.

Dans la colonne centrale :

Exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.

Et dans celle de droite :

L'intervalle de fluctuation peut être déterminé à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme.

En spécifiant la loi binomiale $X \approx B(n, p)$ du nombre de succès observés dans l'échantillon, on obtient un intervalle de fluctuation moins général et plus précis qu'en seconde : l'intervalle $[a ; b]$ où a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et b le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

a. Cohérences des programmes de la seconde à la terminale

IV - Le programme de terminale S des années 2010

Programme de Terminale S, BO spécial n° 8 du 13 octobre 2011

Le programme présente ainsi l'introduction de la loi normale :

On introduit les lois de probabilité à densité. Le programme en propose quelques exemples et, en particulier, la loi normale qui permet notamment d'initier les élèves à la statistique inférentielle par la détermination d'un intervalle de confiance pour une proportion à un niveau de confiance de 95 %.

Dans la colonne de droite, il indique la méthode passant par une visualisation du théorème de Moivre-Laplace :

Pour introduire la loi normale $N(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des

représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

où X_n suit la loi binomiale $B(n, p)$, et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1.

c. Intervalles de fluctuation

IV - Le programme de terminale S des années 2010

Programme de Terminale S, BO spécial n° 8 du 13 octobre 2011

Un nouvel intervalle de fluctuation obtenu par le th. de Moivre-Laplace :

Connaître l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% :

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \text{ où } p \text{ désigne la proportion dans la population.}$$

Avec les exigences usuelles de précision, on pratique cette approximation dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

En majorant $1,96\sqrt{p(1-p)}$, on retrouve l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde.

Pour tester la valeur d'une proportion à partir de la fréquence observée dans un échantillon, le programme indique :

La problématique de prise de décision, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau avec l'intervalle de fluctuation asymptotique.

c. Estimation par intervalle de confiance

IV - Le programme de terminale S des années 2010

Programme de Terminale S, BO spécial n° 8 du 13 octobre 2011

Initiation à l'estimation par intervalle de confiance, estimation d'une proportion inconnue à partir d'un échantillon :

Il est intéressant de démontrer que, pour une valeur de p fixée, l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Application aux sondages:

La simulation de sondages sur tableur permet de sensibiliser aux fourchettes de sondages-.

d. Le vécu des professeurs de lycée (Hélène Lample)

La formation des professeurs

Dans leur grande majorité, les professeurs de lycée n'ont pas suivi d'enseignement universitaire en statistique inférentielle.

Les outils mobilisés pour assurer cette formation sont :

- les documents ressource de première et terminale, édités par l'Inspection Générale ;
- les articles et brochures des IREM ;
- les divers stages de formation proposés dans les académies ;
- les ressources proposées par l'APMEP ou les universités.

Niveau première : introduction de la loi binomiale

- **Les coefficients binomiaux** sont introduits sans expression formelle par les factorielles, conformément au programme. En pratique les valeurs s'obtiennent facilement avec les calculatrices.
- **L'intervalle de fluctuation et la problématique de la prise de décision statistique** : Les élèves éprouvent des difficultés à saisir ce qu'est un intervalle de fluctuation et à comprendre comment il permet de prendre des décisions d'ordre statistique, à un niveau de risque donné.
- **De façon générale, ce qui pose problème aux élèves** est la lecture des énoncés rédigés en français et leur traduction dans le langage probabiliste : quelles sont les données ? Que me demande-t-on ? Quelle loi puis-je utiliser ? Faut-il prendre une décision statistique ?

Exemple extrait du document ressource de première

Un groupe de citoyens demande à la municipalité d'une ville la modification d'un carrefour en affirmant que 40 % des automobilistes tournent en utilisant une mauvaise file.

Un officier de police constate que sur 500 voitures prises au hasard, 190 prennent une mauvaise file.

1. Déterminer, en utilisant la loi binomiale sous l'hypothèse $p = 0,4$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

2. D'après l'échantillon, peut-on considérer, au seuil de 95 %, comme exacte l'affirmation du groupe de citoyens ?

Niveau terminale : introduction des lois normales

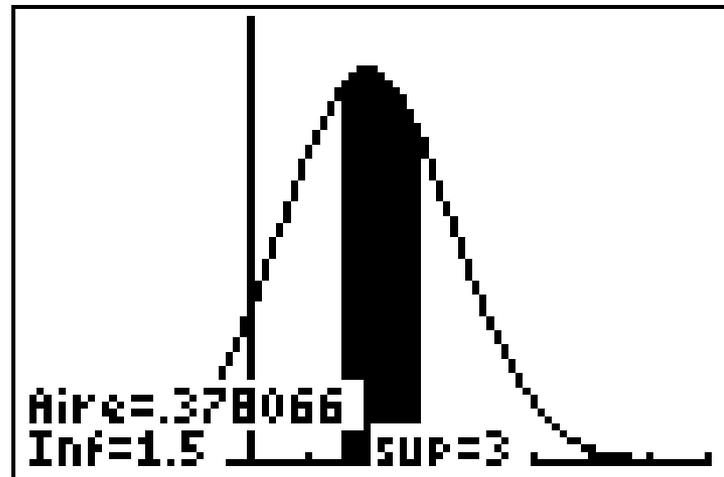
- **L'introduction des lois continues**, se passe comme dans les programmes précédents. On introduit aussi la notion d'espérance d'une variable continue. Aucune difficulté n'est soulevée pour le calcul d'intégrales généralisées (elles sont convergentes et leur valeur s'obtient comme limite d'intégrales finies). La fonction de répartition ne figure pas dans les contenus des programmes mais elle est utilisée régulièrement dans les calculs pratiques.
- **L'introduction de la loi $N(0, 1)$** par le théorème de Moivre-Laplace est perçue comme difficile. Pour les professeurs qui ont enseigné en BTS, le changement de point de vue n'est pas toujours bien perçu : il est parfois interprété comme volonté de toujours centrer-réduire au lieu d'identifier une démarche de convergence en loi en lieu et place de celle d'approximation directe.

Niveau terminale : introduction des lois normales

- Les lois normales $N(m, s^2)$ sont introduites à partir de la loi $N(0, 1)$ et les calculs sont effectués avec la calculatrice de façon très simple.

Calcul et représentation graphique de $P(1,5 < X < 3)$ lorsque $X \sim N(2, 1 ; 5^2)$ ainsi que la détermination du fractile associé à la probabilité 0,95 pour cette même loi.

```
normalFRép(1.5, 3  
, 2, 1.5)  
          .3780661293  
FractNormale(0.95  
, 2, 1.5)  
          4.467280439
```



Niveau terminale : introduction des lois normales

- **L'intervalle de fluctuation asymptotique** est une notion difficile à appréhender par les professeurs qui manquent de formation théorique. Certains élèves se sentent dépassés par ces notions.
- **L'intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance 0,95** donne lieu à des applications assez simples en exercice mais les confusions sont fréquentes entre intervalle de fluctuation, qui dépend de la loi considérée et du niveau de risque et intervalle de confiance dont les bornes sont aléatoires. Ici aussi, les professeurs sont en demande d'une formation.

Niveau terminale : les démonstrations du programme

Le programme de TS indique quelques démonstrations à présenter aux élèves, certaines figurent en « capacités attendues » et pourraient donner lieu à une question de cours à l'examen.

▣ *On montre qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{T \geq t}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$.*

▣ *Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $1/\lambda$.*

▣ Démontrer que pour α dans $]0, 1[$, il existe un unique réel positif t_α tel que $P(-t_\alpha \leq X \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$, lorsque X suit la loi normale $N(0, 1)$.

▣ Démontrer que si la variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(n, p)$,

alors, pour tout α dans $]0, 1[$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - t_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + t_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$

Exemple extrait du document ressource de terminale : ***Échantillon représentatif et proportion estimée***

On souhaite estimer dans une ville la proportion de personnes en surpoids. Pour cela 460 personnes ont été sélectionnées de manière aléatoire à partir d'une la liste des logements.

1. L'enquêteur va s'assurer que l'échantillon est représentatif de la population. Dans l'échantillon on a dénombré 260 femmes et 108 personnes ayant au moins 60 ans. On sait aussi que, dans la population de cette ville, il y a 46% d'hommes et 20% de personnes de plus de 60 ans.

a) ***Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 de la « proportion de femmes » dans un échantillon de taille 460 (...).***

b) ***Même question pour la « proportion de personnes âgées de plus de 60 ans ».***

c) ***Si pour chacune des variables, genre et âge, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% contient la valeur de l'échantillon on considère que l'échantillon est représentatif de la population pour cette information. Quelle est donc la conclusion pour le cas étudié ici ?***

2. Ainsi les informations qui seront obtenues à partir de cet échantillon considéré, comme représentatif, seront généralisables, avec un certain nombre de précautions, à l'ensemble de la population dont il est extrait.

Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la proportion de personnes en surpoids.

L'intérêt de cet exercice est de présenter, sur une même situation :

- un calcul d'intervalle de fluctuation pour valider la représentativité de l'échantillon ;
- un calcul d'intervalle de confiance pour estimer une caractéristique inconnue.

Il faut noter que la notion d'échantillon représentatif ne figure pas au programme du lycée. Dans le cadre de l'accompagnement personnalisé, version approfondissement, le professeur peut décider de compléter cette notion.

Et la simulation ?

Un des axes transversaux des nouveaux programmes du lycée est l'algorithmique. Aussi, dès la classe de seconde, l'item « échantillonnage » du programme comporte tout naturellement la réalisation de quelques simulations.

Au niveau première, on peut simuler la loi binomiale :

```
1  VARIABLES
2    p EST_DU_TYPE NOMBRE
3    n EST_DU_TYPE NOMBRE
4    k EST_DU_TYPE NOMBRE
5    X EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7    LIRE p
8    LIRE n
9    k PREND_LA_VALEUR 1
10   X PREND_LA_VALEUR 0
11   TANT_QUE (k<=n) FAIRE
12     DEBUT_TANT_QUE
13     X PREND_LA_VALEUR X+floor(random()+p)
14     k PREND_LA_VALEUR k+1
15   FIN_TANT_QUE
16   AFFICHER X
17  FIN_ALGORITHME
```

```
PROGRAM:BIN
:Prompt N,P
:1→K
:0→X
:While K≤N
:  X+partEnt(NbrAl
éat+P)→X
:  K+1→K
:0→X
:While K≤N
:  X+partEnt(NbrAl
éat+P)→X
:  K+1→K
:End
:Disp "X=",X
```

Quelques sujets de bac

Un algorithme de simulation : Pondichéry S, avril 2012

Choix au hasard de 5 coureurs soumis à un contrôle anti-dopage à l'arrivée d'une course de 50 participants

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0; b := 0; c := 0; d := 0; e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a := \text{rand}(1, 50); b := \text{rand}(1, 50);$ $c := \text{rand}(1, 50); d := \text{rand}(1, 50);$ $e := \text{rand}(1, 50)$ Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

Un exercice classique sur les lois normales : Pondichéry ES/L 2013

Production de batteries pour véhicules électriques

Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.

Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?
2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? Justifier votre réponse.

2 – L'impact sur les programmes de BTS

Philippe Dutarte
maths.ac-creteil.fr

L'impact sur les programmes de BTS

a. Lois de probabilité et modélisation en contexte aléatoire

b. Tests d'hypothèse

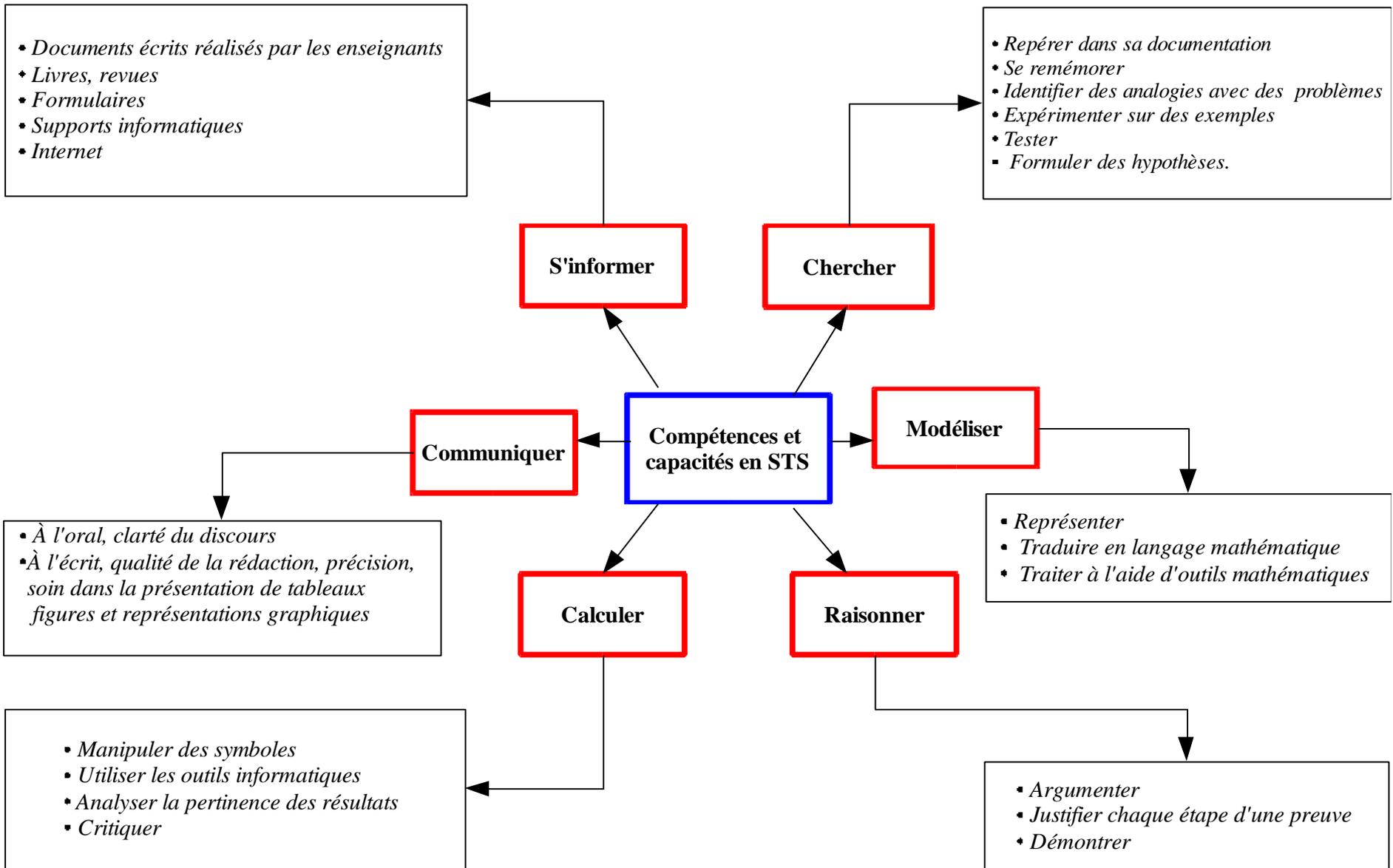
c. Estimation par intervalle de confiance

De nouveaux programmes de mathématiques en sections de techniciens supérieurs, en première année à la rentrée 2013, avec trois objectifs principaux :

- prendre en compte les nouveaux programmes du lycée général et technologique et du lycée professionnel ;
- favoriser l'intégration des titulaires d'un baccalauréat professionnel en première année ;
- préciser les capacités mathématiques attendues avec les outils numériques et favoriser leur usage en mathématiques, notamment en lien avec les applications propres à chaque spécialité de BTS.

Six « modules » de statistique et probabilités :

- Statistique descriptive ;
- Probabilités 1 (conditionnement, lois binomiale, uniforme et normale) ;
- Probabilités 2 (lois exponentielle, de Poisson, exemples de processus aléatoires) ;
- Statistique inférentielle ;
- Fiabilité ;
- Plans d'expérience.



a. Lois de probabilité et modélisation en contexte aléatoire

Lois de probabilités et outils numériques :

Il n'y a plus lieu d'enseigner l'usage des tables de probabilités en STS. Le module « Probabilité 1 » comporte notamment les capacités suivantes :

- *Simuler un schéma de Bernoulli.*
- *Représenter graphiquement la loi binomiale à l'aide d'un logiciel.*
- *Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.*
- *Concevoir et exploiter une simulation dans le cadre d'une loi uniforme.*
- *Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre de la loi normale.*

a. Lois de probabilité et modélisation en contexte aléatoire

Loi de poisson et initiation aux processus aléatoires :

Certains étudiants ayant abordé la loi exponentielle au lycée général et technologique, la loi de Poisson est introduite dans le module « Probabilités 2 » dans le cadre du processus correspondant :

« La loi de Poisson est introduite comme correspondant au nombre de réalisations observées, durant un intervalle de temps de longueur donnée, lorsque le temps d'attente entre deux réalisations est fourni par une loi exponentielle ».

Le symbole \Leftrightarrow indique des contextes d'utilisation en lien avec les autres disciplines : fiabilité, désintégration nucléaire, gestion de stocks ou de réseaux.

a. Lois de probabilité et modélisation en contexte aléatoire

L'étude d'exemples de chaînes de Markov (nouveau en STS) est proposée dans le module « Probabilités 2 », comportant les capacités suivantes, qui pourront être complétées pour les sections possédant à leur programme le module « Calcul matriciel » :

- *Représenter un processus aléatoire simple par un graphe probabiliste.*
- *Exploiter un graphe probabiliste pour calculer la probabilité d'un parcours donné.*
- *Simuler un processus aléatoire simple.*
- *Exploiter une simulation d'un processus aléatoire pour estimer une probabilité, une durée moyenne ou conjecturer un comportement asymptotique.*

a. Lois de probabilité et modélisation en contexte aléatoire

Théorème de la limite centrée et compléments d'analyse :

Dans le module « Probabilités 1 », « *le théorème [de la limite centrée], admis, s'énonce en termes d'approximation par une loi normale de la somme de n variables indépendantes de même loi. L'outil informatique [en] permet une approche expérimentale* ».

Certaines connaissances supplémentaires acquises en analyse (limites de fonctions, intégration par parties, équations différentielles) permettent de consolider les manipulations des lois à densité (loi normale, loi exponentielle) et, inversement, les contextes probabilistes présentent des applications concrètes de concepts d'analyse.

a. Lois de probabilité et modélisation en contexte aléatoire

Dans le cadre de premiers cycles universitaires plus ambitieux, sur le plan mathématique, que les sections de techniciens supérieurs, un approfondissement en analyse (notions de limite, de convergence, de continuité, d'intégrale généralisée...) nous semble permettre un regard enrichi sur certains points de probabilités abordés au lycée général.

b. Tests d'hypothèse

Dans le module « Statistique inférentielle » des STS, après un paragraphe « estimation ponctuelle », le contenu « Tests d'hypothèse » est présenté avant celui « Estimation par intervalle de confiance ».

À propos des tests d'hypothèse, on se limite, comme au lycée général et technologique, au cadre des lois binomiale et normale, mais on approfondit ce qui a été vu au lycée à trois niveaux :

- l'hypothèse concerne une proportion ou une moyenne ;
- le test peut être unilatéral (c'est assez fréquemment le cas en pratique) ;
- les risques d'erreur de première et de seconde espèce sont analysés, la notion de puissance d'un test étant abordée.

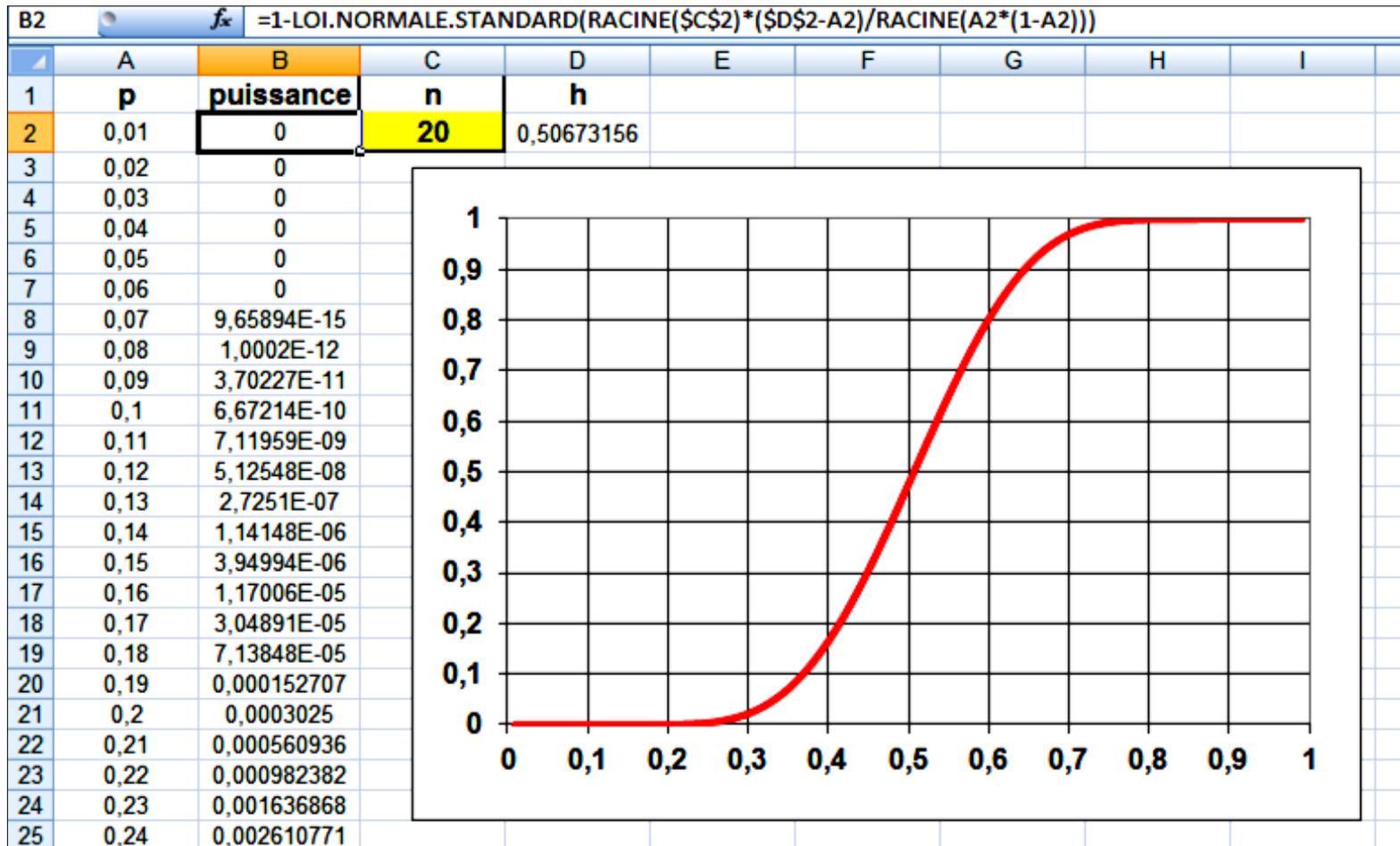
b. Tests d'hypothèse

Pour la compréhension de ces notions, les moyens logiciels sont sollicités : « *On compare, à l'aide d'un algorithme ou de simulations, les différents seuils de signification et on met en évidence les risques d'erreur de première et de seconde espèce.* ».

Ainsi, la puissance d'un test est aisément illustrée à l'aide d'un tableur. Considérons par exemple un questionnaire à choix multiples (QCM) proposant n questions indépendantes avec, pour chaque question, trois propositions.

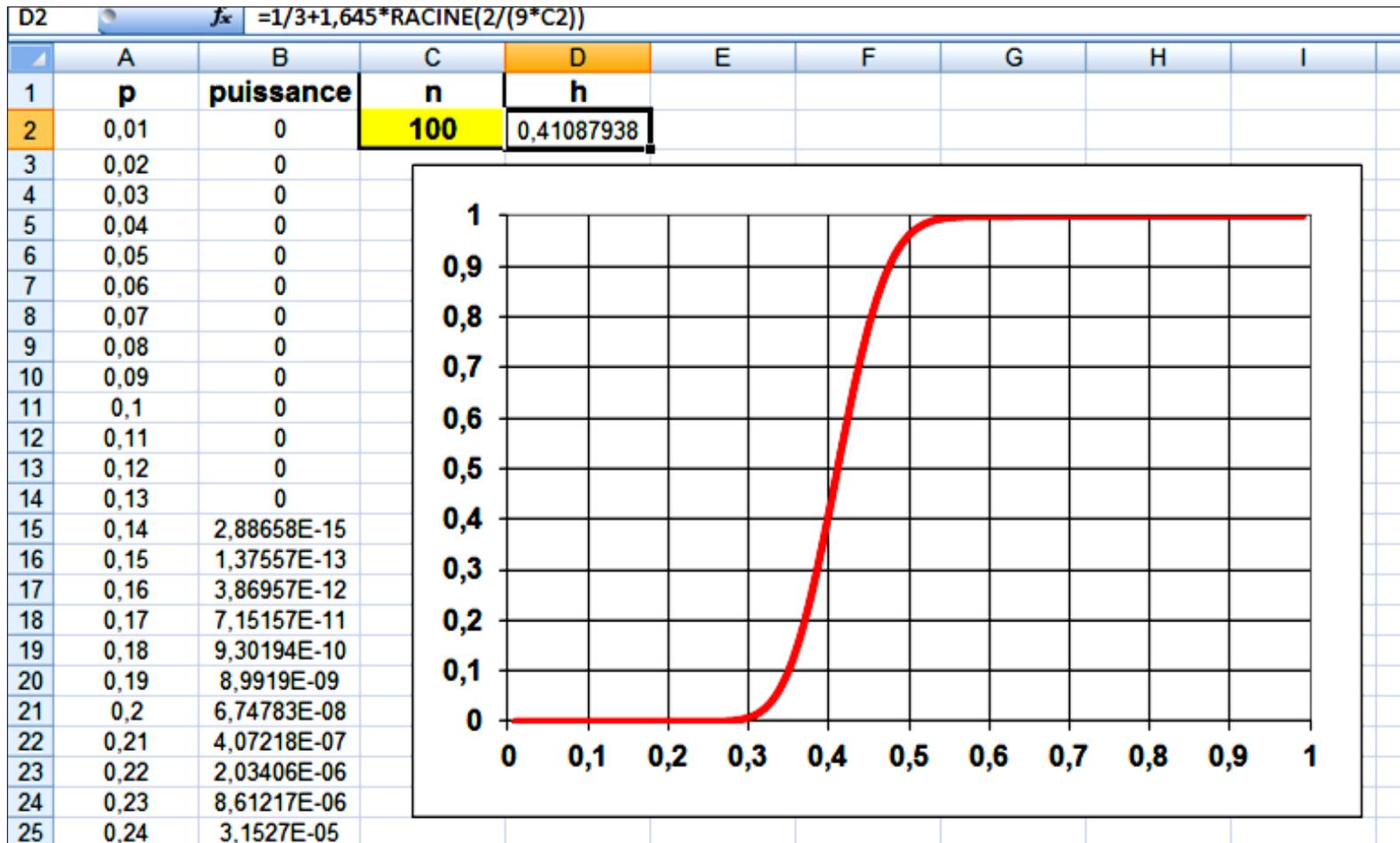
b. Tests d'hypothèse

Le graphique suivant indique, pour p probabilité de bonne réponse à chaque question située en abscisses, la probabilité de succès au QCM (hypothèse nulle $p = 1/3$ rejetée) située en ordonnées.



b. Tests d'hypothèse

On « voit » comment un test de $n = 100$ questions est plus « puissant » qu'un test de $n = 20$ questions.



c. Estimation par intervalle de confiance

La notion d'intervalle de confiance n'a pas été vue au lycée professionnel.

Bac S :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Bac STI2D :

$$\left[f - 1,96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f + 1,96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

c. Estimation par intervalle de confiance

Le module « Statistique inférentielle » se limite au cadre de la loi normale, pour une proportion ou une moyenne, à un niveau de confiance donné (et non limité à 95 %). Les capacités attendues sont les suivantes :

- *Déterminer un intervalle de confiance à un niveau de confiance souhaité pour :*
 - *une proportion, dans le cas d'une loi binomiale approximable par une loi normale ;*
 - *une moyenne, dans le cas d'une loi normale quand l'écart type de la population est connu ou dans le cas de grands échantillons.*
- *Exploiter un intervalle de confiance.*
- *Déterminer la taille nécessaire d'un échantillon pour estimer une proportion ou une moyenne avec une précision donnée.*

c. Estimation par intervalle de confiance

Les commentaires insistent :

- sur le rôle de la simulation pour « *mieux comprendre la notion d'intervalle de confiance* » ;
- sur la nécessité de bien distinguer confiance et probabilité.

3 - Statistique, Probabilités et Formation des maîtres

Jean-Louis Piednoir
amjl.piednoir@orange.fr

Statistique, Probabilités et Formation des maîtres

La formation des futurs professeurs de mathématiques se déroule maintenant sur 5 années.

Quelle place est faite à la statistique, aux probabilités dans les formations dispensées sachant la place actuelle de ces champs scientifiques dans les nouveaux programmes des lycées ?

On sait que leur importance varie beaucoup d'une université à l'autre et est très réduite dans les classes préparatoires aux grandes écoles alors que leurs anciens élèves forment une part importante dans les reçus aux différents concours.

On sait que l'importance que les futurs candidats accordent aux différents chapitres d'un cursus dépend fortement des programmes et des usages des concours.

De prime abord on peut dire que la place des probabilités et surtout de la statistique est très modeste dans les différents programmes.

Statistique, Probabilités et Formation des maîtres

Au CAPES interne le programme de l'écrit se réduit au programme des classes du second degré, celui de l'oral dépend du niveau d'enseignement du candidat admissible, le plus souvent le collège. On aura donc des certifiés dont la formation en probabilités et statistique risque fortement d'être très légère voire quasi inexistante.

Au CAPES externe le programme de l'écrit est celui du second degré, des classes de techniciens supérieurs (STS) et des classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE). La première épreuve orale est la présentation d'une leçon relative aux classes du second degré et des STS. En clair c'est le seul programme des STS qui permet une approche de la statistique inductive allant plus loin que l'estimation par intervalle de confiance de la moyenne d'une loi de Gauss. Il permet aussi une première approche de la théorie des tests et aussi la découverte d'autres lois que la gaussienne ou la binomiale.

Statistique, Probabilités et Formation des maîtres

Au CAPLP2 de mathématiques-sciences, le programme précise des éléments de statistique descriptive : moyenne, écart-type, ajustement affine pour la liaison éventuelle entre deux variables, les premiers concepts du calcul des probabilités, y compris l'énoncé de la loi des grands nombres, rien en statistique inductive.

A l'agrégation interne, outre le programme du second degré, il existe un programme complémentaire relativement fourni, souvent plus ambitieux que celui des CPGE avec par exemple en algèbre : anneaux, corps, groupes en liaison avec la géométrie, de l'analyse numérique, mais pas de statistique, et en probabilités les seules notions de variable aléatoire et la loi faible des grands nombres.

Statistique, Probabilités et Formation des maîtres

A l'agrégation externe, l'écrit se compose de deux épreuves écrites de 6 heures et pour l'oral on distingue 4 options : probabilités et statistique, calcul scientifique, algèbre et calcul formel, informatique, avec 3 épreuves. Deux sont communes aux trois premières options : algèbre et géométrie, analyse et probabilités, la troisième, intitulé modélisation, a un programme propre à l'option probabilités et statistique.

A l'écrit on a une épreuve de mathématiques générale et une épreuve d'analyse et probabilités. En probabilités le programme comprend les notions de variable aléatoire, y compris la fonction caractéristique, de modes de convergence, avec la convergence presque sûre, la loi faible des grands nombres et le théorème central limite.

Pour les trois premières options, une allusion est faite à la simulation et la méthode de Monte Carlo est au programme.

Statistique, Probabilités et Formation des maîtres

A l'agrégation externe, l'option probabilités et statistique a un programme plus développé en probabilités avec chaînes de Markov, martingales, vecteurs aléatoires dans \mathbb{R}^n , étude de lois usuelles.

Elle est la seule à comporter un programme de statistique inférentielle : estimation ponctuelle et par intervalle, tests paramétriques, méthode du maximum de vraisemblance, modèle linéaire dans le cas gaussien (méthode des moindres carrés), tests d'adéquation du χ^2 et de Kolmogorov.

L'épreuve de modélisation est la seule qui permet à un candidat de traiter une situation faisant appel à la statistique.

Tous les agrégés des autres options peuvent donc ignorer la statistique.

Statistique, Probabilités et Formation des maîtres

La pratique des concours, dans le passé, défavorise de fait la statistique voire les probabilités.

En effet, à l'oral, le candidat a le choix entre deux sujets. Les jurys ne couplent quasiment jamais de sujets concernant le champ probabilités et statistique. Les candidats le savent, si bien que l'on peut être reçu en faisant l'impasse sur ces chapitres du programme, sauf bien sûr si l'on a choisi l'option correspondante.

En résumé, on remarque que les probabilités, et surtout la statistique, sont les parents pauvres des programmes des concours de recrutement. Pratiquement les programmes des concours internes les ignorent quasi complètement. Ceci est évidemment en contradiction avec l'évolution récente des programmes de lycée. Sous réserve d'existence il reste un grand espace pour la formation continue !

4 - Quel impact de la réforme des programmes en probabilités et statistique sur l'enseignement en Licence et en IUT ?

Comparaison avec les choix à l'étranger

Jean-Pierre Raoult
Comité scientifique des IREM
jpraoult@orange.fr

I. Quel impact de la reforme des programmes en probabilités et statistique sur l'enseignement en Licence et en IUT ?

A. Licence

Un questionnaire a été envoyé (avec l'aide des directeurs d'IREM et de correspondants locaux de la SMF), auquel ont répondu les responsables de nouvelles maquettes de L1 dans 19 universités (liste en annexe)

Le champ de l'enquête était délimité par :

Ce questionnaire porte sur la première année de licence, dans la filière qui, dans votre université, comporte la plus grande part de mathématiques (obligatoire ou optionnelle).

Trame du questionnaire (nous ne reproduisons pas ici en détail toutes les sous-questions)

1. Sur l'ensemble des enseignements de mathématiques prévus en L1 en 2013-2014, avez-vous prévu des modifications importantes pour prendre en compte les nouveaux programmes de lycée ?

En particulier avez vous prévu de renforcer certains points de programmes pour lesquels les bacheliers 2013 vous paraissent devoir être moins formés que leurs prédécesseurs ?

Si oui, lesquels ?

(Réponse succincte, en 5 lignes maximum si possible)

2. Y a-t-il dans votre projet de maquette une section de calcul des probabilités ?

a. Avez-vous prévu de considérer comme acquises les notions de probabilités discrètes figurant au programme de première S ou ES (espérance, variance, loi binomiale) ? Revenez vous sur certaines de ces notions ? Lesquelles ? Allez-vous plus loin ? En quoi ?

b. Avez-vous prévu de considérer comme acquises les notions générales de probabilités figurant au programme de terminales (conditionnement, indépendance) ? Revenez vous sur certaines de ces notions ? Lesquelles ? Allez-vous plus loin ? En quoi ?

c. Avez-vous prévu de considérer comme acquises les notions sur les lois de probabilités à densités figurant au programme de terminales S ou ES (lois uniformes, exponentielles (pas en ES), normales) ? Lesquelles ? Allez-vous plus loin ? En quoi ?

3. Y a-t-il dans votre projet de maquette une section de statistique ?

Avez-vous prévu de considérer comme acquises les notions de statistique inférentielle figurant au programme de terminales S ou ES (intervalle de fluctuation, intervalle de confiance). Revenez vous sur certaines de ces notions ? Lesquelles ? Allez-vous plus loin ? En quoi ?

4. En probabilités ou en statistique, avez-vous prévu l'usage de moyens de calcul ? En quoi ?

5. (Éventuellement) Avez-vous déjà prévu les grandes lignes des enseignements de probabilités et statistique en L2 (2014) et L3 (2015) ?

1. Réponses sur l'ensemble des enseignements de mathématiques prévus en L1

4 universités affirment ne faire aucun changement notable, 3 parlent de “légères modifications” (dont une sans précisions). Toutes les autres déclarent devoir beaucoup évoluer pour remédier aux manques les plus importants de la formation du lycée.

Les avis diffèrent un peu sur les “trous” à combler en priorité.

L'analyse élémentaire est la plus souvent citée (fonctions de référence, continuité, dérivation, suites ...) mais les choix de “renoncements” pour repousser en L2 (voire L3) des thèmes auparavant traités en L1 varient : on conserve ou non le calcul intégral (en général conserve), les équations différentielles (en général non), les séries (en général non), les développements limités (en général non).

La géométrie est citée dans 4 universités.

Sauf dans une université qui insiste sur les liens avec la physique, les arguments sont toujours “de l'intérieur des maths”.

2. Réponses sur les probabilités

Il est remarquable que jamais les probabilités ni la statistique n'étaient citées spontanément parmi les “trous” à combler en priorité. Il n'est donc pas étonnant que toutes les universités qui ont répondu sauf 3 aient décidé de ne pas enseigner de probabilités ni de statistique en L1 (en affirmant souvent que telle était déjà la situation actuelle) ; sur les 3 exceptions une met “un peu de probas” en algèbre, une intègre les probabilités dans une UV avec Logique et combinatoire, l'autre crée une UV en MASS.

Souvent (9 universités) les idées sont déjà un peu élaborées sur l'enseignement en L2. La nécessité est en général affirmée de tout reprendre à zéro, ou “presque” (pas étonnant vu l'interruption d'un an) avec souvent des arguments du type : “avait été trop difficile pour les élèves au lycée”, “inadapté en lycée vu le manque d'outils” (par exemple sur les coefficients binomiaux).

Le lien avec d'autres branches des maths est peu explicite, sauf avec le calcul intégral (2 fois UV commune) et une fois avec les séries.

3. Réponses sur la statistique

La statistique n'est jamais prévue en L1 sauf dans deux universités :

- une qui envisage d'enseigner intervalle de confiance et tests avec “l'espoir que les élèves aient profité de l'enseignement de terminale”,
- une qui fait une UV de statistique descriptive.

La plupart des universités ne répondent pas sur ce que pourraient être les projets en statistique pour L2 ou L3 ; deux répondent ne pas avoir l'intention de changer l'existant ; une seule affirme qu'il n'en sera pas enseigné du tout en licence, mais on peut imaginer que ce sera le cas dans plusieurs autres.

Dans 6 universités il est déjà prévu que la statistique en Licence soit optionnelle ; une seule évoque le besoin en cette matière pour les futurs professeurs du secondaire et donc prévoit cette UV pour ceux-ci (mais peut-être d'autres y songent et ne l'ont pas explicité).

4. Réponses sur les outils de calcul

Très peu de réponses à cette question.

Dans 4 universités seulement on a précisé les outils :

WIMS (1 fois), R (2 fois), Scilab (1 fois)

En conclusion (attendue ?)

La place prise par les probabilités et la statistique dans les programmes de lycée ne semble pas se prolonger dans la vision des mathématiciens qui préparent des programmes de licence.

Au pire elle est ignorée, au mieux elle fait l'objet d'une grande suspicion sur ce que les élèves en auront retiré, d'où la volonté de tout reprendre à zéro (“avec de meilleurs outils mathématiques” dit-on parfois).

Seules deux universités semblent vraiment vouloir s'appuyer sur des acquis du lycée (explicitement niés par nombre d'autres).

B. IUT. Départements STID

(Statistique et Informatique Décisionnelle)

Informations recueillies auprès de Florence Muri-Majoube, IUT de Paris-Descartes, membre de la CPN (Commission Pédagogique Nationale) STID et Informatique.

Le nouveau PPN (Programme Pédagogique National) qui devrait être validé en STID obéit essentiellement à deux contraintes :

- l'évolution des métiers et le renforcement de l'informatique décisionnelle, peu présente dans le programme actuel,
- l'évolution exigée des publics d'étudiants, qui, en plus des bacheliers S et ES accueillis traditionnellement, doivent comporter des bacheliers techno STG (notamment option gestion des systèmes d'information) et STI2D (notamment option systèmes d'information et numérique) et des bacheliers L option math, voire (ce sera plus compliqué) des bacheliers STL.

L'impact de l'évolution des programmes dans les lycées généraux est plutôt secondaire par rapport à ces deux contraintes.

Évolution des contenus

L'équilibre des Unités d'Enseignement est modifié : les mathématiques auparavant avec la programmation sont maintenant dans la même UE que la statistique, ce qui en facilitera la validation pour les étudiants moins à l'aise en mathématiques.

Le volume du cours de mathématiques a été augmenté en prenant en compte la diminution de son contenu au lycée.

Le contenu du cours de probabilités a été modifié pour prendre en compte l'augmentation du volume d'heures en probabilités au lycée et sera enseigné en utilisant beaucoup plus la simulation.

Le contenu en algorithmique (diminution du nombre d'heures) a également été revu pour prendre en compte ce qui est fait au lycée.

De manière générale, tous les cours de statistique de 1ère année prennent en compte l'augmentation du nombre d'heures de statistique dans les nouveaux programmes du lycée.

Évolution des méthodes d'enseignement

Afin de favoriser l'adaptation des différents publics à la formation, une UE d'accueil en 1ère année comporte un module “Mathématique ou Économie” dont le contenu est adapté : les bacheliers S suivront le module Économie, les ES le module Maths (renforcement des bases de l'analyse), pour les bacheliers techno ce sera fonction de leur série.

L'enseignement de statistique descriptive, qui est dans cette UE d'accueil, a aussi une mise en œuvre différenciée selon ce profil (prise en compte du fait que les ES font plus de statistique au lycée) .

Selon les départements, du tutorat peut être prévu pour accompagner les étudiants qui le souhaitent (par exemple à Paris un enseignant sera en charge des bacheliers professionnels).

L'accent est mis sur le PPP (Projet Pré Professionnel) sur les 2 ans pour ancrer encore plus les étudiants dans la formation en les faisant travailler sur les métiers, leur motivation, les méthodes de travail.

B. IUT. Départements INFORMATIQUE

Informations recueillies auprès de Max Chlebowski, IUT de Lille, membre de la CPN (Commission Pédagogique Nationale) STID et Informatique.

Comme pour STID, le Ministère a donné instruction de produire des nouveaux Programmes Pédagogiques Nationaux à mettre en œuvre en septembre 2013, en prenant en compte les nouveaux programmes du Lycée, que ce soit en séries générales ou pour les baccalauréats de Techniciens (en particulier STI2D).

Pour les départements INFO l'appui sur les contenus des programmes de Lycée est jugé suffisamment lâche pour qu'il n'y ait pas trop de contraintes nouvelles ; tout juste a-t-il été repris de l'analyse classique pour reprendre des éléments qui avaient disparu des programmes de S, tout en laissant de côté des éléments de statistique élémentaire maintenant largement pratiqués au Lycée.

Le débat le plus ardu dans la préparation du programme a porté sur la part à laisser aux mathématiques classiques face aux maths discrètes, avec le souci d'éviter la fuite en avant consistant à créer un programme si énorme que nul ne peut le réaliser en totalité.

Dans le nouveau PPN (approuvé par le CNESER le 15 avril 2013) figure une présentation bien plus détaillée des objectifs de la formation en termes de compétences professionnelles.

Il n'a pas été tenu compte de la nouvelle spécialité ISN "Informatique et Science du Numérique" de la terminale S : les rédacteurs du programme doutent que son contenu ambitieux soit assimilé par les étudiants et de plus pour l'instant la proportion des lycéens qui l'ont choisie est assez faible.

D. Classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques

Nous nous limitons ici, faute de temps et vu la nature du colloque, rassemblant des mathématiciens et des physiciens, aux filières à dominante mathématiques ou physique (MPSI, PCSI). Mais il faut savoir que la place des probabilités et de la statistique est bien plus importante dans d'autres filières, en particulier biologiques.

Dans le programme de première année (entrant en vigueur en octobre 2013), le chapitre “probabilités” a pour préambule :

Ce chapitre a pour objectif de consolider les connaissances relatives aux probabilités sur un univers fini et aux variables aléatoires définies sur un tel univers présentées dans les classes antérieures. Il s'appuie sur une étude préalable des bases du dénombrement.

Ce chapitre a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Il se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.

Les thèmes d'activité proposés sont :

- Utilisation du logiciel au programme pour simuler des variables aléatoires suivant les lois uniforme, de Bernoulli, binomiale et géométrique.
- Exemples de chaînes de Markov à espace d'états fini, exemples de marches aléatoires. Ruine du joueur.

Dans l'état actuel des programmes de seconde année (en consultation jusqu'au 20 juin 2013) , on lit :

Ce chapitre, dont l'objectif est d'aborder l'étude des variables aléatoires discrètes, généralise celle qui a été effectuée en première année et fournit des outils permettant d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de processus stochastiques à temps discret. La mise en place de ces outils nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités. Ces dernières font l'objet d'un expose a minima...

Les résultats vus en première année s'étendent de manière très naturelle au cas des variables aléatoires discrètes. Cette extension doit être effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour des activités pratiques.

Plus que ce qui figure dans ces programmes (avec moult précautions pour limiter l'aspect fondamental des notions abordées et donc les possibilités de liaisons vraiment fructueuses avec le reste du programme de maths), est intéressant ce qui n'y figure pas.

En particulier on lit explicitement dans le projet pour la seconde année :

La notion de variable à densité est hors programme.

Et la statistique est totalement absente de ces programmes.

Il y a donc une utilisation vraiment a minima d'une continuité avec les programmes de terminale ; c'est dans les grandes écoles que les élèves de ces filières reprendront contact, après deux ans d'interruption, avec les variables aléatoires continues ou avec le raisonnement statistique ; on sait que c'est souvent loin d'être satisfaisant et cela ne les prédisposera pas à en voir l'intérêt mathématique !

II. Comparaison avec les choix à l'étranger

Nous nous appuyons ici sur le numéro spécial de la revue en ligne, éditée par la SFdS (Société Française de Statistique), *Statistique et Enseignement* (volume 4, numéro 1, avril 2013) :

Le curriculum statistique dans le secondaire - Comparaisons Internationales

coordonné par Carmen Batanero (Granada), Jeanne Fine (Toulouse) et Jean-Pierre Raoult (Paris) :

<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/StatEns>

Ont contribué à ce numéro des auteurs en provenance d'Allemagne, de Belgique (francophone), du Canada (avec des variantes selon trois provinces, Alberta, Nouveau-Brunswick, Québec), d'Espagne (avec des précisions sur des dispositions particulières à l'Andalousie), de France, d'Italie, du Mexique et des USA.

Un article de synthèse dans ce numéro est celui de Gail Burrill (USA) et Rolf Biehler (Allemagne) :

Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire.

Après avoir fait une synthèse de différentes sources, ces auteurs organisent ces “idées fondamentales” autour de sept concepts : les données ; la variation ; les distributions ; les représentations ; les corrélations et associations entre variables ; les modèles probabilistes ; l'échantillonnage et l'inférence.

C'est en fonction des poids respectifs de ces concepts dans les programmes et des moyens (origine des données, outils mathématiques...) qui sont mis en avant pour les traiter que l'on peut caractériser les enseignements des différents pays.

Il faut cependant relever deux points communs :

Il n'est aucun pays où les programmes ne revendiquent, dans leurs attendus, la nécessité que l'enseignement des mathématiques, à travers en particulier la statistique, contribue à former l'enfant en tant que futur citoyen à la littératie numérique.

Dans la mesure où l'enseignement de la statistique reste dans le cadre du cours de mathématiques (même si des pistes sont parfois évoquées pour favoriser des collaborations transdisciplinaires), un souci central est celui de la formation des enseignants, que leur formation mathématique a souvent peu préparés aux spécificités de la statistique.

Dans cette typologie des 7 concepts fondamentaux, un pays comme la France, ayant choisi d'orienter son programme dans les lycées (filiales S ou ES) vers de la statistique inférentielle (intervalles de confiance, initiation aux tests d'hypothèses), met l'accent sur les distributions, les modèles probabilistes, l'échantillonnage et l'inférence.

A l'opposé les USA vont privilégier une approche à partir des données et de leur variabilité. Ceci est particulièrement frappant dans un rapport publié par l'ASA (American Statistical Association), rapport intitulé *Guideline for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE)* (Franklin et al., 2007), suite à une demande du National Council of Teachers of Mathematics (USA).

Il y a là matière à débat et on peut penser que, quoique les programmes en France soient très récents, ils connaîtront assez prochainement des évolutions reflétant cette tension.

Annexe. Liste des universités ayant répondu à l'enquête :

Brest, Clermont-Ferrand, Corse, Dijon, Grenoble, Limoges, Lorraine (Nancy + Metz), Lyon, Marseille, Montpellier, Nantes, Paris-Diderot, Paris-Est-Creteil, Paris-Est-Marne-la-Vallée, Paris-Nord, Reims, Rennes, Rouen, Toulouse