Compte-rendu d'expérimentation en classe de Première S

La classe comporte 29 élèves. C'est une « bonne classe », au sens où les professeurs, au dernier conseil de classe, en ont dit beaucoup d'éloges.
La séance se déroule en salle informatique, en classe entière. Les élèves sont deux par poste.
Les incidents usuels ne manquent pas d'arriver : 4 élèves arrivent avec dix minutes de retard, ils avaient oublié le changement de salle pourtant répété à plusieurs reprises. Deux groupes doivent changer de machine en cours de séance, leur ordinateur étant victime d'une panne intempestive d'alimentation.
La séance se déroule sans autre incident.
Tous les élèves sont actifs et désireux de résoudre le problème.
Les élèves découvrent le logiciel GEOGEBRA. Ils le prennent en main très vite et sans difficulté. Quelques-uns posent une ou deux question sur les commandes, et le professeur circule de poste en poste et donne quelques indications aux plus lents, mais la plupart explorent d'eux-mêmes les menus et se débrouille sans aide. Le travail démarre beaucoup plus vite que nous ne le pensions.
En moins de cinq minutes, les courbes sont placées et la première tangente apparaît. Son équation est affichée : $y = 2x - 1$.
Premier calcul : les uns connaissent la formule, les autres la cherchent, dans leur cahier ou leur livre. Beaucoup avancent sans hésitation, mais certains sont arrêtés.
Que signifie f'(1) ? Pour E., cela signifie manifestement « dérivée de 1 », car c'est 0. Petit cours particulier : f'(x) est une fonction, et f'(1) désigne l'image de 1 par cette fonction. Oui, il sait que la dérivée de x^2 est 2x ; mais il découvre, ou redécouvre, que f'(1) est donc ici 2×1. A-t-il un jour pris le temps de faire le lien entre les diverses écritures qu'il voit utilisées ? Il finit par retrouver l'équation fournie par le logiciel. Un peu de cohérence s'installe, à sa grande satisfaction. Mais voici un deuxième obstacle. Il doit placer sur l'hyperbole le point d'abscisse 2. La souris en arrêt, il hésite : mais quelle est donc son ordonnée ? « elle se calcule, » assure-t-il avec le plus grand sérieux. Mais comment ? il semble découvrir aujourd'hui ce qu'est la représentation graphique d'une fonction. C'est un obstacle qui a la vie longue pour beaucoup d'élèves : il se révèle par exemple lorsqu'on trace les représentations « en escalier » des suites récurrentes, en première S. Deuxième petit cours particulier…E sera allé aujourd'hui de découverte en découverte !
Pendant qu'il met un peu d'ordre dans son monde mathématique, sous l'aiguillon du logiciel qui mêle les représentations algébriques, numériques et graphiques, les autres ont avancé à grands pas .
Les premières tangentes communes apparaissent : certains ont placé un point avec sa tangente sur chacune des courbes, et déplacent les deux points. Cette méthode apporte un peu de confusion à la figure, mais elle pourra les orienter assez naturellement vers la mise en équation du problème. Certains ont cherché et trouvé comment introduire des couleurs pour clarifier le graphique. Ils en savent déjà plus que moi sur le maniement du logiciel !
Un groupe de fille a tracé pour tangente commune la tangente à la parabole au point d'abscisse -1,98. elles écrivent l'équation de la tangente à la parabole en ce point : c'est bien celle qui est fournie par le logiciel. Elles cherchent l'intersection de cette droite avec l'hyperbole : non, cette droite ne convient pas, elle n'a aucun point commun avec l'hyperbole. Il faut déplacer le point A et chercher un autre candidat !
Dans un autre groupe, l'équation obtenue est $y = -4x - 4$. les élèves écrivent l'équation de la tangente à la parabole en -2 : oui, c'est bien celle-là. Ils annoncent : « maintenant, on va voir si elle est tangente à l'hyperbole ». mais ils écrivent l'équation de la tangente en -2 à l'hyperbole. Erreur classique, mais grâce au logiciel, et à l'interaction continuelle entre

calculs et représentation graphique, ils comprennent vite leur erreur et continuent leur recherche sans aide du professeur.
Un autre groupe a déjà prouvé que la droite d'équation y= -4x – 4 est une tangente commune. Elles s'en sont d'abord convaincues en traçant les tangentes à la parabole en -2 et à l'hyperbole en -1/2, et en constatant qu'elles étaient confondues, et que le logiciel en fournissaient des équations identiques. Puis, elles ont calculé ces deux équations et ont ainsi confirmé leur réponse. Mais elles ne sont pas vraiment satisfaites et savent clairement exprimer pourquoi : « on a prouvé que cette droite est une tangente commune, mais on n'a pas prouvé que c'est la seule solution. »
Comment mettre ce problème en équation ?
L'expérimentation a mis en évidence que c'est un problème à deux inconnues : l'abscisse du point A de la parabole, et l'abscisse du point B de l'hyperbole. (Le logiciel nomme par défaut A,B,etc…les points successivement introduits, ce qui a pour effet ici d'uniformiser les notations.)
Le groupe le plus rapide a écrit : $2a(x-a)+a^2 = -\frac{1}{b^2}(x-b)+\frac{1}{b}$.
Mais comment aller plus loin ? une première tentative de calcul a été de chercher x…ils comprennent vite que ce n'est pas là le problème, et restent perplexes.
« Que voulez-vous exprimer ? Comment peut-on l'exprimer ? » Après quelques minutes de conversation, ils voient comment poursuivre, et s'orientent vers l'écriture d'un système d'équations.
Dans un autre groupe, qui a écrit l'égalité des coefficients directeurs, il faudra rappeler ce qu'est l'ordonnée à l'origine d'une droite pour avancer vers la solution.
Il reste 10mn : le professeur arrête les recherches pour une synthèse.
Tous les groupes ont tracé la tangente commune et ont obtenu l'équation : y = -4x – 4. Beaucoup ont vérifié par le calcul que cette droite est en effet une tangente commune.
Un élève va au tableau expliquer la mise en équation :
« L'idée, c'est d'utiliser les équations des tangentes. On exprime les équations de la tangente qu'on cherche avec des valeurs qu'on ne connaît pas. Les points A et B n'ont pas forcément la même abscisse. Ca donne

$$\begin{cases} y = 2a(x-a)+a^2 \\ y = -\frac{1}{b^2}(x-b)+\frac{1}{b} \end{cases}$$

On développe pour trouver quelque chose de plus simple :

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = -\frac{1}{b^2}x+\frac{2}{b} \end{cases}$$

Ces deux droites doivent être égales, donc :

$$\begin{cases} 2a = -\frac{1}{b^2} \\ -a^2 = \frac{2}{b} \end{cases}$$

Le professeur demande aux élèves de chercher la solution de ce système d'équations à la maison, et leur donne rendez-vous pour terminer la recherche au cours du lendemain.

Elle regrette le caractère trop individuel du travail. J'y vois au contraire un moment d'individualisation très intéressant : tous les élèves ont travaillé activement et ont progressé sur des questions de fond. Les plus lents ont du préciser des représentations très floues en

faisant des liens entre les divers cadres utilisés par le logiciel : numérique, algébrique, graphique. C'est peut-être eux qui ont le plus appris dans cette séance, même s'ils n'ont pas été jusqu'à la mise en équation du problème. Les plus rapides ont été amenés à réfléchir sur le rôle des variables utilisées : x,y,a,b et ont résolu les problèmes sous-jacents de quantification.
Tous ont essentiellement travaillé sur la définition et la représentation des objets manipulés : point, droite, tangente, fonction.