Compte-rendu d'expérimentation

Enseignement des concepts de logique en première année d'université au Cameroun

Judith NJOMGAG NGANSOP

judithnjomg@yahoo.fr

Les concepts de logique rentrent dans les « notions-outils » de l'activité mathématique, c'est-à-dire, concepts qui sont utilisés dans la pratique de l'activité mathématique sans en être des objets d'étude. Les difficultés inhérentes à ces concepts sont généralement ignorées par les enseignants, ce qui a pour conséquence qu'ils ne sont pratiquement pas pris en charge dans la classe de mathématiques.

Par ailleurs, au Cameroun, dans le secondaire, les cours de mathématiques sont dispensés presque exclusivement dans le langage courant, alors qu'à l'université ils sont dispensés dans un langage mixte (langage courant et formel), ce qui est à l'origine de nombreuses difficultés que les étudiants rencontrent dans la pratique des mathématiques.

Nous parlerons de quelques difficultés bien réelles dans le cours de mathématiques, puis nous présenterons une expérimentation que nous avons menée avec huit étudiants volontaires de première année de mathématiques de l'Université de Yaoundé 1 au Cameroun au cours de l'année universitaire 2009-2010.

INTRODUCTION

Nous avons mené notre travail au Cameroun où l'enseignement se fait soit en français, soit en anglais pour les cycles primaire et secondaire, et dans les deux langues dans l'enseignement supérieur. Nous avons choisi de faire notre travail dans le cadre d'expression française.

Dans l'enseignement secondaire, l'enseignement de la logique est quasi absent des programmes : les instructions officielles qui accompagnent les programmes recommandent un « bref éclaircissement » à l'occasion d'une rencontre au cours d'une leçon, avec un concept de logique. Ce n'est pas le cas dans l'enseignement supérieur, où un cours de logique est dispensé en début d'année. Les concepts qui y sont développés ne sont pas toujours en adéquation avec l'utilisation qui en est faite dans le cours de mathématiques : le cours de logique porte principalement sur la logique propositionnelle, et la quantification y est introduite de façon très élémentaire. Par ailleurs, les énoncés deviennent plus complexes, et le formalisme est introduit sans explicitation. Cela a pour conséquence que, loin de faciliter la compréhension des énoncés, le formalisme représente plutôt un obstacle pour les étudiants.

Nous illustrerons quelques-unes des difficultés auxquelles sont confrontés les étudiants dans la suite, puis nous présenterons l'expérimentation que nous avons menée avec huit étudiants de première année de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure[1] de Yaoundé au Cameroun.

1. Des difficultés bien réelles

Nous parlerons de deux types de difficultés : les difficultés inhérentes au traitement des concepts de logique et les difficultés d'ordre linguistique.

1.1. La négation des énoncés quantifiés

Au cours d'un module expérimental à l'université Lyon 1 avec huit étudiants de première année de licence de mathématiques, nous avons demandé de donner la négation de :

1- Toutes les boules sont rouges
2- Certains nombres entiers sont pairs

Nous avons obtenu trois réponses différentes. Pour les mêmes énoncés donnés à 28 étudiants camerounais dont la tâche était la même que celle demandée au étudiants lyonnais, nous avons obtenu 5 réponses différentes.

Ceci montre que la construction de la négation est problématique.

1.2. Analyse d'un énoncé

Dans notre mémoire de master, nous avons analysé l'énoncé suivant, contenu dans le cours d'Analyse 1 de Guy LAFFAILLE et Christian PAULY[2].

---

[1] Ecole Normale Supérieure de Yaoundé forme les professeurs des collèges et de lycées, et les conseillers d'orientation.
[2] Professeurs à l'université de Montpellier 2

« si (i) (« pour toute suite $(u_n)_n$ à valeurs dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ » on a « $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$ »), alors (ii) (f est continue en a) »

f désigne une fonction de A ($A\subset \mathbb{R}$) vers $\mathbb{R}$ et a est un élément de A.

C'est un énoncé qu'il faut démontrer par contraposition.

Structure de l'énoncé :

$$(\forall u, P(u) \Rightarrow Q(u)) \Rightarrow S$$

Où $(\forall u, P(u) \Rightarrow Q(u))$ est la proposition (i) et S la proposition (ii). Cette formule est très éloignée de la formule atomique « $\forall x, R(x)$ » et de la formule « $A \Rightarrow B$ ». La démonstration par contraposition demande la construction de la négation de $(\forall u, P(u) \Rightarrow Q(u))$ et de S, or la négation des propositions du type (i) n'est pas donnée dans le cours de logique.

1.3. Les difficultés d'ordre linguistique

1.3.1. Le passage du langage courant au langage formel

Nous avons demandé à 68 étudiants de première année de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure[3] de Yaoundé au Cameroun, d'écrire en langage formel l'énoncé suivant :

« Tout entier pair n, supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers » puis de proposer une mise en œuvre de l'étude de cette conjecture.

Nous n'avons obtenu qu'une réponse correcte :

L'étudiant a désigné par A l'ensemble des entiers pairs et supérieurs ou égaux à 4 et par P l'ensemble des entiers naturels premiers. Il a donné l'énoncé suivant :

$\forall n \in A, \exists (a,b) \in P^2, n = a + b$

Cette réponse permet de faire l'économie des connecteurs et des quantificateurs. En effet la solution *explicite* est :

$\forall n \in \mathbb{N}\ \big(\big((\exists k \in \mathbb{N}\ , n = 2k) et\ (n \geq 4)\big) \Rightarrow (\exists (p,q) \in P, n = p + q)\big)$, où P désigne l'ensemble des nombres premiers.

Pour ce qui concerne le deuxième volet de la question, aucune réponse n'a été enregistrée. On peut faire l'hypothèse que cela est dû à des difficultés rencontrées au cours de la formulation de cette conjecture en langage formel.

[3] Ecole Normale Supérieure de Yaoundé forme les professeurs des collèges et de lycées, et les conseillers d'orientation.

1.3.2. L'enseignement des mathématiques dans un contexte multilingue

- En arabe, les travaux de Ben Kilani ont montré que la négation en arabe est la négation mathématique, ce qui n'est pas le cas pour le français. Le passage de l'enseignement des mathématiques de l'arabe au français est susceptible d'engendrer des difficultés.
- Nous menons actuellement une étude sur les éventuelles influences que pourraient avoir la pratique de la langue Ewondo sur les apprentissages en mathématiques. Quelques résultats :
  - La construction de la négation est complexe ; elle utilise le morphème « á … kig ». Le « kig » est beaucoup plus une particule renforçative que négative. On peut exprimer la négation seulement avec le « á »
  - La négation des énoncés construits avec le verbe *être* n'utilise pas ce morphème ; il y a changement de d'expression du verbe
  - Il existe plusieurs autres marqueurs de négation, et leur utilisation dépend du contexte
  - La négation s'applique au verbe et non à toute la phrase.
  - Il y a une variation tonale
  - Deux quantificateurs : un universel et un existentiel
  - Le « un » s'exprime de deux manières selon qu'il est le chiffre 1 ou l'article indéfini.
  - Quatre personnes (dont trois étudiants de mathématiques) qui parlent couramment Ewondo à qui nous avons demandé de donner la négation d'un énoncé de la forme $P \Rightarrow Q$ nous l'ont donnée sous la forme $non\ P \Rightarrow non\ Q$. Nous avons en perspective d'interviewer un enseignant de mathématiques parlant couramment l'Ewondo.

2. Compte rendu de l'expérimentation

2.1. Présentation de l'expérimentation

L'expérimentation s'est déroulée au début du mois de janvier. A cette période de l'année académique, les étudiants ont d'une part reçu le cours de logique, et d'autre part, eu le temps de mettre en œuvre les concepts étudiés.

68 étudiants de première année de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé ont répondu au questionnaire que nous leur avons proposé, puis nous avons à la suite de ce questionnaire, accompagné huit étudiants volontaires ayant répondu au questionnaire pendant six séances de deux à trois heures chacune :

- Pendant les deux premières séances, nous avons corrigé le questionnaire en apportant des clarifications sur les concepts en jeu, à savoir, l'implication, la négation, la quantification, l'équivalence ;
- Pendant les quatre autres séances, nous avons travaillé l'analyse de démonstrations et sur des exercices pris dans une fiche de travaux dirigés.

Nous avons fait deux groupes de quatre étudiants. Le principe consistait à faire travailler chaque groupe : ils devaient discuter et valider ensemble les réponses aux questions, puis nous faisions une mise en commun des résultats des deux groupes.

Le travail en commun se déroulait pendant environ une heure à une heure et trente minutes.

2.2. Quelques points

1-Question : *Déterminer l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à vingt vérifiant la propriété « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier ».*

Les deux groupes ont donné la réponse correcte, mais elle était beaucoup plus basée sur l'intuition que sur une argumentation de logique : « ce n'est que sur les nombres pairs qu'il y a une contrainte, donc on doit mettre tous les nombres impairs et seulement les nombres pairs qui vérifient la propriété ». Des enregistrements, il ressort que plusieurs étudiants n'étaient pas très convaincus par ce résultat. C'est l'argument logique qui les a convaincus.

Notions explicitées :

- Les phrases ouvertes et les propositions : définition de proposition et de phrase ouverte, satisfaction d'une phrase ouverte par un élément de l'univers du discours, passage d'une phrase ouverte à une proposition
- Vérité d'une implication matérielle

2-Question : *Parmi les phrases suivantes, indiquer celles qui sont vraies ; celles qui sont fausses et celles pour lesquelles on ne peut pas se prononcer. Vous justifierez soigneusement* *vos réponses (On se place dans la géométrie euclidienne classique enseignée au collège et au lycée).*

1. *Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires*
2. *Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange*
3. *Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré*

Notions explicitées :

Interprétation de « un » : quantificateur existentiel, universel ou élément générique ; référence aux énoncés dans le cours de mathématiques, conditionnel implicite.

Quantification implicite des énoncés, négation des phrases ouvertes.

3-Question : *Donner la négation de chacune des phrases suivantes :*

1. *Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges*
2. *Certains nombres entiers sont pairs*
3. *Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.*
4. *La limite d'une fonction est toujours finie.*

Parmi les négations énoncées : « tous les nombres entiers ne sont pas pairs » parce qu'il n'est pas prudent de dire *sont impairs* à la place de *ne sont pas pairs*.

Notions explicitées :

- Négation des énoncés quantifiés : norme linguistique de la négation en français, ambigüité de *tous ... ne ... pas…,* inter définissabilité des quantificateurs ∀ et ∃,
- Négation des énoncés conditionnels
- Négation et contraire des énoncés universellement quantifiés et des termes (pair/impair, croissant/décroissant, …)
- Notion de contre-exemple (lien avec la négation d'une universellement quantifiée)

4-Question : *Dans ce qui suit,* (u_n) *désigne une suite définie par récurrence sous la forme «* $u_{n+1} = f(u_n)$ *», où* f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$. *On a alors le résultat suivant :*

« Si la suite (u_n) *est convergente, alors sa limite est solution de l'équation f(x)=x »*
Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) *si :*

1. *L'équation « f(x)=x » n'a pas de solution*
2. *L'équation « f(x)=x » a au moins une solution.*

Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de l'équation « f(x)=x » si :

3. *La suite* (u_n) *est convergente*
4. *La suite* (u_n) *n'est pas convergente*

L'une des questions qui a alimenté les discussions au cours de la mise en commun était de savoir pourquoi on ne pouvait rien dire à la question 2.

Notions explicitées : conditionnel courant vs conditionnel matériel ; contraposée d'une implication.

5-Question : *Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle peut être utilisée, ou non, pour compléter la phrase qui suit afin d'obtenir une définition mathématique correcte. Vous justifierez soigneusement vos réponses :*

*« Une fonction numérique f de la variable réelle x est majorée sur un intervalle **I** de l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels* si et seulement si*…………………………………….»,*

1. *Pour tout x élément de I, f(x)≤M*
2. *Si x est un élément de **I**, alors f(x)≤M*
3. *Pour tout x élément de **I**, il existe un réel M tel que f(x)≤M*
4. *Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de **I**, f(x)≤M*
5. *Si x est un élément de **I**, alors il existe un réel M tel que f(x)≤M*

Le but de la question était de vérifier que les étudiants faisaient bien la différence entre $(\forall x, \exists y, P(x,y))$ et $(\exists x, \forall y, P(x,y))$. Tous ont répondu que la réponse 4 était la bonne. Certains ont proposé la 3 aussi, mais ils ont été confrontés à la démonstration la réciproque qu'ils n'ont pu établir.

Notions explicitées : Inversion des quantificateurs ∀ et ∃ et différence entre les deux écritures ; différence entre les écritures 3 et 5 : clôture universelle et existentielle d'un énoncé ouvert.

6-Question : *Ecrire en langage formel l'énoncé suivant :*

« Tout entier pair n*, supérieur ou égal à* 4 *est la somme de deux nombres premiers »*
Comment pensez-vous mettre en œuvre l'étude de cette conjecture ?

Deux principaux problèmes : comment exprimer dans le langage formel qu'un nombre est premier, et comment mettre en œuvre la conjecture.

7-***Analyse d'une démonstration*** : Le théorème du point fixe

Théorème du point fixe
Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, continue sur $\mathbb{R}$. Si f est contractante, alors elle admet un unique point fixe.

Une démonstration est proposée, suivie des questions suivantes :

Repérer :
- la structure logique globale de la démonstration
- les modes de raisonnement utilisés
- les théorèmes mobilisés explicitement
- les théorèmes mobilisés sans être explicités
Préciser le statut logique des lettres (variables libres, liées, éléments génériques, élément particuliers) et indiquer ce qui ne vous parait pas clair.

Cet exercice a permis de montrer différents statuts logique que peuvent prendre des lettres dans les énoncés mathématiques, de rappeler le principe de démonstration par élément générique, et de voir l'importance de la structure des énoncés.

CONCLUSION

Cette expérimentation a permis aux étudiants de pouvoir préciser les idées qu'ils avaient sur les concepts de logique, d'avoir des clarifications sur certains d'entre eux qu'ils ne maîtrisaient pas et enfin de voir comment ils peuvent être utilisés en mathématiques.

En perspective :

Organiser pour un groupe d'étudiants, une formation à la manipulation des concepts de logique en relation avec le cours de mathématiques en nous inspirant de l'accompagnement présenté.