Enseignement des mathématiques à l'école primaire
Situation actuelle et défis à relever, priorités
évolutions de programmes
ressources

Point de vue d'une didacticienne

Comité scientifique des IREM, 13 juin 2014

Laboratoire de Didactique André Revuz
Mathématiques • Sciences expérimentales

Christine Chambris
Laboratoire de Didactique André Revuz
ESPE de Versailles, Université de Cergy-Pontoise

Autoportrait

- Chercheure en didactique des mathématiques
  - Relations grandeurs et nombres, numération décimale, tous premiers nombres
  - École élémentaire
  - Entre autres : programmes et évolutions
- Responsable groupe de travail M615 (LDAR) – primaire et 6e – nombre et géométrie
- Depuis 14 ans, formation des maîtres de primaire à l'IUFM puis à l'ESPE de Versailles

Plan

- Enquêtes DEPP
- Numération décimale
- Savoirs de référence
- Grandeurs… ce n’est pas le domaine grandeurs et mesure
- Un traité pour conclure

Des points, des courbes, des variations

- Trois notes d'information (NI) de la DEPP
- CM2 1987, 1999, 2007 (NI 08.38) calcul
  - 1987-1999 : baisse importante
  - 1999-2007 : tassement
- CP 1997, 2011 (NI 13.19) nombre
  - 1997-2011 : forte hausse en numération (autour de la comptine numérique et des calculs additifs)
- CE2 1999, 2013 (NI 14.19)
  - 1999-2013 : hausse au CP, non confirmée au CE2. relative stabilité en calcul, petite hausse en grandeurs et mesure, baisse en numération, résolution de problèmes numériques, géométrie

Des points, des courbes, des variations

- Extrait de NI 08.38, p.3 et p.5

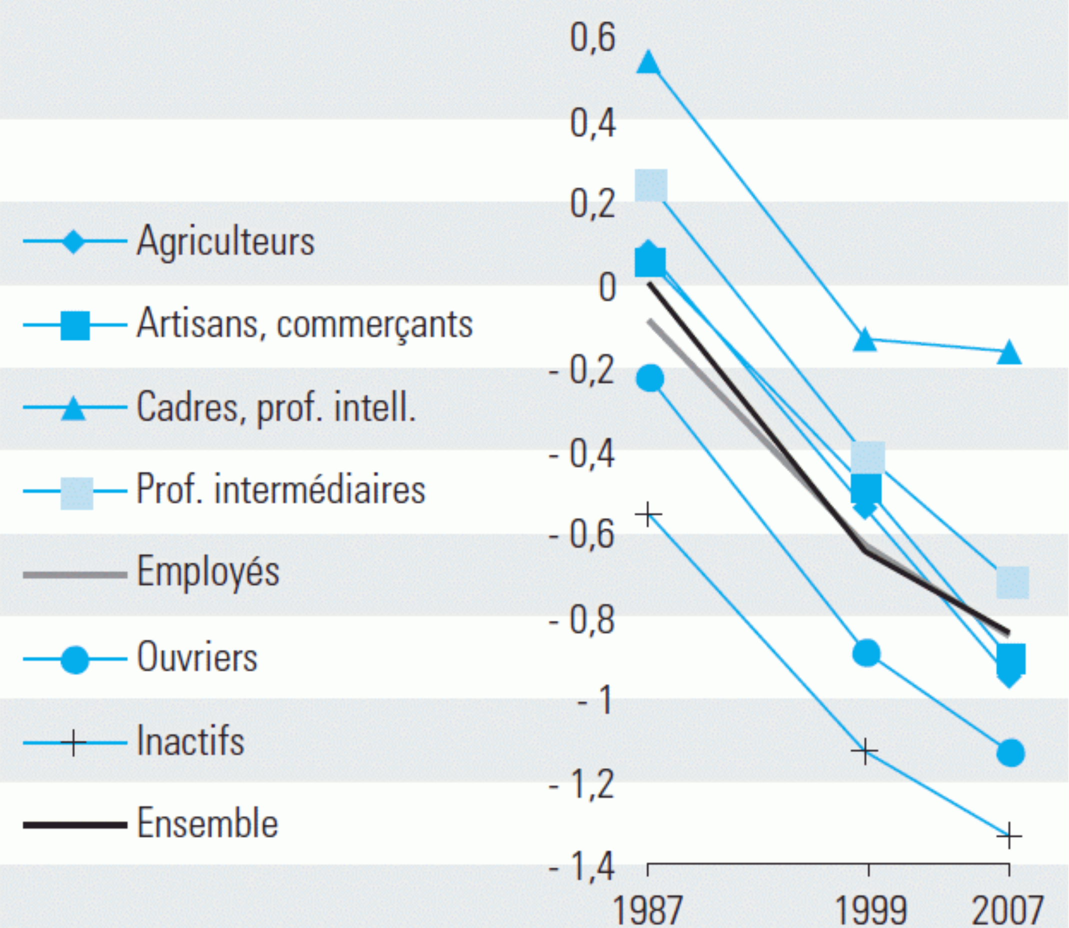
TABLEAU 3 – Calcul

	1987	1999	2007
Moyenne	0,00	- 0,65	- 0,84
Écart-type	1,00	1,19	1,15
≤ 1er décile 1987	10 %	28 %	32 %
≤ 1er quartile 1987	25 %	51 %	57 %
≤ médiane 1987	50 %	75 %	80 %
≥ 3ème quartile 1987	25 %	13 %	10 %
≥ 9ème décile 1987	10 %	8 %	4 %
garçons	0,01	- 0,59	- 0,76
filles	- 0,02	- 0,71	- 0,87
« à l'heure »	0,24	- 0,48	- 0,67
« en retard »	- 0,48	- 1,37	- 1,59

N.B. L'année 1987 est prise comme référence pour les comparaisons : les scores ont pour moyenne 0 et écart-type 1 en 1987. Une valeur négative de la moyenne indique une valeur inférieure à la moyenne des scores de 1987.

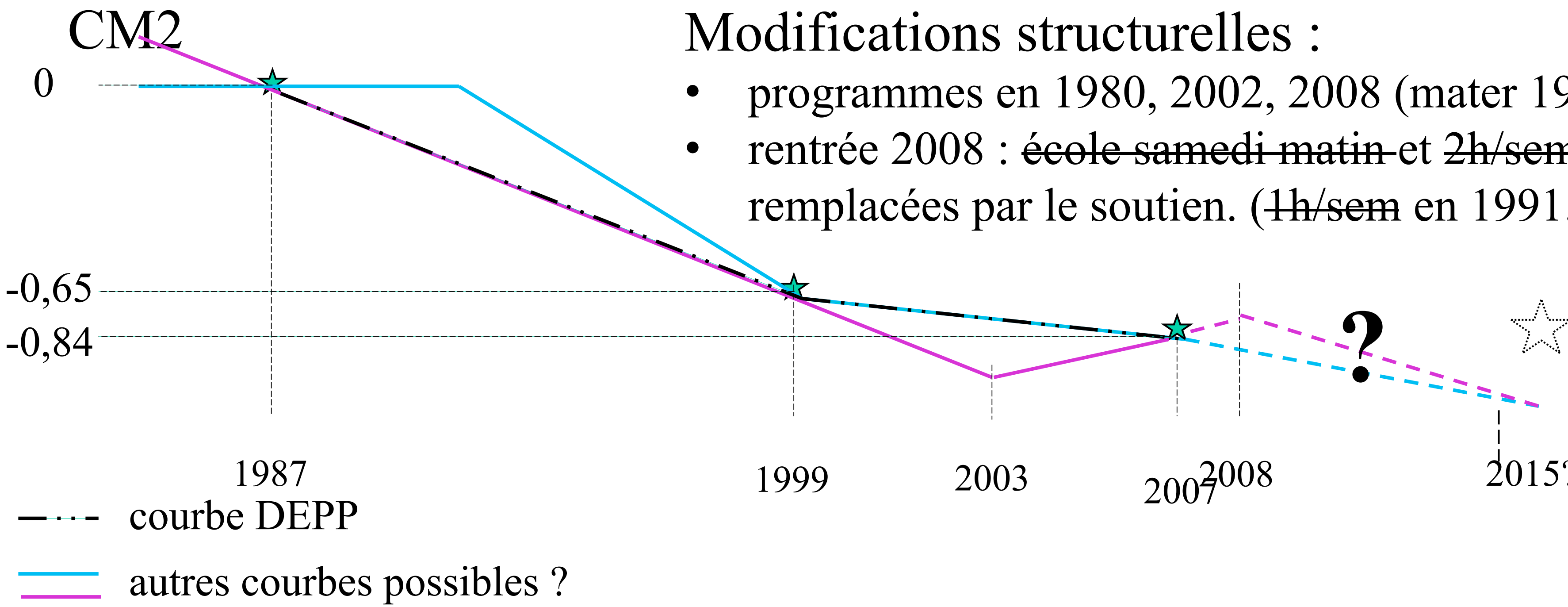
Source : MEN-DEPP

note d'information 08-38 • Page 3



Les points sont les scores moyens obtenus selon l'année de l'évaluation, pour chaque catégorie d'élèves.

Des points, des courbes, des variations



Modifications structurelles :

- programmes en 1980, 2002, 2008 (mater 1986)
- rentrée 2008 : ~~école samedi matin~~ et ~~2h/sem~~ remplacées par le soutien. (~~1h/sem~~ en 1991.)

- Que se passe-t-il au CM2 entre 1999 et 2007 ? Et depuis 2007 ?
- Que se passe-t-il au CP et au CE2 entre 1997 et 2007 ?
- Que se passe-t-il au CP et au CE2 entre 2008 et 2013 ?
- Priorité (?) de qui (?)
  - Mieux caractériser la situation actuelle
  - Moyen ? : exploiter les données de la DEPP ?

Quelques commentaires des NI DEPP CP CE2 CM2

- Brissiaud 2012 2013 2014 Café Pédagogique (comptine numérique en GS en 1986)

- Salin, Peltier, Briand, Charnay 2014 Café Pédagogique (changements importants en numération)

- Chesné 2010 Recherche et Formation (numération et autres éléments sur grandeurs)

Numération décimale

- **Deux seuls items cités** dans NI CE2 : numération
- Lis les nombres et écris-les en lettres.

  615 .... (82% à 72% 1999-2013)
- La directrice de l'école a 87 lettres à envoyer.
  Elle doit mettre un timbre sur chaque lettre. Les timbres sont vendus par carnets de dix timbres. Combien de carnets doit-elle acheter ? (32% à 18% 1999-2013)
- Programmes 2008 : « recentrage »
  - Numération : ordre, nom des nombres, suites numériques de 1 en 1, 10 en 10…
  - Les éléments liés à la signification des chiffres de l'écriture décimale n'apparaissent plus dans les programmes
- Mais… enseignement de la numération sur un temps long (~un siècle)

L'enseignement de la numération des entiers au 20e siècle

- De 1923 à 1970, numération et système métrique mêlés, tâches « identiques ». Séparation au moment de la réforme des mathématiques modernes avec l'introduction du travail en bases (encore que…).
- A partir de 1970, le système métrique vit dans le « nouveau » domaine mesure. La numération vit dans le nouveau domaine « numérique ». Tâches progressivement différentes.
- Depuis 50 ans, l'enseignement du système métrique est *relativement* stable (avec un appauvrissement probable) comparativement à celui de la numération :
  - en numération, de « nouvelles » tâches ont été introduites (notamment le dénombrement de grandes collections).
  - les conversions : tâches « anciennes » de numération disparues de l'étude actuelle de la numération (sur)vivent dans l'étude du système métrique.

La numération des entiers avant et après la réforme de mathématiques modernes

- Avant la réforme : système métrique comme contexte pour l'étude de la numération
  - 5040 = 5 milliers 4 dizaines
  - 5040 m = 5 milliers de m 4 dizaines de m = 5 km 4 dam
- Avant la réforme : la numération se structure par les unités de numération (UN) (unités, dizaines, centaines…)
- Après : évolutions séparées du système métrique et de la numération

  \- émergence de nouvelles tâches en numération : dénombrement de grandes collections

  \- ~~unités de numération~~, signification des préfixes métriques

  5 km = … hm // 5 milliers = … centaines

  5040 m = 5 km 4 dam // 5040 = 5 milliers 4 dizaines → 5040 = 5 x 1000 + 4 x 10
- Depuis 1980 : numération des entiers structurée par les écritures chiffrées des puissances de dix (et peut-être par la numération orale)

Savoirs savants de référence

Savoirs mathématiques de référence :

- Savoirs savants du 1er ordre (SS1) :
  - Savoirs utiles pour les mathématiciens, pas nécessairement adaptés pour l'enseignement primaire
- Savoirs savants du 2nd ordre (SS2) :
  - Savoirs mathématiquement corrects, utiles pour l'enseignement, pas nécessairement utiles pour les mathématiciens (Par exemple, sur les grandeurs, ouvrages et article -Repères IREM 15- de Rouche)

Savoirs savants de référence

Double mouvement : $SS2_a \rightarrow SS1 \rightarrow SS2_b$

- Numération des entiers : savoirs mathématiques de référence
  - Existence et unicité de la décomposition polynomiale des entiers dans une base, écriture chiffrée comme juxtaposition des coefficients polynomiaux (SS1)
  - Les nombres sont tirés des grandeurs (que l'on compte ou mesure). Théories « anciennes » de la numération qui réfèrent à différents ordres d'unités (unités, dizaines, centaines, milliers…), (dé)composition d'un entier en unités – autre algorithme que la division euclidienne, par création des unités successives-, écriture chiffrée comme juxtaposition du nombre d'unités de chaque ordre ($SS2_{UN}$). (pp.1-6 notes de Reynaud– 2e partie du traité de Bezout et Reynaud http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f170.image)
  - Réforme (1970) et contre-réforme (1980) : remplacement de $SS2_{UN}$ par SS1

Savoirs savants de référence

Double mouvement : $SS2_a \rightarrow SS1 \rightarrow SS2_b$

- Mutation de la décomposition polynomiale en écriture chiffrée des puissances de dix (ÉCPD), SS1 en un SS2 ($SS2_{ÉCPD}$) :
  - Le SS1 est attaché au dénombrement de collections.
  - Sous la pression du système d'enseignement, mutation du SS1 : $\sum r_i 10^i$ devient a x 1000 +b x 100 + c x 10 + d ($SS2_{ÉCPD}$)
  - A partir de la décomposition multiplicative, l'écriture chiffrée *abcd* ne s'obtient pas / plus par la juxtaposition des coefficients mais implicitement ou explicitement mais à partir de a000+b00+c0+d puis par le calcul d'une addition « en colonne » ou par oralisation terme à terme : a000 // a mille b00 // b cent c0 // c-ante d // d puis écriture en chiffres

$$\begin{array}{rcccc} & a & 0 & 0 & 0 \\ + & & b & 0 & 0 \\ + & & & c & 0 \\ + & & & & d \\ \hline & a & b & c & d \end{array}$$

- Ce SS2 peut s'interpréter comme une « théorie de la numération » en écritures chiffrées des puissances de dix : 1, 10, 100, 1000, … ($SS2_{ÉCPD}$)
- Mutation (implicite) d'un SS1 en SS2.

Savoirs savants de référence
$SS2_{UN}$ et $SS2_{ÉCPD}$

- Dans SS1 (par suite dans $SS2_{ÉCPD}$) et dans $SS2_{UN}$, l'existence et l'unicité de la décomposition d'un entier dans une base ne sont pas obtenus par le même algorithme.
- Dans SS1, c'est l'existence et l'unicité du reste dans la division euclidienne qui donne les coefficients de du polynôme. Dans $SS2_{UN}$, c'est un algorithme qui est associé **au concept d'unité**, absent du SS1.

Dans $SS2_{UN}$, l'algorithme (récursif) est le suivant :

- Les dix premiers nombres sont construits par adjonction de une unité à un
- Un nouvel ordre d'unité, la dizaine, est construit, à partir de dix unités.
- Les dizaines sont comptées comme l'étaient les unités, de un à dix.
- Aux neuf premières dizaines, sont adjointes les neuf premiers nombres.
- Un nouvel ordre d'unité, la centaine, est construit, à partir de dix dizaines.
- Les centaines sont comptées comme l'étaient les dizaines et les unités simples, de un à dix.
- Aux neuf premières centaines, sont adjointes les nombres construits précédemment, etc.

Les unités de numération (UN)

- Potentiellement, les UN sont à la base d'un système explicatif cohérent, consistant pour toute la numération, entière, décimale, métrique, et le calcul.
- Les unités de numération i.e. les mots unité, dizaine, centaine… vivent très mal dans l'enseignement actuel (quasi « disparition » en deux temps : 1970 puis 1980) :
  - Sans elles : la seule unité est le « nombre 1 »
  - Elles survivent dans le tableau de numération, comme nom de colonnes ou de position. Elle survivent dans quelques décompositions dont « chiffre des », « nombre de »
  - **Avant 2008, les relations entre unités telles que 1 millier = 10 centaines ne sont pas toujours formulées dans les manuels**
  - **Avant 2008, « 6543 par paquets de 100 » considéré comme un problème de division par les enseignants et massivement échoué avant l'apprentissage de la division par un nombre à 3 chiffres (Parouty 2004)**

Les unités de numération (UN)

- Les problèmes liés à une numération sans UN :
  - Les liens avec les décimaux sont plus difficiles. La numération des décimaux est construite implicitement (au moins) en UN. Sans UN dans la numération des entiers, la numération des décimaux n'apparaît pas comme un prolongement de la numération des entiers. Tout est à refaire avec les décimaux.
  - ? Échecs (relatifs) au problème de numération « les timbres »
  - Les liens avec le système métrique sont plus difficiles

Les unités de numération (UN)

- **Un défi : restaurer les unités de numération et introduire des tâches faisant travailler les relations entre unités.**
- Des travaux récents montrent que c’est difficile. Tempier 2013
- Hypothèse : un faisceau de raisons pour expliquer les « résistances » des enseignants à (ré)introduire les UN
  - Depuis 1980, il existe un autre système explicatif cohérent ($SS2_{ÉCPD}$) sur le plan théorique, reposant sur les écritures chiffrées des puissances de dix 4567 = 4x1000+5x100+4x10+7. Très présent dans les manuels.
  - Il existe un autre (?) système explicatif dérivé plus rudimentaire qui s’appuie sur la comptine orale (qui est « naturalisée »). Apparemment très présent dans les classes.
  - Différences faibles, à première vue, entre l’un ou l’autre de ces systèmes et les UN. Pas forcément visible par les enseignants même dans contexte de formation spécifique.
  - Changer de système explicatif est couteux (pour un enseignant). Intérêt ?
  - Autre chose ?
- Equilibres à trouver… Aucun sens de tout jeter

Levier ? : (ré-)introduire le lien entre numération des entiers et des décimaux

- Les UN sont présentes implicitement dans l'étude de la numération des décimaux : désignations orales de $1/10$ ou de 0,1.
- En formation : faire prendre conscience de la rupture actuelle entre entiers et décimaux.
- Introduire explicitement les unités de numération dans l'étude de la numération des décimaux. Réintroduire ls unités de numération en numération des entiers… dans les tâches et dans les techniques de traitement
- Des conversions existent implicitement dans l'étude des décimaux : $30/1000 = /100$
- A formuler sous la forme : convertir 30 millièmes en centièmes et : convertir 30 centaines en milliers.

Levier ? : utiliser les UN à l'oral ne suffit pas, elles doivent exister à l'écrit

- Pour les décimaux, les UN sont présentes à l'oral.
- De même, dans certaines classes, les professeurs font lire : 3x100 comme 3 centaines. C'est bien.
- Néanmoins, l'introduction des UN à l'oral, sans l'écrit, ne permet probablement pas la réintroduction de tâches essentielles pour la numération : en particulier, les conversions.

Levier ? : utiliser le système métrique pour restaurer unités de numération

- Peut-être : plus facile de comprendre ce qu'est une conversion entre m et cm qu'entre centaine et dizaine.
- En formation : expliciter un parallèle entre numération et système métrique.
- Introduire explicitement les unités de numération dans l'étude du système métrique (Un kilomètre, c'est un millier de mètre. Un hectomètre, c'est une centaine de mètre. Un mètre, c'est une centaine de cm.).
- Certaines tâches faisant travailler les relations entre unités existent en système métrique et pas en numération. Les y réintroduire…
  – convertir 3 milliers en centaines (convertir 3 km en hm)
  – comparer 4 dizaines et 3 centaines (comparer 4 dm et 3 m).
- Embryon de ressource : « Le système métrique au service… »

Les unités de numération (UN)

- Pour changer : besoin de ressources et de formation *ad hoc*
  – En termes de savoirs de référence
  – En termes de situations pour faire fonctionner les savoirs
  – En termes de concepts (et de lexique) : importance des notions d'unité et de conversion

Les grandeurs

Sur le plan international, enseignement des grandeurs est problématique

- Bonne réussite dans utilisation des instruments,
- Problème au niveau des connaissances conceptuelles, effets visibles tardivement : manques pour les fractions, pour la proportionnalité
- Parmi les perspectives les plus prometteuses (ZDM special measurement) : mettre les grandeurs aux fondations de l'étude d'autres notions telles (les fractions,) la proportionnalité, les probabilités, voire l'algèbre (Davydov)…

Les relations entre grandeurs et nombres dans les programmes en France

- L'état actuel des relations entre grandeurs, nombres et opérations à l'école primaire résulte de nombreuses transformations depuis 150 ans :
  - Les pratiques de la vie courante qui implique les grandeurs (notamment techniques de mesurage sans utilisation d'« étalons » de masse et ni de capacité, achats « à l'unité » dans des emballages qui prennent en charge les capacités ou les masses, …)
  - Les relations entre nombres et grandeurs dans les mathématiques savantes (suppression des grandeurs dans la définition savante des nombres depuis le milieu du 19e siècle)
  - Dans l'enseignement, **moment crucial de la réforme des mathématiques modernes – programmes de 1970 en primaire en France**

La réforme des mathématiques modernes et ses suites

- Réforme des mathématiques MODERNES : modification des savoirs de référence et de leur nature
- Conséquence (1) : structure du programme de 1970 = réorganisation du programme de 1945 avec création du domaine « mesure » (il contient ce qui relevait du continu tant en arithmétique qu'en géométrie dans l'ancien programme – sauf la proportionnalité qui est intégrée au « numérique »)
- Conséquence (2) : modifications de relations entre objets dans l'enseignement (ruptures de relations installées depuis longtemps, avant recompositions éventuelles) :
  - Numération et système métrique
  - Sens des opérations et grandeurs
  - (Techniques de calcul et sens des opérations)

Savoirs savants de référence

Double mouvement : $SS2_a \rightarrow SS1 \rightarrow SS2_b$

- Fractions. Rationnels : savoirs mathématiques de référence
  - comme mesure d'une grandeur, via opérations sur grandeurs (SS2)
  - comme classe d'équivalence de couples d'entiers (SS1)
- La réforme remplacement de SS2 par des SS1.
- Evacuation des grandeurs de l'enseignement élémentaire. (Evacuation des « unités » ?)

- Retours plus ou moins explicites des grandeurs en primaire (fractions 1980, 2002, proportionnalité 2002) via opérations sur les grandeurs *implicites*
- Peu d'évolution explicite des savoirs savants de référence pour le primaire depuis la réforme (sauf GM), mais sortes de reconstructions peu structurées et implicites (« mutations » de SS1 en SS2)

Levier ? : réintroduire les opérations sur les grandeurs à l’école

- Opérations sur les grandeurs et lexique :
  - Additionner des grandeurs
  - Multiplier une grandeur non mesurée (puis mesurée) par un entier : doubler, tripler, quadrupler une longueur, une masse..
  - Diviser une grandeur non mesurée (puis mesurée) par un entier
  - En relation avec le lexique : moitié, double, tiers, triple, quart…
  - Et aussi, plus généralement : diviser par/en 5, le cinquième de…
- Puis réintroduire les fractions de grandeur :
  - 3 quarts d’une longueur, 7 cinquièmes d’une longueur.

- Dès le cycle 2, notamment pour la longueur
- Au cours de tâches d’estimation notamment

- A relier à un moment aux opérateurs sur les nombres : la moitié de 60, les 3 quarts de 100

Levier ? : réintroduire les opérations sur les grandeurs à l'école

- Dans SS1 pour le « numérique » : absence d'opération sur les grandeurs
- Dans les SS2, présence d'opérations sur les grandeurs, notamment les fractions de grandeurs :
  - Rôle dans la construction des nombres, fractionnement de grandeurs
  - Rôle dans les techniques pour d'autres domaines, notamment la proportionnalité.
- Quelque chose avec les conversions

Levier ? : Tâches d'estimation

- En unités conventionnelles : ex. estimer en mm (faire fonctionner les relations entre unités et les ordres de grandeur des unités métriques)
- Pour les opérations sur les grandeurs : ex. on « dessine » une longueur, sans instrument, tracer un trait de longueur moitié, 5 quarts… (vérifier en pliant)
- Placer des points d'abscisses entière ou rationnelle sur une droite graduée (à condition d'avoir défini l'unité ! Ce qui est rare)

Savoirs de référence et droite graduée

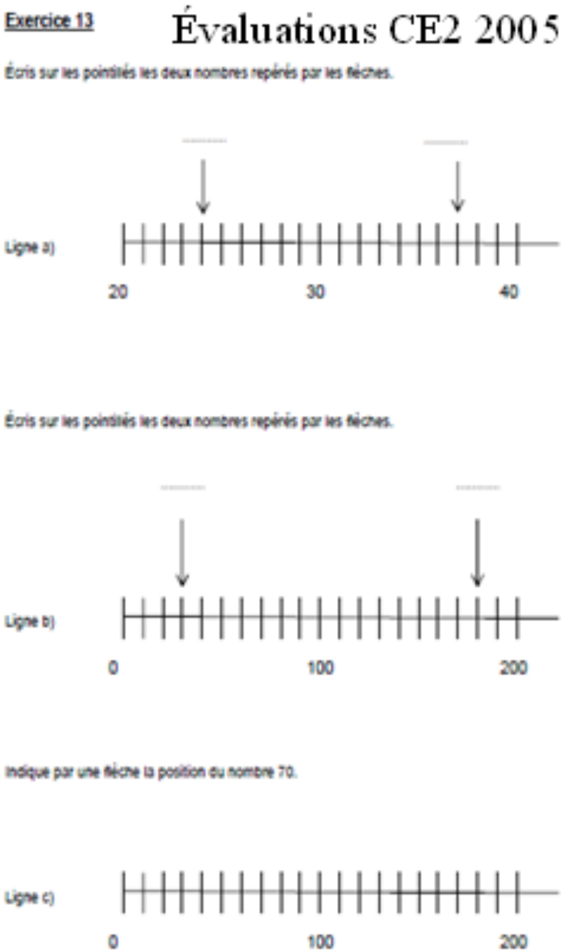
Dans les mathématiques ?

- La droite graduée : la droite des réels

A l'école ?

- Elle apparaît dans le numérique, dans les programmes de 1980
- La droite graduée est présente dès le programme de CE1.
- L'abscisse n'est en général pas définie dans les manuels.
- L'abscisse n'apparaît quasiment jamais explicitement comme mesure de la longueur entre l'origine et le point, en prenant la longueur entre 0 et 1 comme unité.
- Tâches proposées : simples. Réussite par dénombrement de 1 en 1… sauf…

Savoirs de référence et droite graduée



code 1	82,72
code 9	16,18
code 0	1,10

code 1	80,92
code 9	16,99
code 0	2,09

code 1	41,94
code 4	39,24
code 9	16,23
code 0	2,59

code 1	29,45
code 4	35,27
code 9	30,46
code 0	4,82

code 1	63,53
code 9	24,09
code 0	12,38

- Nécessité d’élaborer un SS2 qui articule droite graduée, grandeurs et nombres
- Dans la littérature, des tâches existent pour « apprendre » l’abscisse à l’école

<u>codage</u>
1 : réussite
4 : réponse fausse prévue (3 resp. 108)
9 : autre réponse fausse
0 : absence de réponse

Pour conclure : une conférence de consensus pour un traité

- un texte consensuel et reconnu par « toute » la communauté éducative (auteurs de manuels, formateurs…)
- un texte incluant des SS2
- des SS2 partagés avec le début du collège
- un texte comportant des éléments sur les situations pour faire fonctionner les savoirs
- …
- Sur la numération décimale
  - le « principe d'échange à 10 contre 1 » vs. les conversions de centaines en dizaines…
- Sur les grandeurs / nombres
  - notamment prenant en charge les opérations sur les grandeurs, les fractions, la proportionnalité, la droite graduée…
- Sur la géométrie / grandeurs