Les mathématiciens et l'enseignement de leur discipline en France

CIRM – Luminy Marseille – 13 au19 mars 2010

L'enseignement de la notion de limite au moment de la transition lycée/université

CI2U Universités

Denise Grenier (Grenoble), Viviane Durand-Guerrier (Montpellier), Nicolas Grenier-Boley (Rouen) , Jean-Yves Boyer (Bordeaux), Patrick Frétigné (Rouen), Marc Rogalski (Paris), Fabrice Vandebrouck (Paris)

Déroulement de l'atelier

- Présentation de la CIIU (*Patrick Frétigné, responsable*)
- Quelques résultats issus d'un questionnaire (*Viviane Durand-guerrier et Fabrice Vandebrouk*)
- Aperçu sur les programmes et quelques manuels de 1ère et Terminale scientifique (*Denise Grenier et Nicolas Grenier-Boley*)
- Aperçu de quelques manuels universitaires (1960- 2010) (*Jean-Yves Boyer*)
- Quelques brins de nostalgie : que pouvait-on enseigner il y a 15 ans sur les suites numériques ? Est-ce encore possible ? (*Marc Rogalski*)
- Débat avec les participants

Contact : patrick.fretigne@univ-rouen.fr

Présentation de la CIIU

Patrick FRETIGNE, IREM de Rouen

Responsable de la CIIU

Commission Inter-IREM Université (CIIU)

- **Jean-Yves Boyer (Bordeaux)**
- **Viviane Durand-Guerrier (Montpellier)**
- **Patrick Frétigné (Rouen)**
- **Patrick Gabriel (Dijon)**
- **Denise Grenier (Grenoble)**
- **Nicolas Grenier-Boley (Rouen)**
- **Ghislaine Gueudet (Rennes)**
- **Pierre Lapôtre (Lille)**
- **Gwenola Madec (Paris Nord)**
- **Frédérique Plantevin (Brest)**
- **Marc Rogalski (Paris)**
- **Jean Souville (Poitiers)**
- **Fabrice Vandebrouck (Paris)**

- 4 réunions par an
- Paris-Chevaleret
- Le Samedi
- Prochaine réunion le samedi 12 juin 2010 *(ouverte à tous et à toutes)*

Thème :

« L'accompagnement des étudiants dans les apprentissages : exemples en France et en Belgique »

Nos thèmes de travail récents et en cours

- Le travail personnel des lycéens/des étudiants
- Comment enseigner autrement en « L »
- Débat sur le socle
- Questionnaires à l' entrée à l'université
- La place de l'enseignement de la logique
- Comment enseigner des notions « transversales » en Licence
- Le statut de la variable dans les énoncés

Quelques résultats issus d'un questionnaire

Viviane DURAND-GUERRIER, IREM de Montpellier
Fabrice VANDEBROUCK, IREM de Paris 7

Une enquête de la commission Inter - IREM Université

Questionnaire sur
valeur absolue - limites - logique

Etudiants arrivant dans le supérieur,
rentrée 2006

Des hypothèses sur des obstacles possibles

- Deux niveaux de conceptualisation imbriqués sur la notion de fonction dans le secondaire.
  - ✓ Niveau ponctuel (fonction comme processus ponctuel avec une vision discrète de la ligne numérique)
  - ✓ Niveau global (fonction comme un objet global sur lequel on peut faire des manipulations algébriques)
- Le niveau local est peu travaillé dans le secondaire tandis que les outils et les techniques de ce niveau sont introduit en début d'université.
- Ces deux niveaux ne sont pas identifiés par les élèves du secondaire. En outre, au niveau global une large algébrisation du niveau global est prévisible en raison de la prédominance dans le curriculum des procédures algébriques.

Quelques résultats portant sur 298 réponses analysées(1)

1. Parmi ces suites données par leur terme général, quelles sont celles qui ont une limite quand n tend vers l'infini ? Précisez cette limite quand elle existe.

1-1 $(-1)^n + 1$	1-2 $\sqrt{n} - n$	1-3 $\sin(2\pi n)$	1-4 $\cos(2\pi/n)$
48%	46%	18%	41%

2. Donnez les limites des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{e^x}{x^3}$	2-1a x tend vers plus l'infini	2-1b x tend vers 0	2-1c x tend vers moins l'infini
	78%	9%	67%

$g(x) = x^{10} e^x$	2-2a x tend vers plus l'infini	2-2b x tend vers 0	2-2c x tend vers moins l'infini
	87%	77%	55%

$j(x)= \cos(2\pi x)$	2-3 x tend vers plus l'infini	$l(x)=ln(x)-ln(2)/(x-2)$	2-4b x tend vers 2
	20%		13%

Quelques résultats portant sur 298 réponses analysées (1)

- Seuls 3 étudiants répondent correctement à la fois à la question 1-3: sin (2πn), et à la question 2-3: cos (2πx).
- Les analyses des réponses permettent de dégager trois catégories d'étudiants :
  - ✓ Ceux qui se situent plutôt au niveau ponctuel (Groupe P, 68 étudiants)
  - ✓ Ceux qui se situent plutôt au niveau global (groupe G, 104 étudiants)
  - ✓ Ceux pour lequel on ne peut pas trancher (Groupe U, 126 étudiants)
- Un résultat important est la forte cohérence entre les réponses aux questions 1-3 qui ont permis la catégorisation et la question 2-3 :
- 20% de résultat positifs pour l'ensemble ; 52% pour le groupe G ; 4% and 3% pour les groupes P et U respectivement.
- Réciproquement, 90% de réponses correctes pour 2-3 correspondent au groupe G.

Eléments d'analyse

- Les réponses au questionnaire confirment que l'enseignement secondaire contribue plus ou moins à bannir le niveau local, et contribue à dissocier le niveau ponctuel et le niveau global.
- Par exemple, les résultats confirment les habiletés des étudiants dans les manipulations algébriques et les difficultés pour les étudiants du groupe P à approcher les suites et les fonctions sous le point de vue global.
- En outre, il apparaît que seuls quelques étudiants sont capables de passer d'un niveau à l'autre, et même que la majorité des étudiants sont incapables de construire un raisonnement à l'un de ces deux niveaux, dès lors que les règles algébriques ne peuvent plus être appliquées.
- Enfin, on note que les résultats au baccalauréat sont meilleurs pour les étudiants du groupe G, que pour ceux du groupe P, eux-mêmes meilleurs que ceux du groupe U

Donner la négation mathématique de chacune des phrases suivantes

1 - Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.

2 - Certains nombres entiers sont pairs.

3 - **Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.**

Résultats sur 340 copies analysées

Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4

Pour cet item, 98 étudiants (29%) ne donnent pas de réponse ; seuls 34 étudiants (10%) donnent une réponse correcte, synonyme de “Il existe au moins un entier divisible par 4 ne se terminant pas 4”. 155 réponses (45,5%) sont données sous la forme d’une implication avec des positions variées pour la négation comme dans les exemples suivants.

Si un nombre entier est divisible par 4, **alors** il ***ne*** se termine ***pas*** par 4

Si un nombre entier ***n'***est ***pas*** divisible par 4, **alors** il ***ne*** se termine ***pas*** par 4

Si un nombre entier est divisible par 4, alors il ***ne*** se termine ***pas forcément*** par 4

Si un nombre entier est divisible par 4, ***il est possible*** qu’il *ne* se termine ***pas*** par 4

Des difficultés prévisibles pour la suite

Un exercice classique en L1

On rappelle la définition d'une suite convergente :

Une suite numérique *u* converge vers le réel *l* *ssi*

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que

$$n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Compléter la phrase suivante

Une suite numérique *u* est divergente *ssi* …..

Etablir cette négation nécessite d'être capable :

- d'identifier la quantification existentielle sur la limite dans la définition de la convergence d'une suite
- d'identifier la quantification universelle implicite sur n devant l'implication
- de mettre en œuvre la règle sur la négation des phrases quantifiées lorsque les quantificateurs sont en tête de formule, avec ici une alternance de quatre quantificateurs : *existentiel, universel, existentiel, universel.*
- de donner la négation d'une implication

Les résultats de notre questionnaire montrent que de nombreux étudiants arrivant à l'université ne sont pas préparés pour ça.

La notion de « limite de fonction » en 1ère S et Terminale S

Denise Grenier - Institut Fourier – Université 1 de Grenoble
Nicolas Grenier-Boley - Université de Rouen

programme 2001 (actuel)
petite étude de quelques manuel
évolution (1971- 1982 -1988 – 2001)

Programme 2001 - 1ère S

Les limites apparaissent dans trois thèmes présentés dans cet ordre :
Dérivation, Comportement asymptotique de fonctions, Limite de suites

Limite et *lim* : **langage** et **notation** pour définir le nombre dérivé
« Nombre dérivé d'une fonction en un point : définition comme limite de (f(a+h)-f(a))/h quand h tend vers 0 »
Remarque : ni la notion de limite, ni les notations associées n'ont été abordées avant

Un contexte privilégié est donné : **vitesse instantanée**, cinématique
L'**approche locale** est suggérée par des «zooms successifs sur une représentation graphique obtenue à l'écran de la calculatrice »

Les limites de fonctions sont effectivement étudiées dans le chapitre traitant des asymptotes
Aucune définition n'est prévue, il s'agit de donner une **« idée intuitive »**

La **limite en un point a réel** où f est définie n'est pas évoquée

Manuels - 2001 1ère S (Déclic, Hyperbole, Indice X, Terracher)

Les manuels reprennent tous l'ordre induit par le texte du programme
« limite » ou « lim » : pour la première fois comme ***outil langagier*** dans la définition du nombre dérivé

Différents types d'écriture du comportement des variables :

« proche de », « assez proche de »	***statique***
« aussi proche que l'on veut », « aussi grand que l'on veut »	***dynamique***
« de plus en plus proche », « tend vers »	***monotonie***

Deux exemples

Hyp-1S ch.5 dérivation, p.98 « Lorsqu'on donne à h des valeurs *proches de* 0, 6+h prend des valeurs *proches de* 6. On dit que la limite en 0 de 6+h est 6 et on écrit $\lim_{h->0}$ (6+h)=6 »

Expression de f'(a) avec le symbole « lim », suivi de « lim se lit limite si h tend vers 0 ». Et dans la marge : « vocabulaire. si h prend des valeurs *de plus en plus proches de* 0, on dit que l'on cherche la limite de r(h) quand h *tend vers* 0 ». *IndX-1S ch.3 Dérivée d'une fonction, cours, p.50*

Définitions

Aucune définition explicitement nonmmée ainsi n'est donnée dans ce chapitre, même « intuitive »

Une « notion intuitive » est illustrée sur des exemples

Cas particulier (?) *Ter-1S chapitre « dérivation » ch.3, deux pages*

Une « notion intuitive de limite » <u>avant</u> de parler de dérivée
« f est **aussi proche** du réel l **que l'on veut** dès que x est **assez proche** de a» *p.72-73*
Suivi de
limite en a d'une fonction,
cas d'une fonction usuelle définie en a,
fonction non définie en a

Représentations, images

Toutes liées à la dérivation (c'est conforme au programme)

traitée essentiellement sous les points de vue :
ponctuel nombre dérivé
algébrique simplification d'une expression de l'accroissement
technique « faire h=0 »

et **géométrique**
coefficient directeur d'une droite
pente de la tangente à une courbe (déjà tracée)

Hormis le vocabulaire introductif, **l'approche locale est peu présente**, non illustrée et non travaillée
absence de calculs d'approximation ou réduits à un exercice
(très) rares schémas de voisinages (intervalles, bandes)
rares représentations de la tangente comme limite d'une famille de droites

Sauf dans *Ter-1S* : symboles commentés, explicités, formulations équivalentes

Comment trouver les limites d'une fonction ?

IndX-1S ch.3 Dérivée d'une fonction, p.51 dans la partie « cours »
« Technique. Pour trouver la limite r(h) si h tend vers 0, il suffit de remplacer h par 0 dans l'expression simplifiée de r(h) »

(p.52 à 55, cours) : **aucune** expression avec des limites n'est écrite

(p.57 à 66) « Exercices et problèmes », « travaux dirigés » et « un parcours autonome » , lim ou limite n'apparaissent jamais.

Ter-1S donne un « résultat pratique» : remplacer x par a lorsque f est définie en a,
Il est explicitement dit que c'est un résultat admis qui marche dans de nombreux cas.
Lorsque f n'est pas définie en a, un « principe de calcul » passant par une fonction g égale à f sauf en a. Il est dit que : « en pratique, la détermination de g peut résulter d'une simplification de f »

Chapitre « Comportement asymptotique des fonctions »

Toujours placé après la chapitre « dérivation » ou « nombre dérivé »

Limites abordées : limite finie en $+\infty$ et $-\infty$, limite infinie en $+\infty$ et $-\infty$,
(parfois) limite à gauche et à droite en un réel fini
Absente (en général) : limite finie en un réel fini

(Hyp-1S ch7, p.148 et suivantes) : définitions « provisoires » des asymptotes
pas de définition des limites associées

« conformément au programme on s'appuie ici sur l'intuition »
Les procédés utilisés sont déclarés justifiés par des théorèmes...tous admis
qui sont des listes de limites de fonctions usuelles et l'algèbre sur les limites

Indx-1S, ch.4, cours, p.72
Pas de définitions. Seuls deux exemples traités : fonction carré et fonction inverse, en $+\infty$ et $-\infty$, avec des expressions comme « suffisamment grand », « aussi grand qu'on veut », « très proche », « aussi proche que l'on veut »

En marge, une note d'histoire « A. L. Cauchy (1789, 1857) fut l'un des premiers à exposer rigoureusement la notion de limite » !! Etonnant, non ?

Dans deux manuels, on trouve une notion intuitive de limite finie de f(x) lorsque x tend vers a

Ter-1S utilisation d'intervalles, inégalités, quantificateurs

Réécritures avec des inégalités et des quantificateurs en langage naturel
« pour tout réel arbitrairement choisi (aussi grand que l'on veut), on a : $f(x) \geq M$ (f(x) dépasse M dès que $-1/\sqrt{M} \leq x \leq 1/\sqrt{M}$ et $x \neq 0$ »

Donne sans les nommer des **définitions des limites en l'infini et en 0**, **définitions explicites** en ∞ par le recours à la limite en 0 de f(1/x)

Decl-1S
notations f'(a), (df/dx) (a), dy/dx

Différents registres d'interprétations du nombre dérivé
« interprétation graphique » du coefficient directeur de la tangente (position limite de sécantes), associée au vecteur directeur u (1, f'(a))

« interprétation numérique » asssociée au théorème (prouvé) :

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varepsilon(h)$$

«interprétation géométrique », associée à $h\varepsilon(h)$ et à une distance

Programme 2001 Terminale S

La définition proposée pour la limite (finie ou infinie) d'une fonction en l'infini est une “extension” de celle de limite d'une suite
(donnée en 1ère S)

Le programme ne parle pas de “définition” pour la limite en un réel a, mais de “notion”

Manuels

Hyp-TS ch.1 limites de suites et fonctions
• pour limites infinies : notations, vocabulaire, définitions calquées sur celles des suites, « tous les termes de la suite à partir d'un certain rang » est remplacé par « toutes les valeurs f(x) pour x assez grand »
• pas de définition de la limite finie en un réel

Ter-TS ch.2 Fonctions : limites, continuité, dérivabilité
Des nouveautés : la définition de la limite en $+\infty$ est donnée par la limite de f(1/x) à droite en 0 et limite en a réel est donnée *(p.45)*. Les limite à gauche et limite à droite sont assumées, elles sont traitées sur plusieurs exemples, dont la fonction f=E (partie entière)

IndX-TS
annonce tout de suite dans la marge (p.12) : « Attention. En Terminale, ces définitions seront peu utilisées dans les exercices : on se servira des règles opératoires de la page 16 ». Insiste (p.14) : « Attention. Les énoncés de cette page sont basés sur l'intuition. L'étude des limites utilisera des règles opératoires (page 16)». Plus loin, il est dit que « les propriétés de ces deux pages [en fait, les règles opératoires] seront utilisées de manière systématique et «Technique. Les résultats peuvent être retrouvés facilement grâce à l'intuition. » !!!!

Decl-TS
surprise : le *ch.2 « Limites de suites et de fonctions »* arrive après le *ch.1 « Fonctions-Variations et continuité ».* En fait, dans le cours *ch.1 p.10*, dans « rappels sur la dérivation », on trouve une illustration de « limite en a » dans les termes vus en 1ère S, puis *p.13*, la « notion de continuité » avec limites à droite et à gauche, exemplifiées avec la fonction partie entière

Synthèse sur les manuels de TS étudiés

Les définitions en TS de la limite d'une fonction en ∞, calquées sur celle des suites, restent informelles, floues et peu opératoires, n'apportent rien par rapport à ce qui est donné en 1ère S, sauf que cela s'appelle « définition »

La définition de la "limite en un réel a" est traitée très différemment selon les manuels : absente, inutilisable, pouvant parfois induire des erreurs, ou au mieux en respectant le programme

L'interprétation par les auteurs de manuels de l' « approche intuitive» : en langage naturel, pas du tout mathématisé, floue, naturalisée ?

Peu d'exemples traités
Point de vue local (quasi) absent
Pas de travail sur les approximations numériques, pas de graphes de voisinages, etc..
Schémas peu éclairants : un « rond » au point où f n'est pas définie, des petits points dans le voisinage du point étudié ...

Ter-TS et *Decl-TS* assument mieux les propriétés mathématiques de la notion mathématique

Quelles connaissances peuvent être ainsi construites au lycée sur la notion de limite d'une fonction ?

Une ***conception ponctuelle ou globale, et technique***, la justification des techniques étant renvoyée à l'intuition.

Point de vue "local" absent. Le seul moment où le point de vue est « local » est présent est l'introduction ou la définition et ce point de vue est délaissé clairement ensuite, au profit de techniques algébriques opératoires, à partir de fonctions de référence et de nombres dérivés donnés (lim sinx/x=1 en 0). Les infiniment petits et infiniment grands sont à peine évoqués par des expressions telles que « aussi près que » ou « aussi grand que », ne sont pas travaillés, sauf quelques exercices "alibis".

Des techniques sans théorie. Nombreux « théorèmes » qui consistent uniquement en une liste de limites prêtes à l'emploi ou une algèbre (assez complète) sur les limites. Comme ces « théorèmes » ne sont pas démontrés et qu'on renvoie l'élève à l'intuition pour les comprendre (et même les justifier !), la boucle est bouclée.
(exemple §5 Math'x-1S « Théorèmes d'opérations », dont « le but est de pourvoir déterminer sans revenir aux définitions les limites de [...] »)

Evolutions au gré des diverses réformes (1) (Nicolas Grenier-Boley)

Nous comparons sur quelques points les manuels de Première S de 2001 avec certains manuels issus des diverses réformes : la réforme des mathématiques modernes (1971), la contre-réforme (1982), son ajustement (1988) et la réforme de 1990.

•Dans le manuel de 1971, le langage des limites est celui de la *logique formelle*. En 1988, il est prôné un langage plus intuitif soit "un langage parlé moins rigoureux et savant mais peut-être plus simple qu'une belle définition". Avec les réformes de 1988 puis de 1990, on en arrive au langage pratique des limites avant d'en venir à une naturalisation de la notion (2001).

•Les types de limites à étudier ont profondément changé au cours des réformes : toutes les limites (1971), étude formelle limitée aux limites en 0 (1982), toutes les limites vues de façon à être opératoires (1990). Comme dit plus haut, le programme de 2001 étudie quelques limites et tente d'en donner une approche intuitive par le biais de "l'algèbre des limites".

Evolutions au gré des diverses réformes (2)

•L'ordre d'exposition varie aussi. Malgré quelques différences, les manuels des réformes de 1971 à 1990 respectaient l'ordre d'introduction limite puis continuité en un point puis nombre dérivé. Au contraire, le programme de 2001 fait des concessions à cette logique d'exposition en présentant le nombre dérivé puis les limites puis la continuité (en classe de Terminale). Est-ce alors étonnant de trouver tant de raisonnements « continu implique dérivable » chez nos étudiants ?

•Le champ de l'approximation apparaît notamment dans les programmes de 1982 pour justifier numériquement (ou intuitivement) et illustrer les définitions formelles. En 2001, ce champ est quasiment deserté.

•Notons enfin qu'il y aura une nouvelle réforme des programmes de Première S l'an prochain : la manière d'introduire la notion de limite et sa place dans une progression pourrait alors évoluer notamment en lien avec l'introduction de la notion de fonction dans les nouveaux programmes de troisième puis de seconde.

Les indispensables (à notre avis) qui manque en 2001 (non exhaustif)

• Un enseignement de la notion de limite *pour elle-même*

• Un travail *préliminaire* sur les approximations numériques, calculs d'erreurs associés, inégalités,

pour une conception locale de la notion

pour donner un sens aux expressions langagières « tend vers », « aussi près que l'on veut », « aussi grand que l'on veut »

Pour préparer le passage à la formalisation (actuellement difficile en L1) (ordre des expressions relatives à la fonction et à la variable, implication « si alors »)

Par exemple : que **dois**-je choisir pour x **pour que** 1/x soit inférieur (en valeur absolue) à 10^{-n} ?

• Un travail graphique et géométrique sur les *voisinages* (bandes) et les *limites de famille de sécantes*

Sur différentes présentations des réels en L1

Jean-Yves Boyer

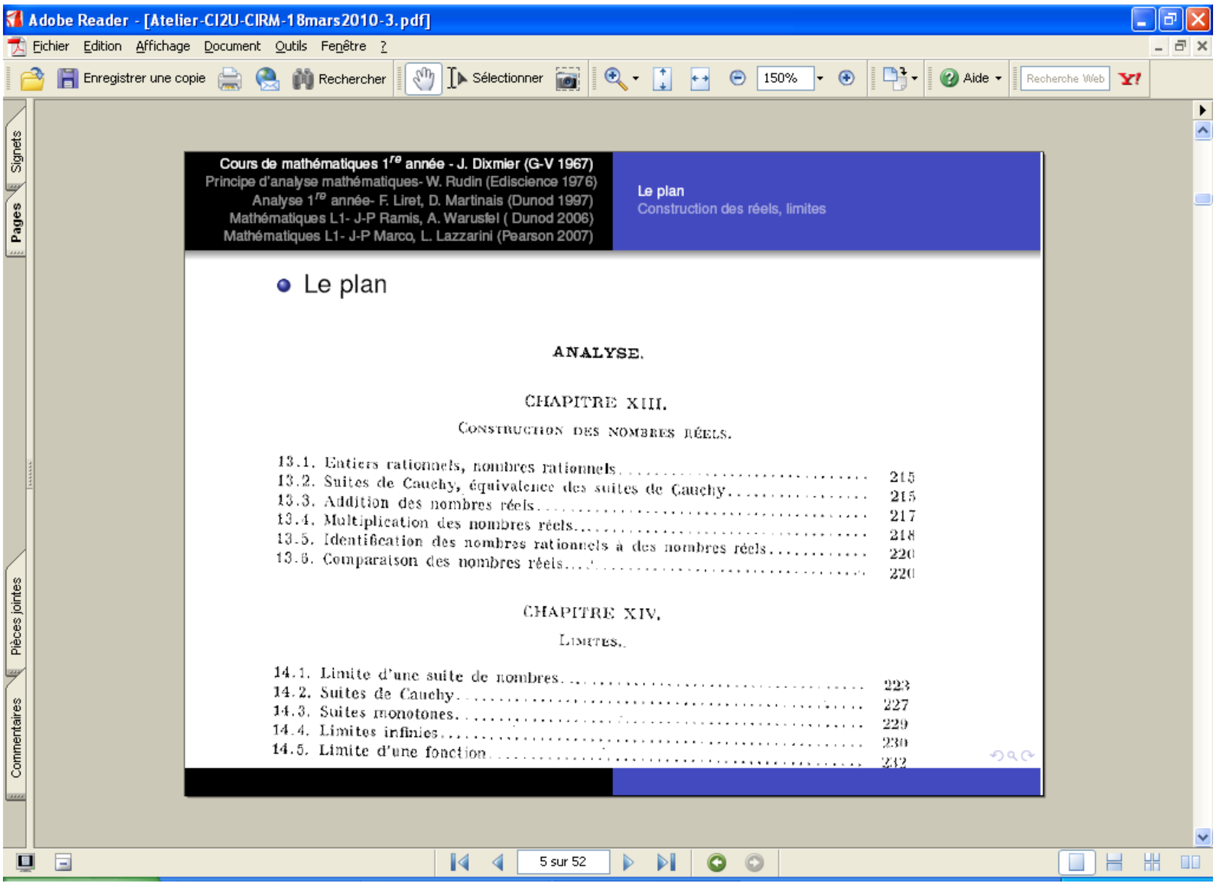
CI2U

Colloque ADIREM mars 2010 ,
Atelier : la notion de limite à la transition lycée-université

Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

Dans cette partie de l'atelier nous proposons de regarder comment les nombres réels sont présentés en 1^{re} année d'université. Cette présentation s'appuie sur 5 manuels pris entre 1960 et 2007 de première année d'université . Pour chaque manuel le plan et quelques parties de pages se reportant à l'introduction de $\mathbb{R}$ ont été scannés. En filigrane de cette présentation, quelle image ont actuellement les étudiants, donc les futurs enseignants, du corps des nombres réels ?

- La partie analyse commence par une construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy de rationnels.
- Elle permet, au chapitre suivant sur les limites, de montrer que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.



Cours de mathématiques 1^re^ année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1^re^ année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

Le plan
Construction des réels, limites

- Le plan

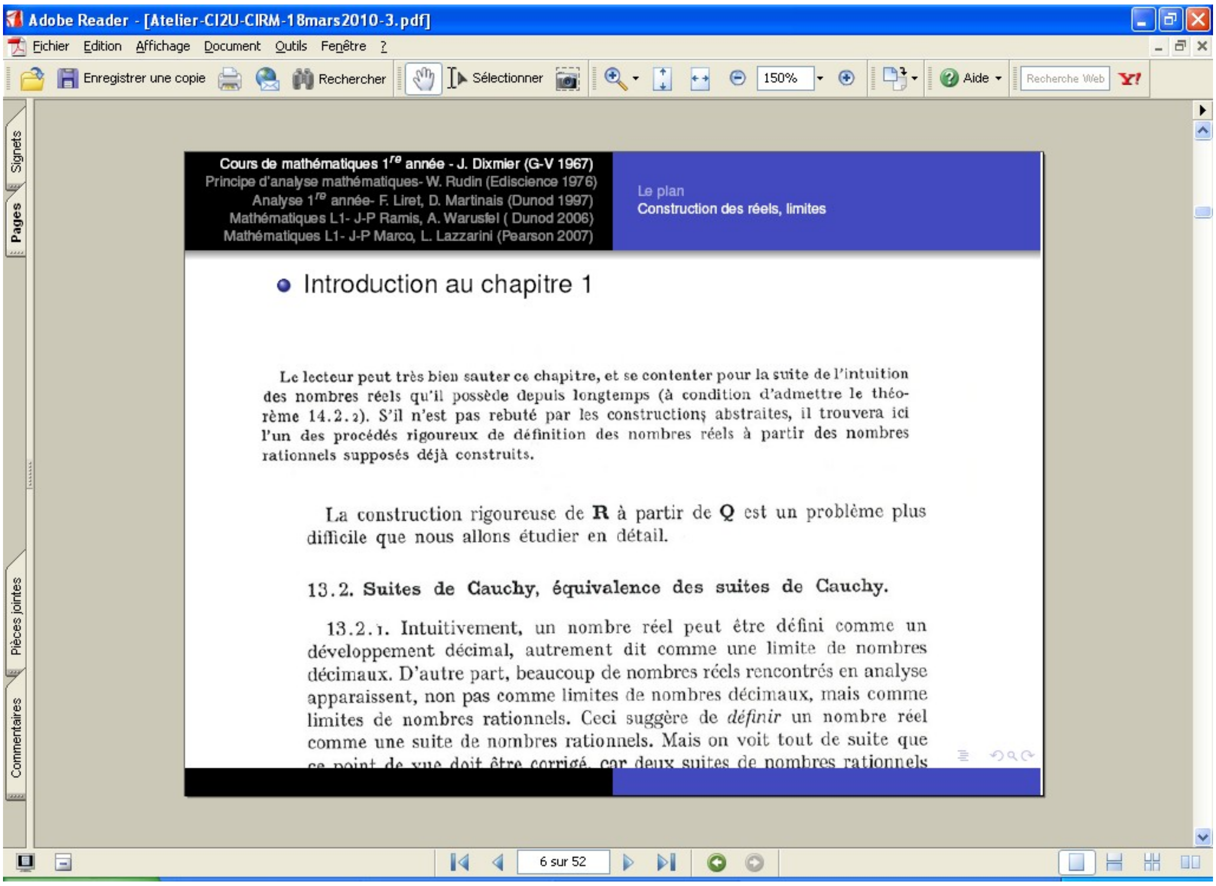
ANALYSE.

CHAPITRE XIII.

CONSTRUCTION DES NOMBRES RÉELS.

CHAPITRE XIV.

LIMITES.



Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

Le plan
Construction des réels, limites

- Introduction au chapitre 1

Le lecteur peut très bien sauter ce chapitre, et se contenter pour la suite de l'intuition des nombres réels qu'il possède depuis longtemps (à condition d'admettre le théorème 14.2.2). S'il n'est pas rebuté par les constructions abstraites, il trouvera ici l'un des procédés rigoureux de définition des nombres réels à partir des nombres rationnels supposés déjà construits.

La construction rigoureuse de $\mathbf{R}$ à partir de $\mathbf{Q}$ est un problème plus difficile que nous allons étudier en détail.

13.2. Suites de Cauchy, équivalence des suites de Cauchy.

13.2.1. Intuitivement, un nombre réel peut être défini comme un développement décimal, autrement dit comme une limite de nombres décimaux. D'autre part, beaucoup de nombres réels rencontrés en analyse apparaissent, non pas comme limites de nombres décimaux, mais comme limites de nombres rationnels. Ceci suggère de *définir* un nombre réel comme une suite de nombres rationnels. Mais on voit tout de suite que ce point de vue doit être corrigé, car deux suites de nombres rationnels

Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]

- $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure

14.2.2. THÉORÈME (Critère de Cauchy). — *Pour qu'une suite (u_n) de nombres complexes ait une limite finie, il faut et il suffit que ce soit une suite de Cauchy.*

(Nous avons précisé dans l'énoncé qu'il s'agissait de limite *finie*; nous étendrons en effet un peu plus loin la notion de limite en introduisant des limites infinies.)

14.2.3. COROLLAIRE. — *Tout ensemble majoré non vide de nombres réels admet une borne supérieure.*

- Suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$, addition multiplication, relation d'ordre

13.2.2. DÉFINITION. — *On appelle suite de Cauchy dans* **Q** *une suite* $(r_1, r_2, \ldots)$ *d'éléments de* **Q** *possédant la propriété suivante : pour tout élément* $\varepsilon > 0$ *de* **Q**, *il existe un entier* N *tel que*

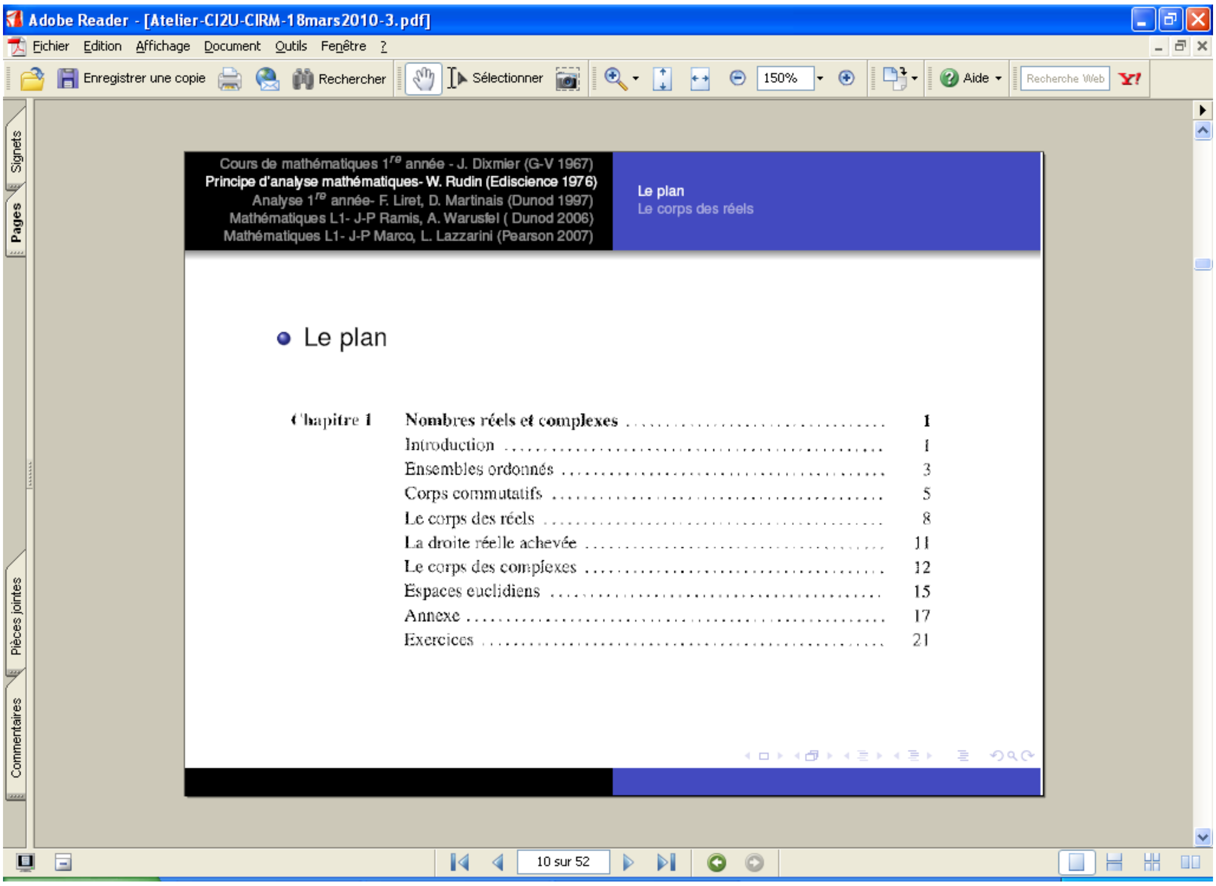
$$m, n \geqq N \Rightarrow |r_m - r_n| \leqq \varepsilon.$$

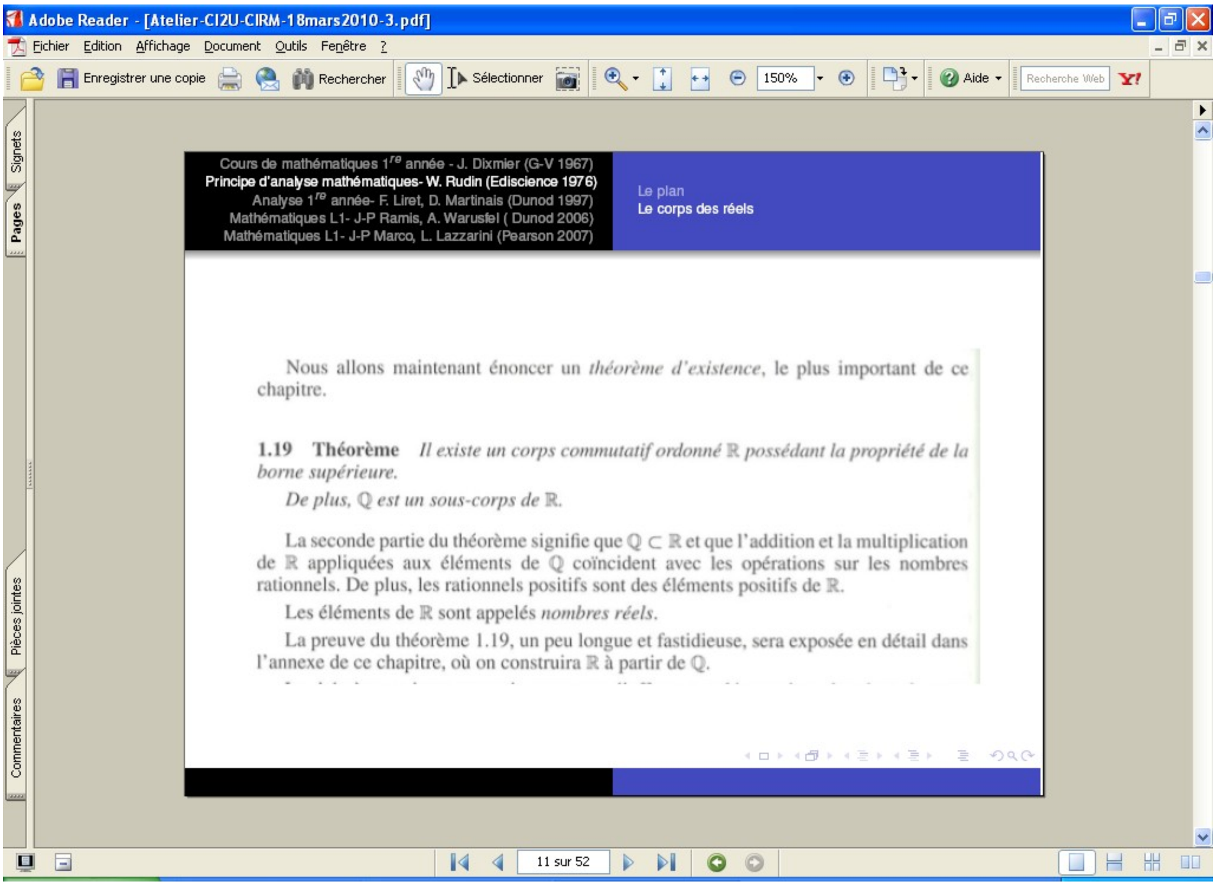
On notera E l'ensemble des suites de Cauchy dans **Q**.

13.2.3. DÉFINITION. — *Deux suites* $(r_1, r_2, \ldots)$, $(r'_1, r'_2, \ldots)$ *appartenant à* E *sont dites équivalentes si, pour tout élément* $\varepsilon > 0$ *de* **Q**, *il existe un entier* N *tel que*

$$n \geqq N \Rightarrow |r_n - r'_n| \leqq \varepsilon.$$

- Une construction de $\mathbb{R}$ par les coupures de $\mathbb{Q}$ est proposée en annexe du chapitre 1.
- Dans le chapitre 1, l'existence d'un corps commutatif contenant $\mathbb{Q}$ et possédant la propriété de la borne supérieure est admise. Comme application il est montré la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et l'existence de la racine n-ième d'un réel positif.


Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Fichier Edition Affichage Document Outils Fenêtre ?
Enregistrer une copie
Rechercher
Sélectionner
150%
Aide
Recherche Web
Signets
Pages
Pièces jointes
Commentaires
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Le corps des réels
Le plan
Chapitre 1
Nombres réels et complexes 1
Introduction 1
Ensembles ordonnés 3
Corps commutatifs 5
Le corps des réels 8
La droite réelle achevée 11
Le corps des complexes 12
Espaces euclidiens 15
Annexe 17
Exercices 21
10 sur 52



Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

Le plan
Le corps des réels

Nous allons maintenant énoncer un *théorème d'existence*, le plus important de ce chapitre.

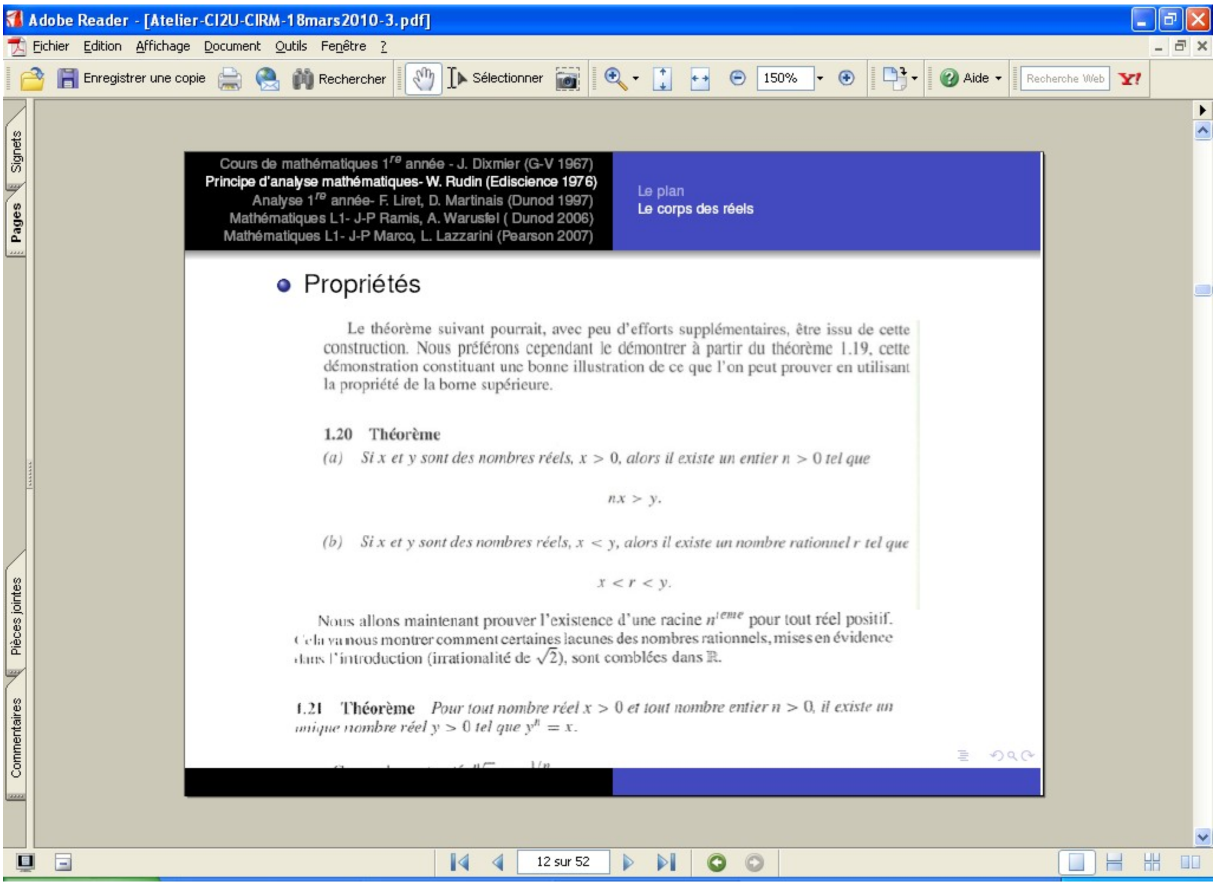
1.19 Théorème *Il existe un corps commutatif ordonné* $\mathbb{R}$ *possédant la propriété de la borne supérieure.*

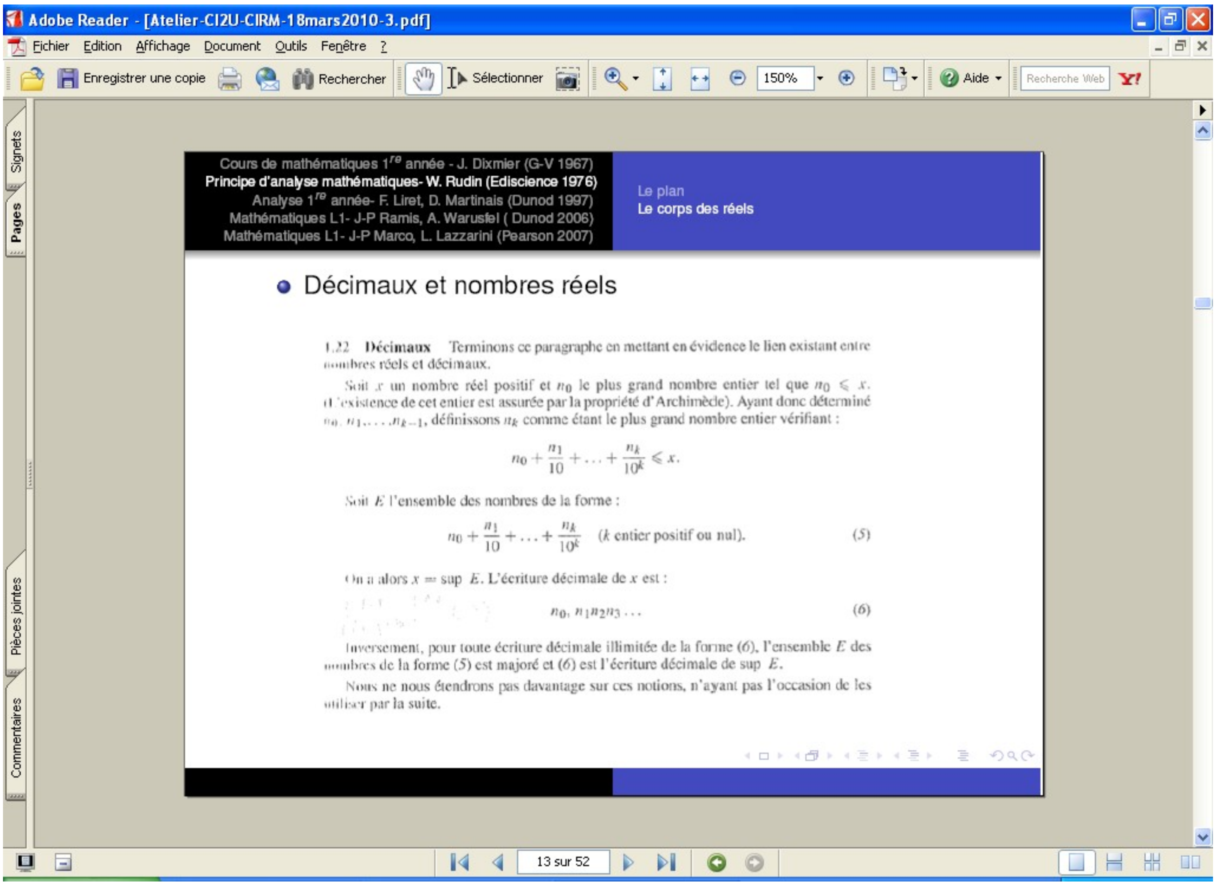
De plus, $\mathbb{Q}$ *est un sous-corps de* $\mathbb{R}$.

La seconde partie du théorème signifie que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et que l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ appliquées aux éléments de $\mathbb{Q}$ coïncident avec les opérations sur les nombres rationnels. De plus, les rationnels positifs sont des éléments positifs de $\mathbb{R}$.

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés *nombres réels*.

La preuve du théorème 1.19, un peu longue et fastidieuse, sera exposée en détail dans l'annexe de ce chapitre, où on construira $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$.


Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Le corps des réels
Propriétés
Le théorème suivant pourrait, avec peu d'efforts supplémentaires, être issu de cette construction. Nous préférons cependant le démontrer à partir du théorème 1.19, cette démonstration constituant une bonne illustration de ce que l'on peut prouver en utilisant la propriété de la borne supérieure.
1.20 Théorème
(a) Si x et y sont des nombres réels, $x > 0$, alors il existe un entier $n > 0$ tel que
$nx > y.$
(b) Si x et y sont des nombres réels, $x < y$, alors il existe un nombre rationnel r tel que
$x < r < y.$
Nous allons maintenant prouver l'existence d'une racine $n^{ième}$ pour tout réel positif. Cela va nous montrer comment certaines lacunes des nombres rationnels, mises en évidence dans l'introduction (irrationalité de $\sqrt{2}$), sont comblées dans $\mathbb{R}$.
1.21 Théorème Pour tout nombre réel $x > 0$ et tout nombre entier $n > 0$, il existe un unique nombre réel $y > 0$ tel que $y^n = x$.
12 sur 52


Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Le corps des réels
Décimaux et nombres réels
1.22 Décimaux Terminons ce paragraphe en mettant en évidence le lien existant entre nombres réels et décimaux.
Soit x un nombre réel positif et n_0 le plus grand nombre entier tel que $n_0 \leqslant x$. (L'existence de cet entier est assurée par la propriété d'Archimède). Ayant donc déterminé $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$, définissons n_k comme étant le plus grand nombre entier vérifiant :
$n_0 + \frac{n_1}{10} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} \leqslant x.$
Soit E l'ensemble des nombres de la forme :
$n_0 + \frac{n_1}{10} + \ldots + \frac{n_k}{10^k}$ (k entier positif ou nul). (5)
On a alors $x = \sup E$. L'écriture décimale de x est :
$n_0, n_1 n_2 n_3 \ldots$ (6)
Inversement, pour toute écriture décimale illimitée de la forme (6), l'ensemble E des nombres de la forme (5) est majoré et (6) est l'écriture décimale de $\sup E$.
Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces notions, n'ayant pas l'occasion de les utiliser par la suite.
13 sur 52

Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]

Fichier Edition Affichage Document Outils Fenêtre ?

Enregistrer une copie Rechercher Sélectionner 150% Aide Recherche Web

- Construction des réels

ANNEXE

L'objet de cette annexe, est de construire effectivement $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Ainsi que nous l'avons déjà annoncé, ce travail est assez long et sera divisé en plusieurs étapes.

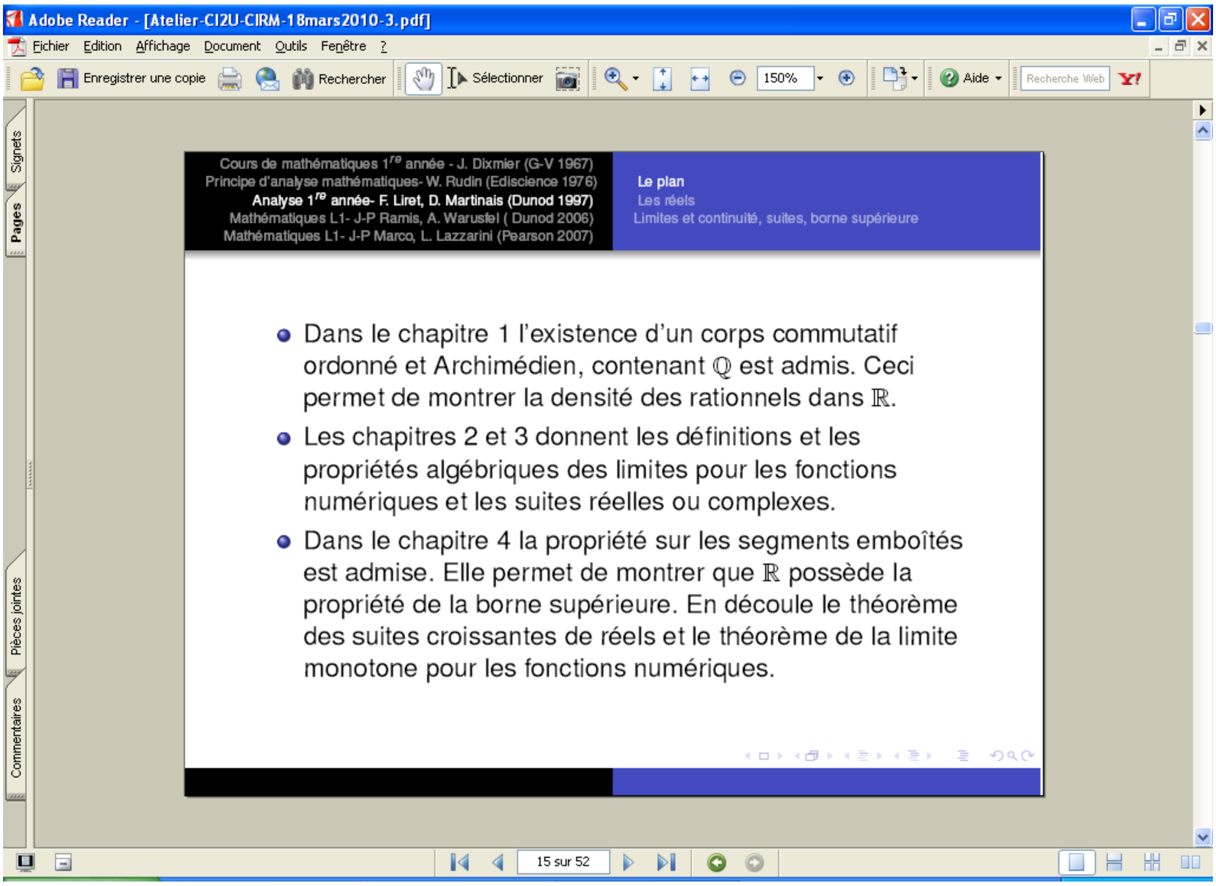
Étape 1 Les éléments de $\mathbb{R}$ vont être certains sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ appelés coupures. Une *coupure* est un sous-ensemble $\alpha \subset \mathbb{Q}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

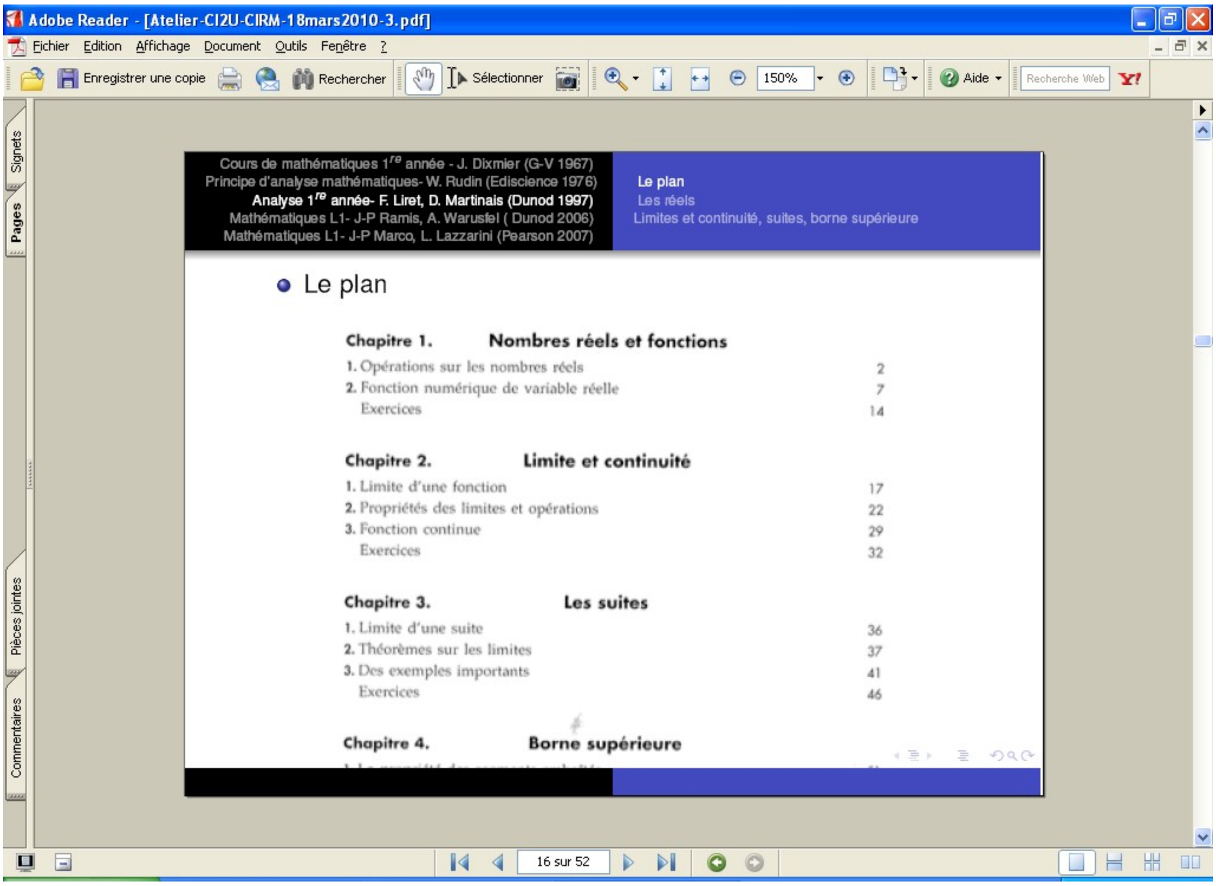
(*i*) α est une partie propre ($\alpha \neq \mathbb{Q}$) non vide de $\mathbb{Q}$.

(*ii*) Si $r \in \alpha$ et si $s < r$, ($s \in \mathbb{Q}$), alors : $s \in \alpha$.

(*iii*) Si $r \in \alpha$, alors il existe au moins un élément $s \in \alpha$ tel que $r < s$.

Signets Pages Pièces jointes Commentaires


Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Les réels
Limites et continuité, suites, borne supérieure
Dans le chapitre 1 l'existence d'un corps commutatif ordonné et Archimédien, contenant $\mathbb{Q}$ est admis. Ceci permet de montrer la densité des rationnels dans $\mathbb{R}$.
Les chapitres 2 et 3 donnent les définitions et les propriétés algébriques des limites pour les fonctions numériques et les suites réelles ou complexes.
Dans le chapitre 4 la propriété sur les segments emboîtés est admise. Elle permet de montrer que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure. En découle le théorème des suites croissantes de réels et le théorème de la limite monotone pour les fonctions numériques.
15 sur 52


Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Fichier Edition Affichage Document Outils Fenêtre ?
Enregistrer une copie
Rechercher
Sélectionner
150%
Aide
Recherche Web
Signets
Pages
Pièces jointes
Commentaires
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Les réels
Limites et continuité, suites, borne supérieure
Le plan
Chapitre 1. Nombres réels et fonctions
1. Opérations sur les nombres réels 2
2. Fonction numérique de variable réelle 7
Exercices 14
Chapitre 2. Limite et continuité
1. Limite d'une fonction 17
2. Propriétés des limites et opérations 22
3. Fonction continue 29
Exercices 32
Chapitre 3. Les suites
1. Limite d'une suite 36
2. Théorèmes sur les limites 37
3. Des exemples importants 41
Exercices 46
Chapitre 4. Borne supérieure
16 sur 52

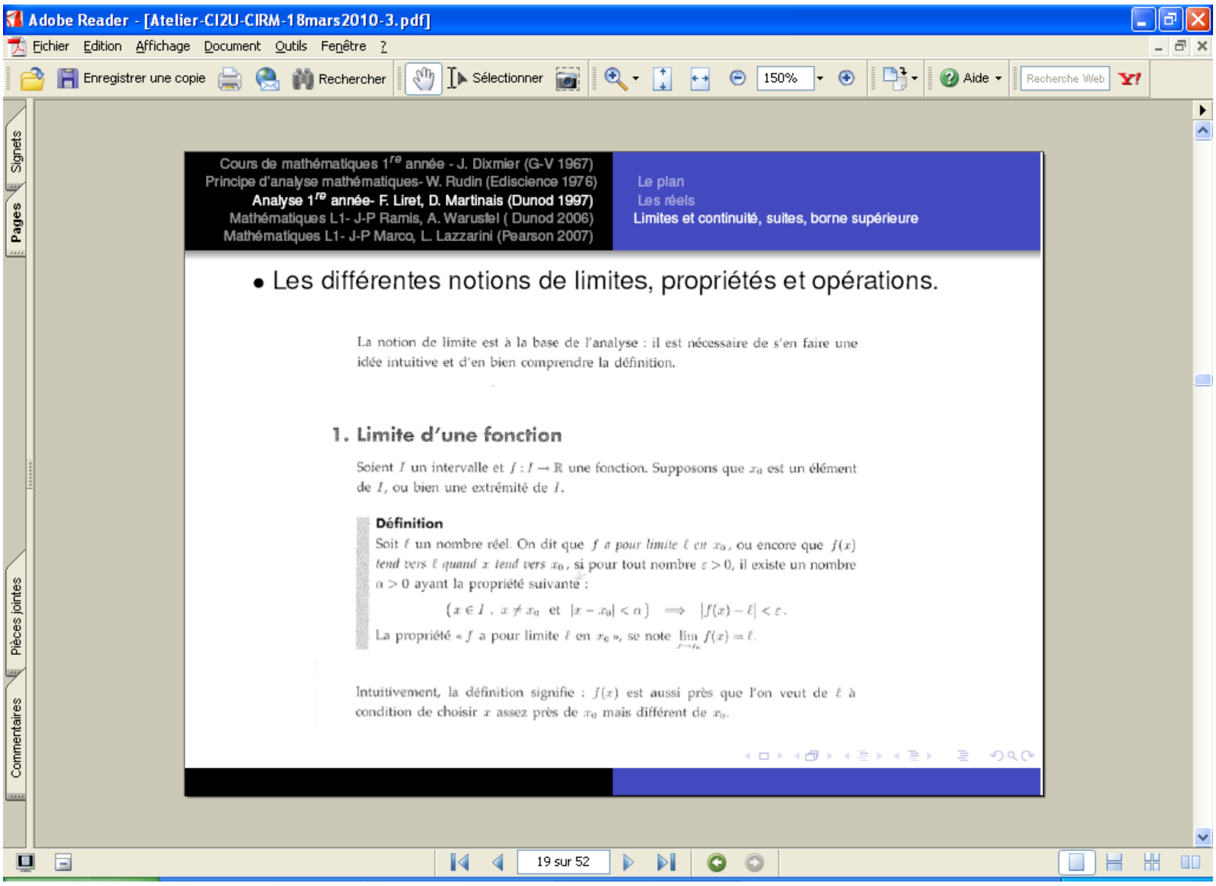
- Introduction au chapitre 1

► Les nombres définis par leur *développement décimal*, comme $31,22\ldots$, où les trois points indiquent que toutes les décimales valent 2. Un autre exemple est $-4,78612121\ldots$, où les trois points indiquent que la suite des décimales continue « comme indiquée », c'est-à-dire en écrivant les chiffres 1 et 2 alternativement. Bien sûr, on ne voit en général sur les premières décimales aucune loi permettant de deviner les suivantes. Bientôt, nous comprendrons pourquoi un développement décimal définit un nombre réel. Pour le moment, remarquons que le développement d'un nombre décimal se termine par des zéros : $3158 \times 10^{-2} = 31,5800\ldots$. Et réciproquement, si un développement décimal se termine par des zéros, alors le nombre est décimal.

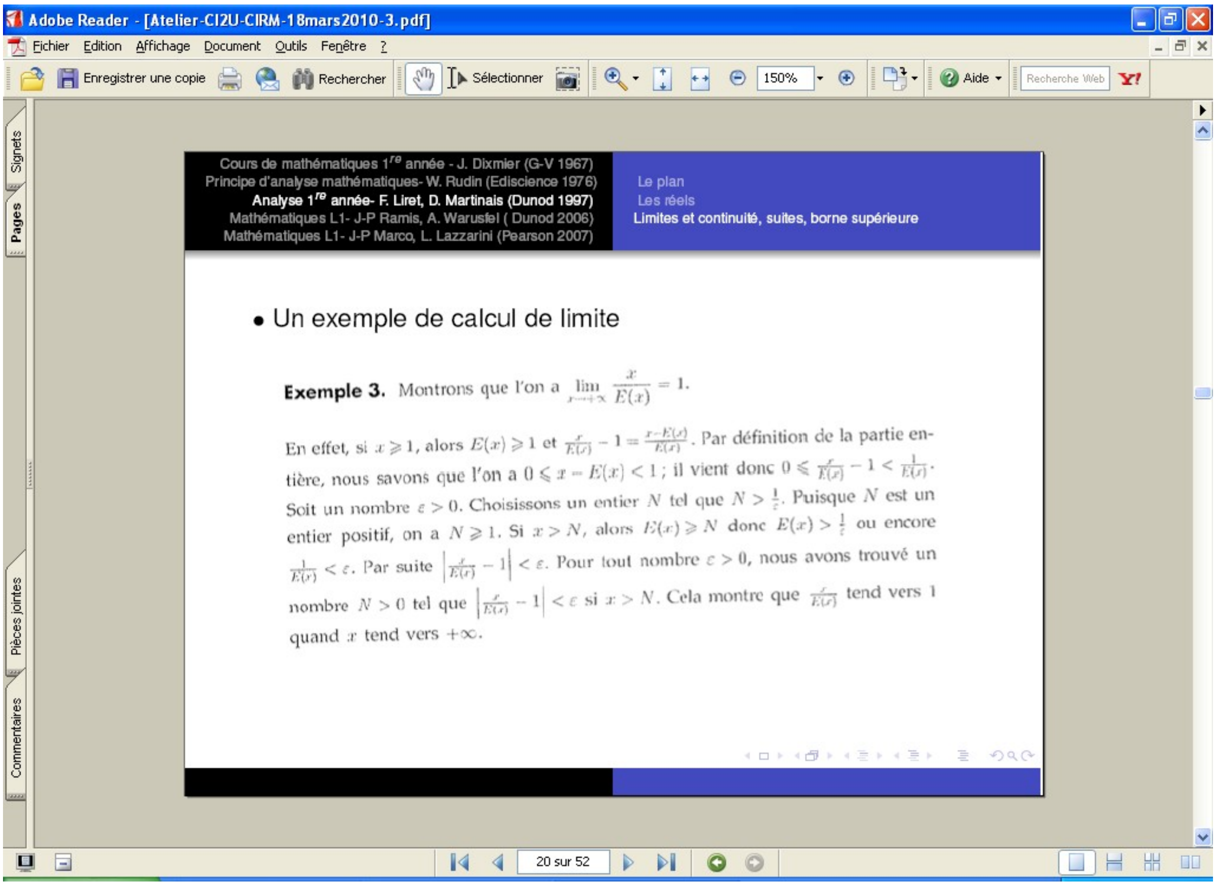
- les opérations, l'ordre, la propriété d'Archimède, les intervalles.
- Application : densité des rationnels

Proposition. *Dans tout intervalle ouvert non vide, il y a une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.*

Démonstration. Puisque tout intervalle ouvert contient un intervalle $]a,b[$ où a et b sont des nombres réels tels que $a < b$, il suffit de faire la démonstration pour un intervalle $]a,b[$. Soit A un nombre réel strictement positif. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $A/q < b - a$. D'après le lemme, il existe un entier p tel que $p(A/q) \in]a,b[$. En choisissant $A = 1$, on trouve que le nombre rationnel p/q appartient à $]a,b[$.
Choisissons maintenant $A = \sqrt{2}$, nombre que nous savons irrationnel (voir le chapitre 9 du tome d'algèbre). Si p est différent de 0, le nombre $B = p\sqrt{2}/q$ est irrationnel (sinon, B serait rationnel et $\sqrt{2} = qB/p$ aussi, ce qui n'est pas vrai) et l'on a $B \in]a,b[$.
Si $p = 0$, alors 0 appartient à l'intervalle $]a,b[$,donc b est strictement positif. La propriété d'Archimède affirme alors qu'il existe un entier $q' \geqslant 1$ tel que $\sqrt{2}/q' < b$. Le nombre positif $B = \sqrt{2}/q'$ est irrationnel et appartient à $]a,b[$. Nous venons de démontrer que tout intervalle ouvert $]a,b[$ contient au moins un nombre rationnel et



Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Fichier Edition Affichage Document Outils Fenêtre ?
Enregistrer une copie
Rechercher
Sélectionner
150%
Aide
Recherche Web
Signets
Pages
Pièces jointes
Commentaires
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Les réels
Limites et continuité, suites, borne supérieure
• Les différentes notions de limites, propriétés et opérations.
La notion de limite est à la base de l'analyse : il est nécessaire de s'en faire une idée intuitive et d'en bien comprendre la définition.
1. Limite d'une fonction
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que x_0 est un élément de I, ou bien une extrémité de I.
Définition
Soit ℓ un nombre réel. On dit que *f a pour limite ℓ en x_0*, ou encore que *$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0*, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ ayant la propriété suivante :
$(x \in I\ ,\ x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon\ .$
La propriété « f a pour limite ℓ en x_0 », se note $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
Intuitivement, la définition signifie : $f(x)$ est aussi près que l'on veut de ℓ à condition de choisir x assez près de x_0 mais différent de x_0.
19 sur 52



- Un exemple de calcul de limite

Exemple 3. Montrons que l'on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{E(x)} = 1$.

En effet, si $x \geqslant 1$, alors $E(x) \geqslant 1$ et $\frac{x}{E(x)} - 1 = \frac{x-E(x)}{E(x)}$. Par définition de la partie entière, nous savons que l'on a $0 \leqslant x - E(x) < 1$; il vient donc $0 \leqslant \frac{x}{E(x)} - 1 < \frac{1}{E(x)}$. Soit un nombre $\varepsilon > 0$. Choisissons un entier N tel que $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Puisque N est un entier positif, on a $N \geqslant 1$. Si $x > N$, alors $E(x) \geqslant N$ donc $E(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ ou encore $\frac{1}{E(x)} < \varepsilon$. Par suite $\left|\frac{x}{E(x)} - 1\right| < \varepsilon$. Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé un nombre $N > 0$ tel que $\left|\frac{x}{E(x)} - 1\right| < \varepsilon$ si $x > N$. Cela montre que $\frac{x}{E(x)}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Cours de mathématiques 1^{re} année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1^{re} année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

- Limites, théorèmes sur les limites,

1. Limite d'une suite

Définitions

Soit (u_n) une suite.

- Soit un nombre $\ell \in \mathbf{K}$. On dit que *la suite* (u_n) *a pour limite* ℓ, ou que u_n *tend vers* ℓ, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier N ayant la propriété suivante

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| < \varepsilon .$$

La propriété « u_n tend vers ℓ » se note $\lim u_n = \ell$.

- S'il existe un nombre $\ell \in \mathbf{K}$ tel que $\lim u_n = \ell$, on dit que la suite (u_n) est *convergente*, ou simplement que la suite (u_n) *converge*.

On a immédiatement les équivalences bien utiles :

$$\lim u_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim (u_n - \ell) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim |u_n - \ell| = 0 .$$

- Application : l' approximation décimale

L'approximation décimale d'un nombre réel

Soit a un nombre réel. Pour tout entier $n \geqslant 0$, posons $u_n = \frac{E(10^n a)}{10^n}$ où E est la fonction partie entière. Les nombres réels u_n sont des nombres décimaux.

Par définition de la partie entière, nous avons $E(10^n a) \leqslant 10^n a < E(10^n a) + 1$, donc il vient $u_n \leqslant a < u_n + 1/10^n$ ou encore

$$a - \frac{1}{10^n} < u_n \leqslant a .$$

Puisque la suite géométrique $(1/10^n)$ a pour limite 0, on en déduit $\lim u_n = a$. La suite (u_n) s'appelle *l'approximation décimale de a*. Cette suite a pour limite a et quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons l'encadrement

$$0 \leqslant a - u_n < 1/10^n .$$

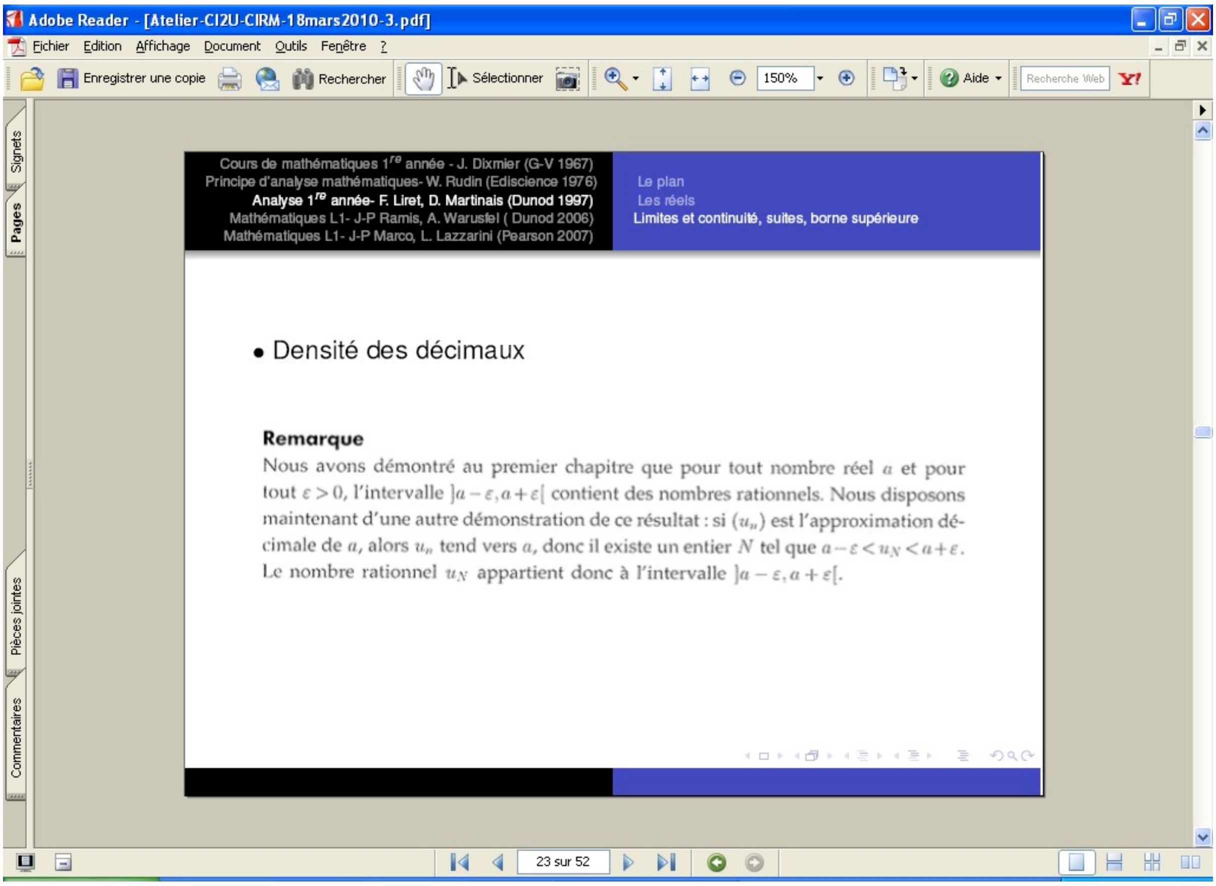
Montrons que la suite (u_n) est croissante. Remarquons d'abord que si x est un nombre réel, alors $10E(x)$ est un entier inférieur ou égal à $10x$, donc $10E(x) \leqslant E(10x)$ par définition même de la partie entière. Appliquons cela aux nombres $10^n a$; on obtient $10E(10^n a) \leqslant E(10^{n+1} a)$. Alors en divisant par 10^{n+1}, il vient

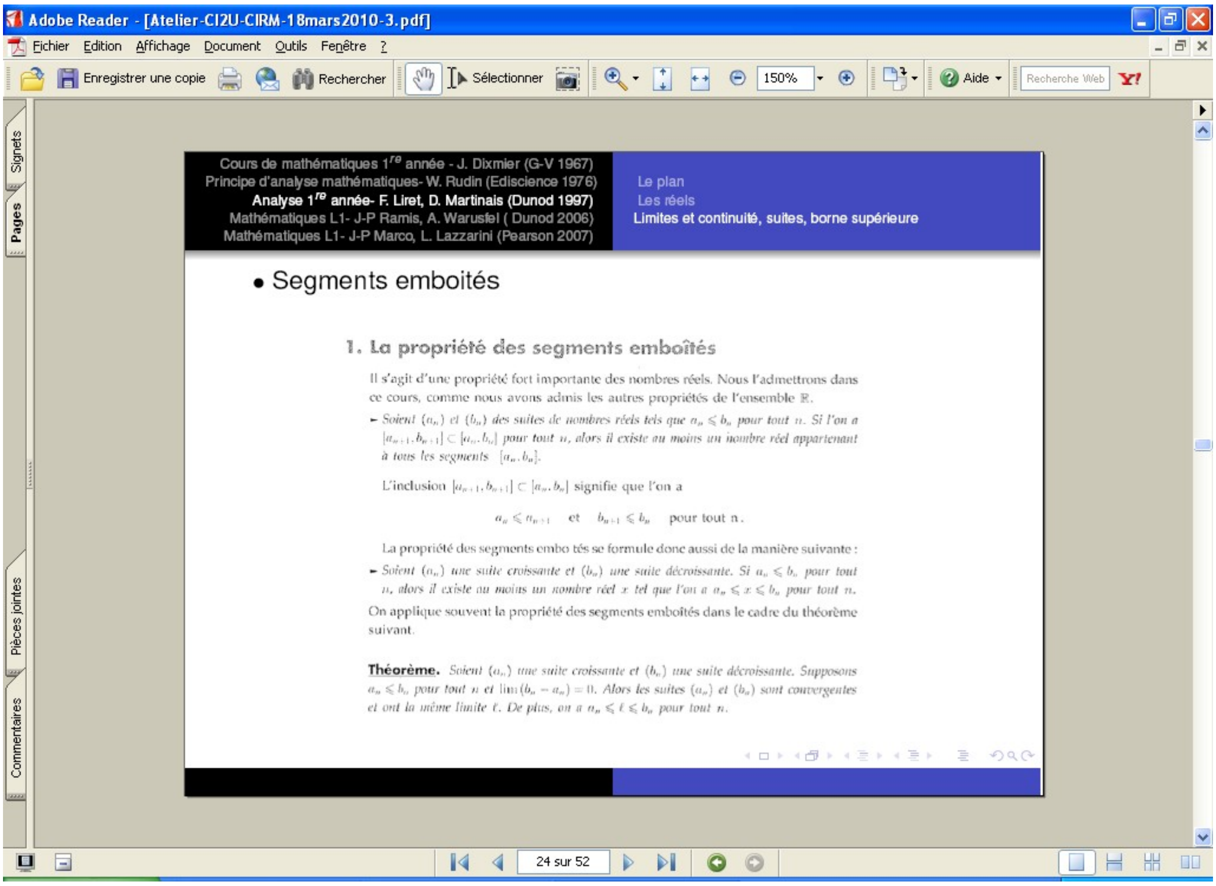
$$\frac{E(10^n a)}{10^n} \leqslant \frac{E(10^{n+1} a)}{10^{n+1}}$$

c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n.

Par exemple, si $2,50378\cdots$ est le début de l'écriture décimale de a, les premiers termes de l'approximation décimale sont

$$u_0 = E(a) = 2, \quad u_1 = \frac{E(10a)}{10} = \frac{25}{10}, \quad u_2 = \frac{250}{10^2} = u_1, \quad u_3 = \frac{2503}{10^3} .$$


Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Les réels
Limites et continuité, suites, borne supérieure
• Densité des décimaux
Remarque
Nous avons démontré au premier chapitre que pour tout nombre réel a et pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ contient des nombres rationnels. Nous disposons maintenant d'une autre démonstration de ce résultat : si (u_n) est l'approximation décimale de a, alors u_n tend vers a, donc il existe un entier N tel que $a-\varepsilon < u_N < a+\varepsilon$. Le nombre rationnel u_N appartient donc à l'intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.
23 sur 52



Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]

Cours de mathématiques 1^{re} année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1^{re} année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

Le plan
Les réels
Limites et continuité, suites, borne supérieure

- Segments emboités

1. La propriété des segments emboîtés

Il s'agit d'une propriété fort importante des nombres réels. Nous l'admettrons dans ce cours, comme nous avons admis les autres propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$.

► *Soient (a_n) et (b_n) des suites de nombres réels tels que $a_n \leqslant b_n$ pour tout n. Si l'on a $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ pour tout n, alors il existe au moins un nombre réel appartenant à tous les segments $[a_n, b_n]$.*

L'inclusion $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ signifie que l'on a

$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad \text{et} \quad b_{n+1} \leqslant b_n \quad \text{pour tout } n.$$

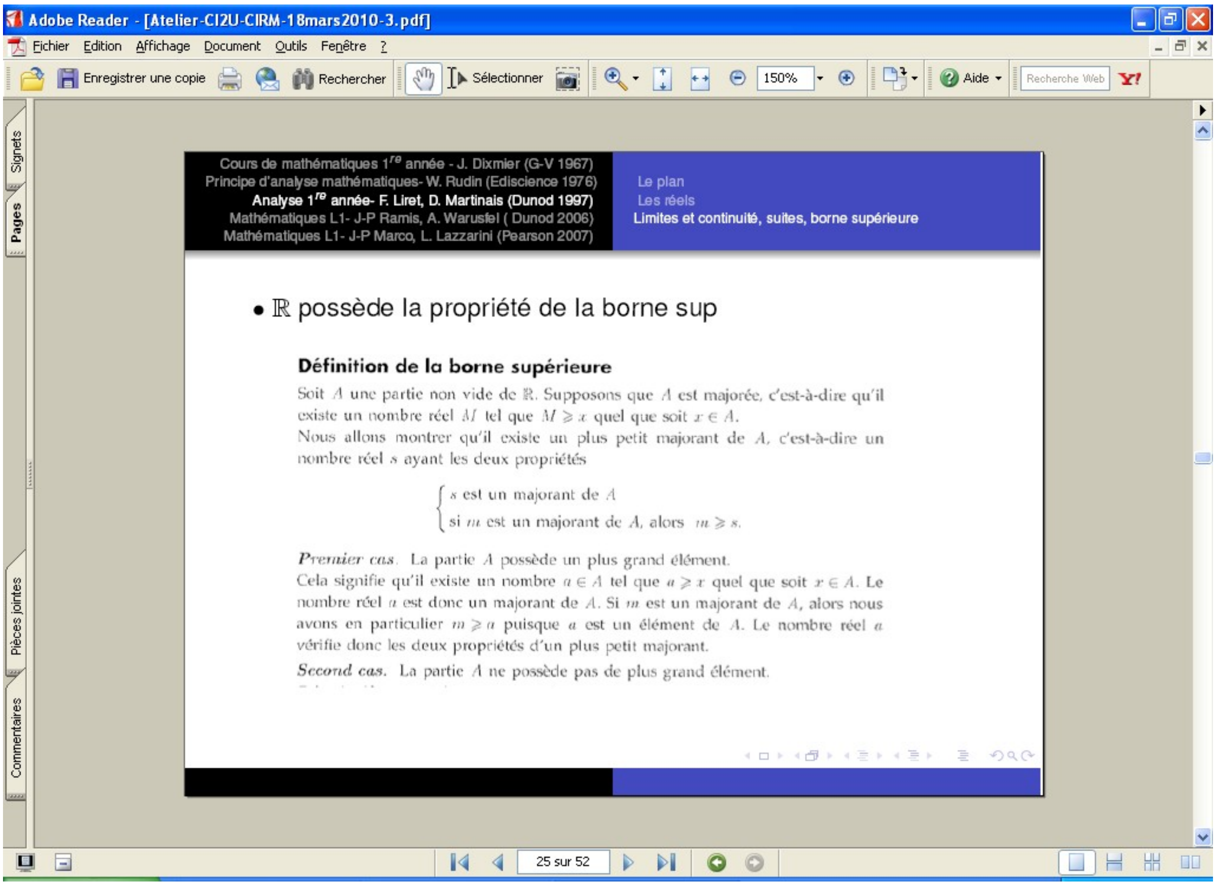
La propriété des segments embo tés se formule donc aussi de la manière suivante :

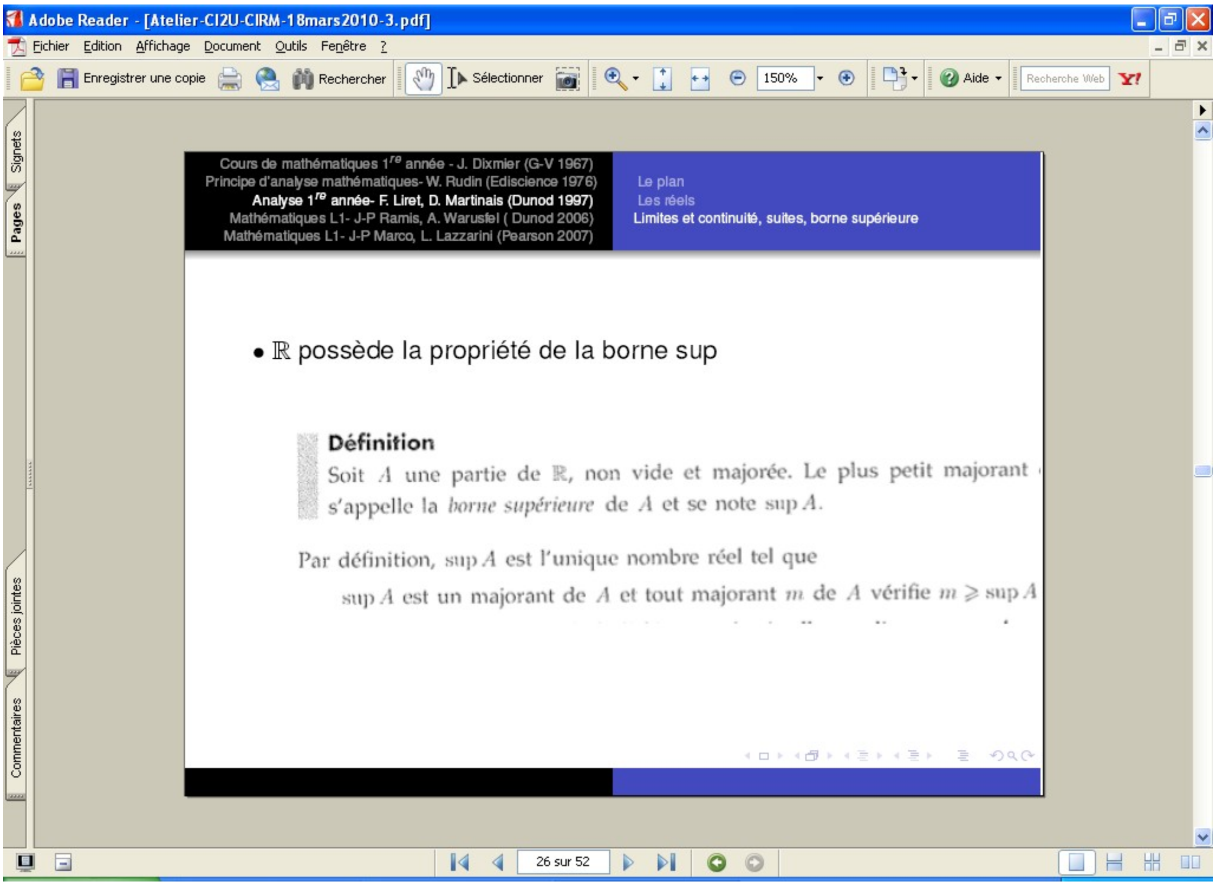
► *Soient (a_n) une suite croissante et (b_n) une suite décroissante. Si $a_n \leqslant b_n$ pour tout n, alors il existe au moins un nombre réel x tel que l'on a $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ pour tout n.*

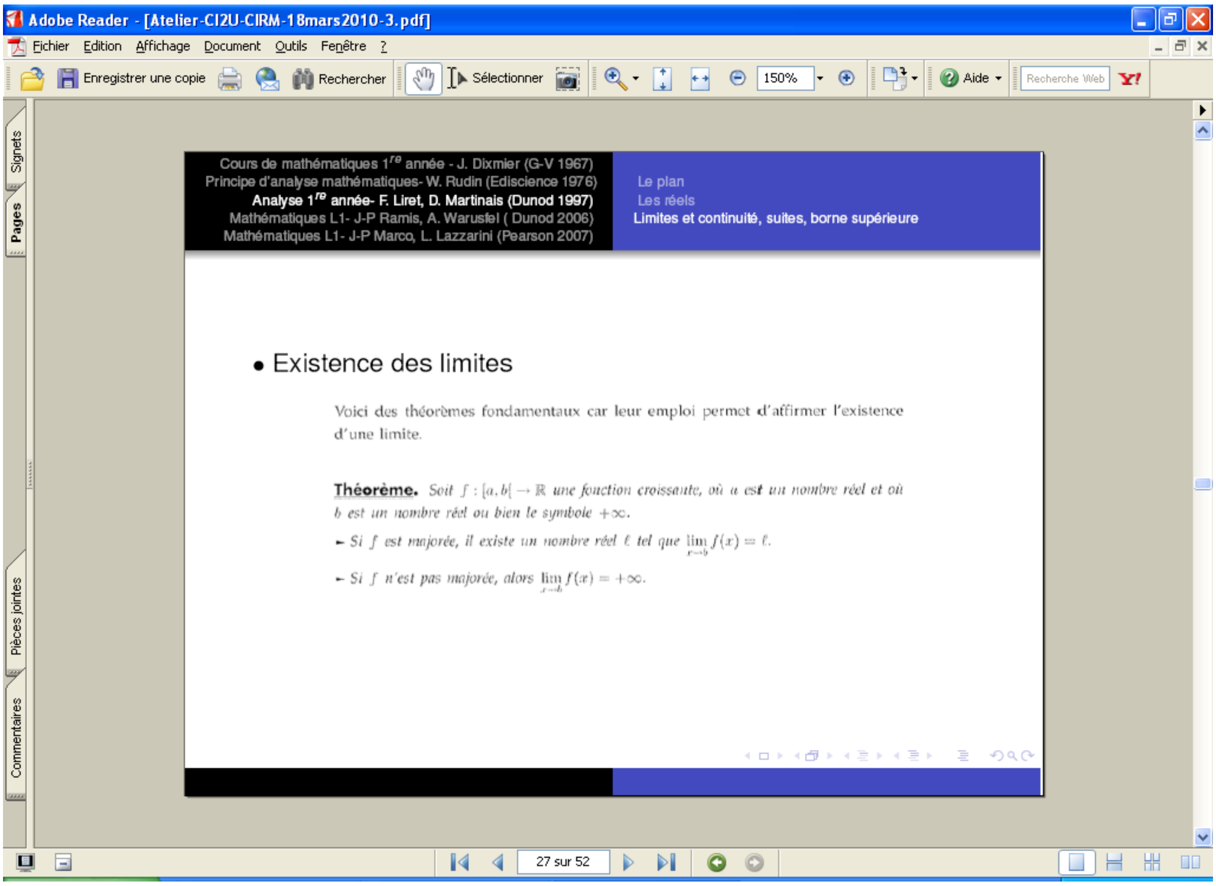
On applique souvent la propriété des segments emboîtés dans le cadre du théorème suivant.

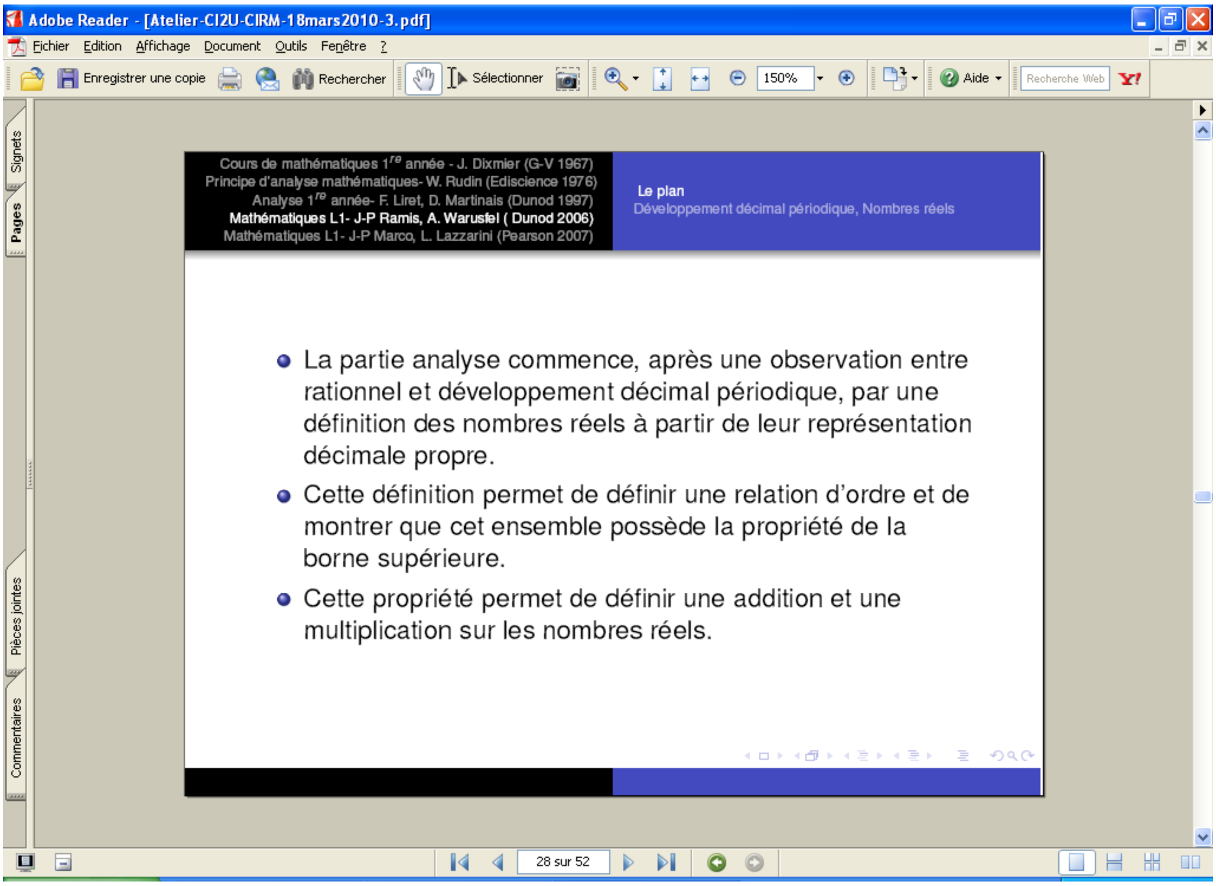
Théorème. *Soient (a_n) une suite croissante et (b_n) une suite décroissante. Supposons $a_n \leqslant b_n$ pour tout n et $\lim(b_n - a_n) = 0$. Alors les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont la même limite ℓ. De plus, on a $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ pour tout n.*

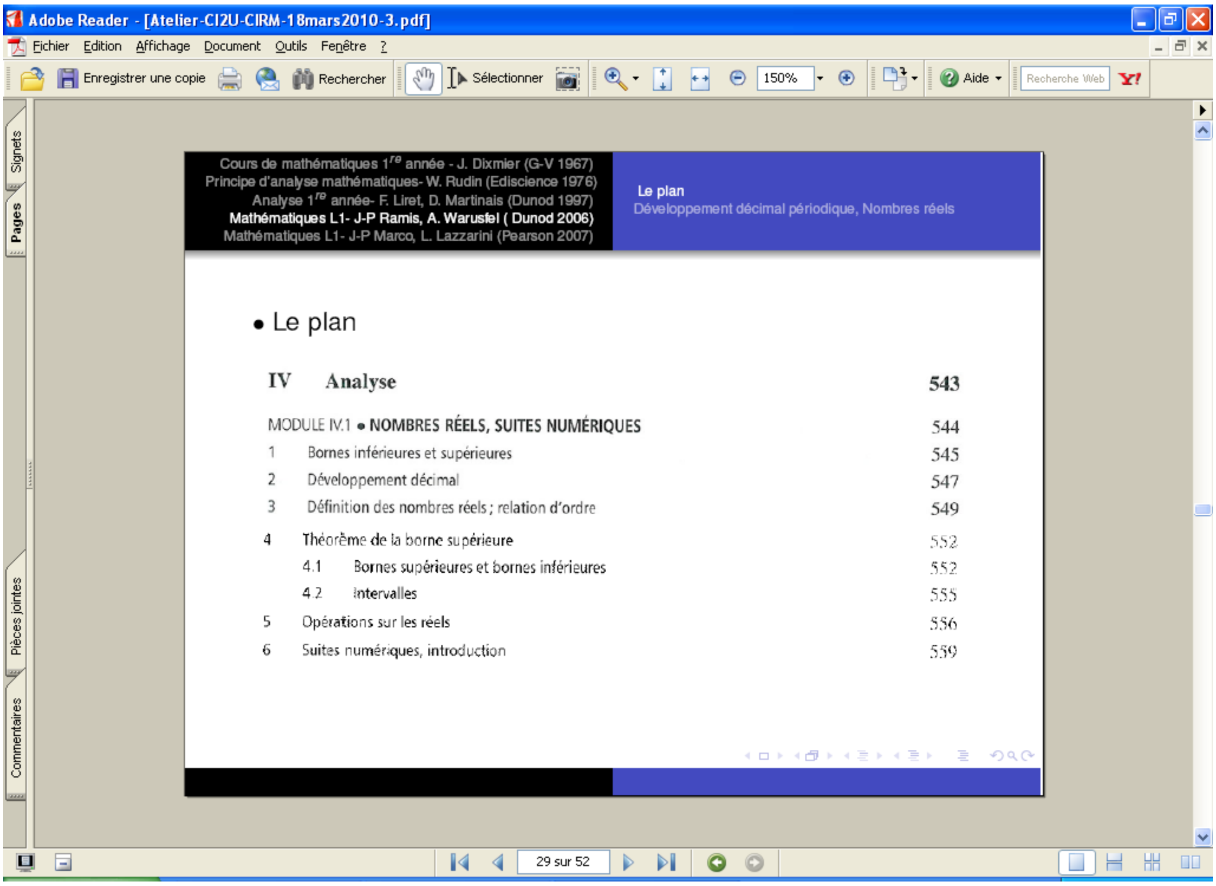
24 sur 52


Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Les réels
Limites et continuité, suites, borne supérieure
• $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne sup
Définition de la borne supérieure
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Supposons que A est majorée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel M tel que $M \geqslant x$ quel que soit $x \in A$.
Nous allons montrer qu'il existe un plus petit majorant de A, c'est-à-dire un nombre réel s ayant les deux propriétés
s est un majorant de A
si m est un majorant de A, alors $m \geqslant s$.
Premier cas. La partie A possède un plus grand élément.
Cela signifie qu'il existe un nombre $a \in A$ tel que $a \geqslant x$ quel que soit $x \in A$. Le nombre réel a est donc un majorant de A. Si m est un majorant de A, alors nous avons en particulier $m \geqslant a$ puisque a est un élément de A. Le nombre réel a vérifie donc les deux propriétés d'un plus petit majorant.
Second cas. La partie A ne possède pas de plus grand élément.
25 sur 52

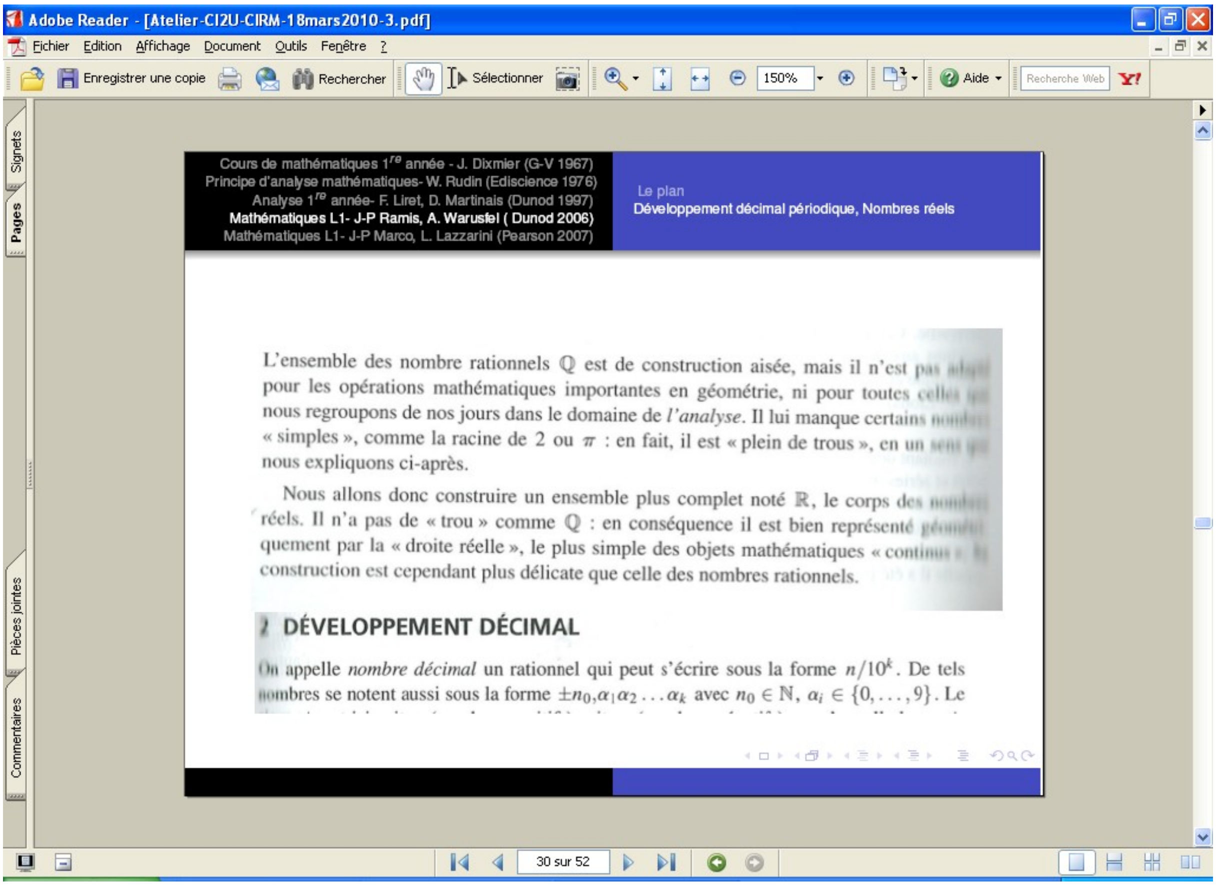

Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Les réels
Limites et continuité, suites, borne supérieure
• ℝ possède la propriété de la borne sup
Définition
Soit A une partie de ℝ, non vide et majorée. Le plus petit majorant
s'appelle la *borne supérieure* de A et se note $\sup A$.
Par définition, $\sup A$ est l'unique nombre réel tel que
$\sup A$ est un majorant de A et tout majorant m de A vérifie $m \geqslant \sup A$
26 sur 52


Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Les réels
Limites et continuité, suites, borne supérieure
• Existence des limites
Voici des théorèmes fondamentaux car leur emploi permet d'affirmer l'existence d'une limite.
Théorème. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante, où a est un nombre réel et où b est un nombre réel ou bien le symbole $+\infty$.
– Si f est majorée, il existe un nombre réel ℓ tel que $\lim_{x \to b} f(x) = \ell$.
– Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$.
27 sur 52


Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Développement décimal périodique, Nombres réels
La partie analyse commence, après une observation entre rationnel et développement décimal périodique, par une définition des nombres réels à partir de leur représentation décimale propre.
Cette définition permet de définir une relation d'ordre et de montrer que cet ensemble possède la propriété de la borne supérieure.
Cette propriété permet de définir une addition et une multiplication sur les nombres réels.
28 sur 52



- Le plan



L'ensemble des nombre rationnels $\mathbb{Q}$ est de construction aisée, mais il n'est pas adapté pour les opérations mathématiques importantes en géométrie, ni pour toutes celles qui nous regroupons de nos jours dans le domaine de *l'analyse*. Il lui manque certains nombres « simples », comme la racine de 2 ou π : en fait, il est « plein de trous », en un sens que nous expliquons ci-après.

Nous allons donc construire un ensemble plus complet noté $\mathbb{R}$, le corps des nombres réels. Il n'a pas de « trou » comme $\mathbb{Q}$: en conséquence il est bien représenté géométriquement par la « droite réelle », le plus simple des objets mathématiques « continus ». La construction est cependant plus délicate que celle des nombres rationnels.

2 DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL

On appelle *nombre décimal* un rationnel qui peut s'écrire sous la forme $n/10^k$. De tels nombres se notent aussi sous la forme $\pm n_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \{0,\ldots,9\}$. Le

$$A_n := 0,\overbrace{\underline{\alpha_1 \dots \alpha_p}\,\alpha_1 \dots \alpha_p \dots \alpha_1 \dots \alpha_p} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{10^i} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{10^{i+p}} + \cdots + \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{10^{i+p(n-1)}}$$

$$A_n = B - 10^{-pn} B \leqslant B \qquad \text{où} \qquad B := \frac{A_1}{1 - 10^{-p}}.$$

Supposons donc que l'on puisse donner un sens à A_∞, le même type de nombre mais avec une infinité de décimales. (C'est exactement en cela que consiste la construction des nombres réels.) Si l'on prolonge la relation d'ordre usuelle des décimaux aux nombres réels, ce qui est évidemment notre but, on doit avoir $A_\infty \geqslant A_n$ parce que les np premières décimales sont les mêmes, mais que les suivantes sont nulles dans A_n. Par ailleurs $A_\infty \leqslant C_n$ car ces deux nombres ont les mêmes premières décimales, mais ensuite une décimale de C_n est plus grande que celle qui lui correspond dans A_∞. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B - 10^{-pn} B = A_n \leqslant A_\infty \leqslant C_n = A_n + 10^{-pn} \leqslant B + 10^{-pn}$$

Il existe un unique nombre rationnel qui satisfait cette relation, c'est B. Il est donc naturel de décider que :

$$A_\infty := 0,\underline{\alpha_1 \dots \alpha_p}\,\alpha_1 \dots \alpha_p \dots$$

(avec une infinité de répétitions) n'est autre qu'une représentation décimale de $B = A_1/(1 - 10^{-p})$.

- Définition des réels

Définition 4. On dit qu'un réel $x = \pm n_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$ est positif ou nul (et l'on écrit $x \geqslant 0$) si $\pm$ est $+$; et l'on dit qu'il est strictement négatif (et l'on écrit $x < 0$) dans le cas contraire.

On note $-x$ le nombre réel égal à $\mp n_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$, ou à zéro si $x = 0$. (Ici $\mp$ signifie le signe opposé à $\pm$.)

On dit que x est strictement positif (et l'on écrit $x > 0$) si $-x < 0$; dans le cas contraire on le dit négatif ou nul (et l'on écrit $x \leqslant 0$).

Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

- Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Définition 4. On dit qu'un réel $x = \pm n_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ est positif ou nul (et l'on écrit $x \geqslant 0$) si $\pm$ est $+$; et l'on dit qu'il est strictement négatif (et l'on écrit $x < 0$) dans le cas contraire.

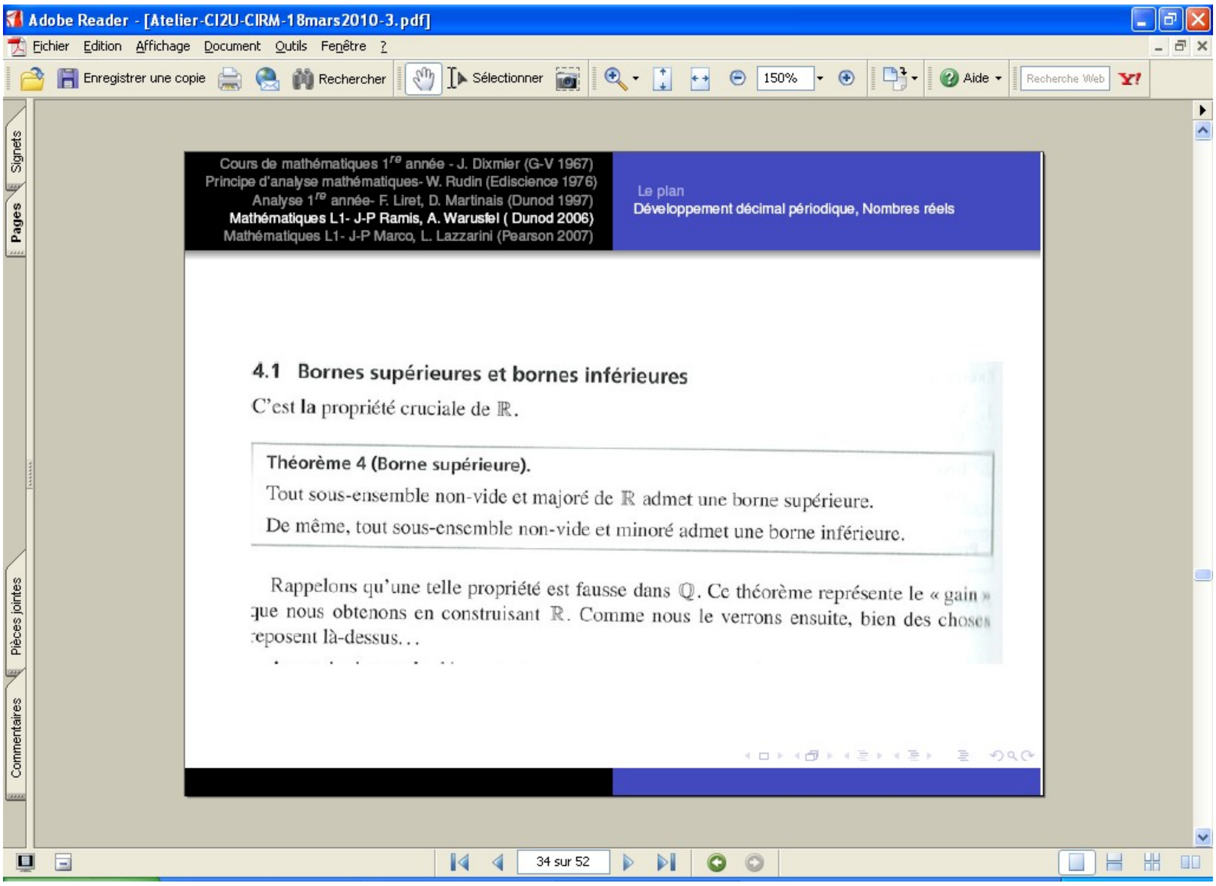
On note $-x$ le nombre réel égal à $\mp n_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, ou à zéro si $x = 0$. (Ici $\mp$ signifie le signe opposé à $\pm$.)

On dit que x est strictement positif (et l'on écrit $x > 0$) si $-x < 0$; dans le cas contraire on le dit négatif ou nul (et l'on écrit $x \leqslant 0$).

Définition 5. Soit deux réels $x = \pm m_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ et $y = \pm n_0, \beta_1\beta_2\ldots$, non nuls. On dit que $x < y$ si l'un des cas suivants se présente :

1. ou bien $x < 0$ et $y > 0$;
2. ou bien $0 < x$ et $0 < y$ et $m_0 < n_0$;
3. ou bien $0 < x$ et $0 < y$ et $m_0 = n_0$ et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i < k$, et $\alpha_k < \beta_k$;
4. ou bien $x < 0$, $y < 0$ et $-y < -x$ par les règles précédentes.

On dit que $x > y$ si $-x < -y$; que $x \leqslant y$ si $x < y$ ou $x = y$; que $x \geqslant y$ si $x > y$ ou $x = y$.


Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Fichier Edition Affichage Document Outils Fenêtre ?
Enregistrer une copie
Rechercher
Sélectionner
150%
Aide
Recherche Web
Signets
Pages
Pièces jointes
Commentaires
Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Le plan
Développement décimal périodique, Nombres réels
4.1 Bornes supérieures et bornes inférieures
C'est la propriété cruciale de ℝ.
Théorème 4 (Borne supérieure).
Tout sous-ensemble non-vide et majoré de ℝ admet une borne supérieure.
De même, tout sous-ensemble non-vide et minoré admet une borne inférieure.
Rappelons qu'une telle propriété est fausse dans ℚ. Ce théorème représente le « gain »
que nous obtenons en construisant ℝ. Comme nous le verrons ensuite, bien des choses
reposent là-dessus…
34 sur 52

- Les opérations dans $\mathbb{R}$

Théorème et définition 8. Soit $x = m_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$, $y = n_0,\beta_1\beta_2\ldots$ deux réels positifs. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons $x_k := m_0,\alpha_1\ldots\alpha_k$ et $y_k := n_0,\beta_1\ldots\beta_k$, qui sont des nombres décimaux. Alors l'ensemble :

$$A := \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\} = \{x_k + y_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

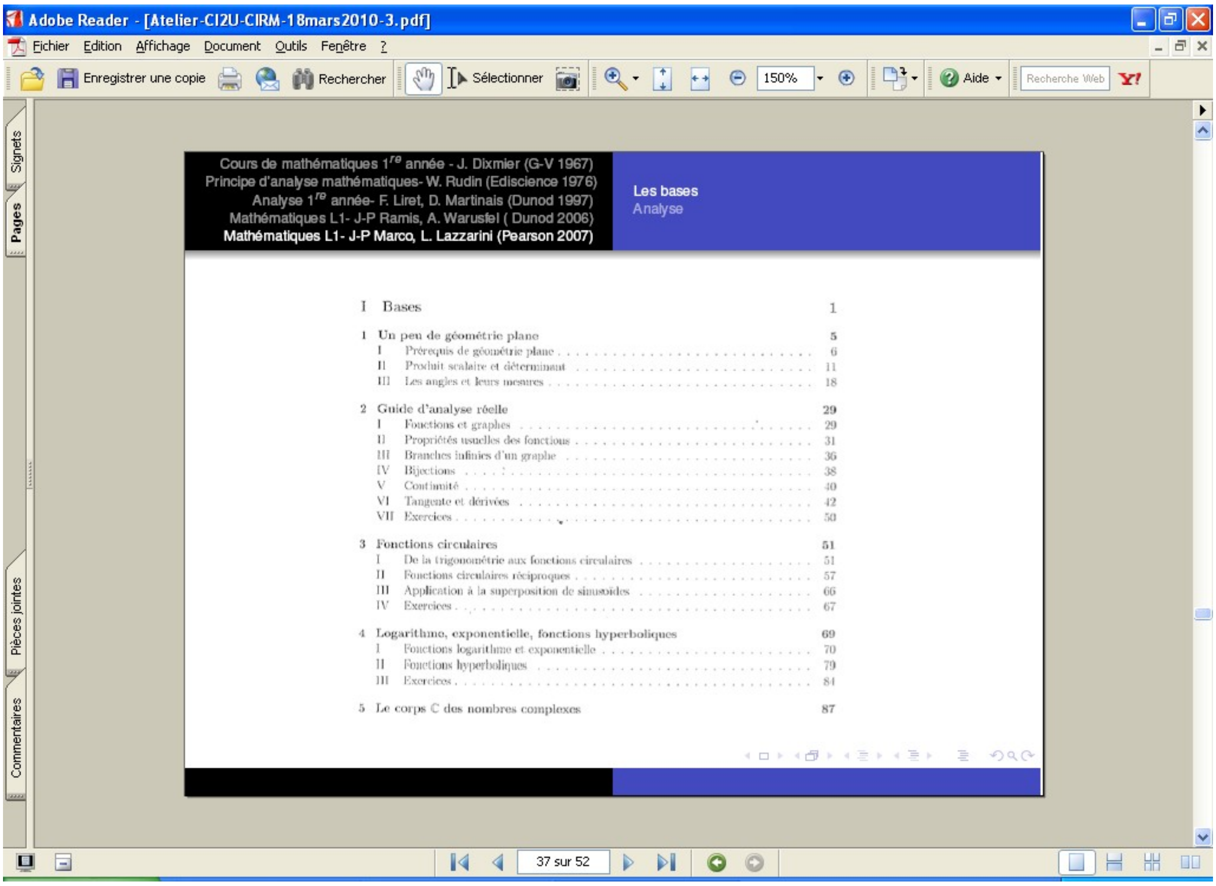
est non vide et majoré. Sa borne supérieure est appelée la *somme* de x et y : on la note $x + y$. Si x et y sont rationnels, cela donne la somme habituelle de rationnels.
Notons $\tilde{y}_k := y_k + 10^{-k}$; l'ensemble :

$$B := \{x_1 - \tilde{y}_1, x_2 - \tilde{y}_2, \ldots\} = \{x_k - \tilde{y}_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

est majoré également. Sa borne supérieure est appelée *différence* de x et y, on la note $x - y$. Si x et y sont rationnels, cela donne la différence habituelle de rationnels.

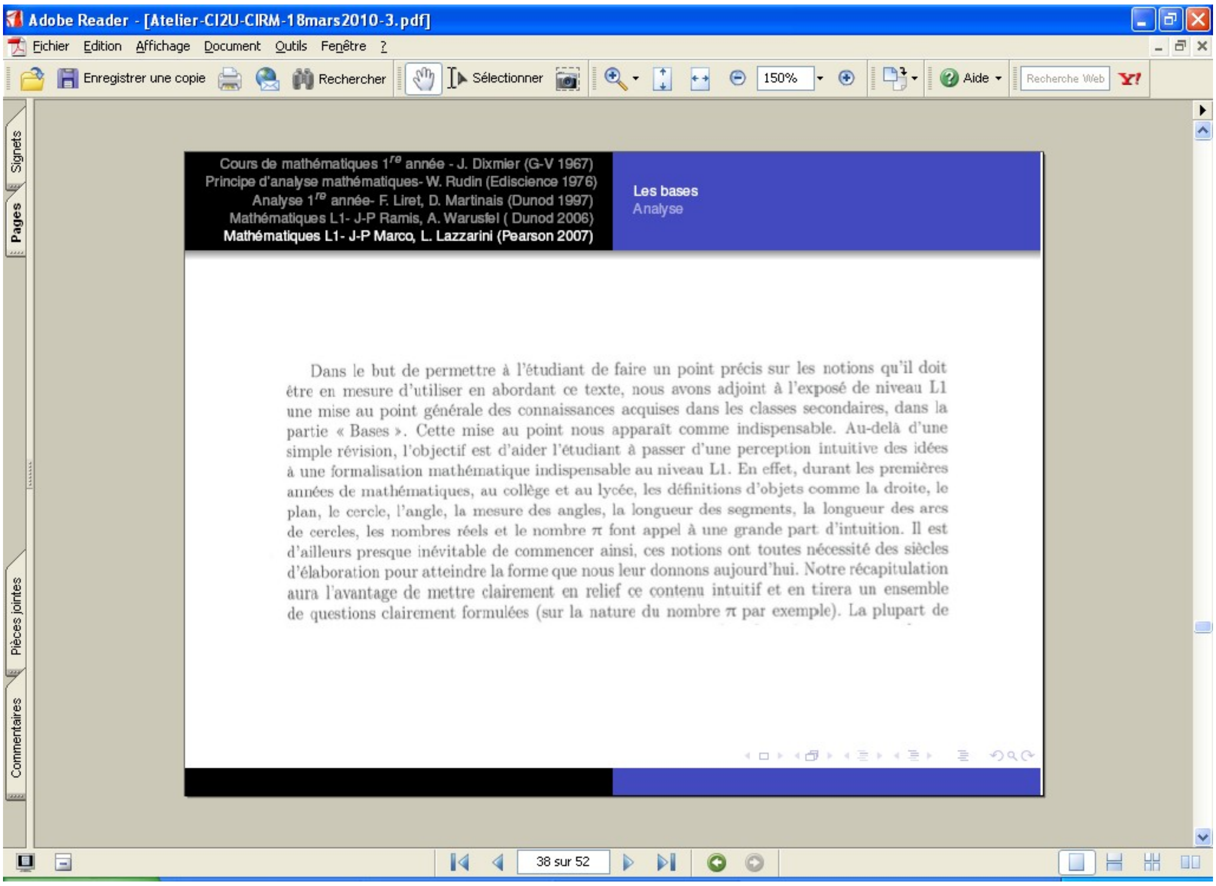
Autrement dit, pour additionner, on *tronque* les nombres à la $k^{ème}$ décimale, on ajoute les décimaux obtenus, et finalement on prend le plus petit réel dépassant tous les résultats obtenus de cette façon.

- La partie analyse est traitée dans une partie notée "*Base*" et une autre notée "*Analyse*"
- La partie "*Base*" reprend l'étude des fonctions vues en terminale complétée par fonctions circulaires et hyperboliques. La notion de limite est supposée acquise.
- Dans l'introduction de la partie "*Analyse*" les développements décimaux des rationnels introduisent la notion de suites de Cauchy. Le chapitre "*droite numérique*" montre la nécessitée d'introduire les nombres irrationnels. L'existence d'un corps commutatif ordonné contenant $\mathbb{Q}$ et possédant la propriété de la borne supérieure est admis. Dans le chapitre sur les suites une construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy est proposée. Un chapitre entier est réservé aux développements d'un réel dans une base et en fractions continuées.

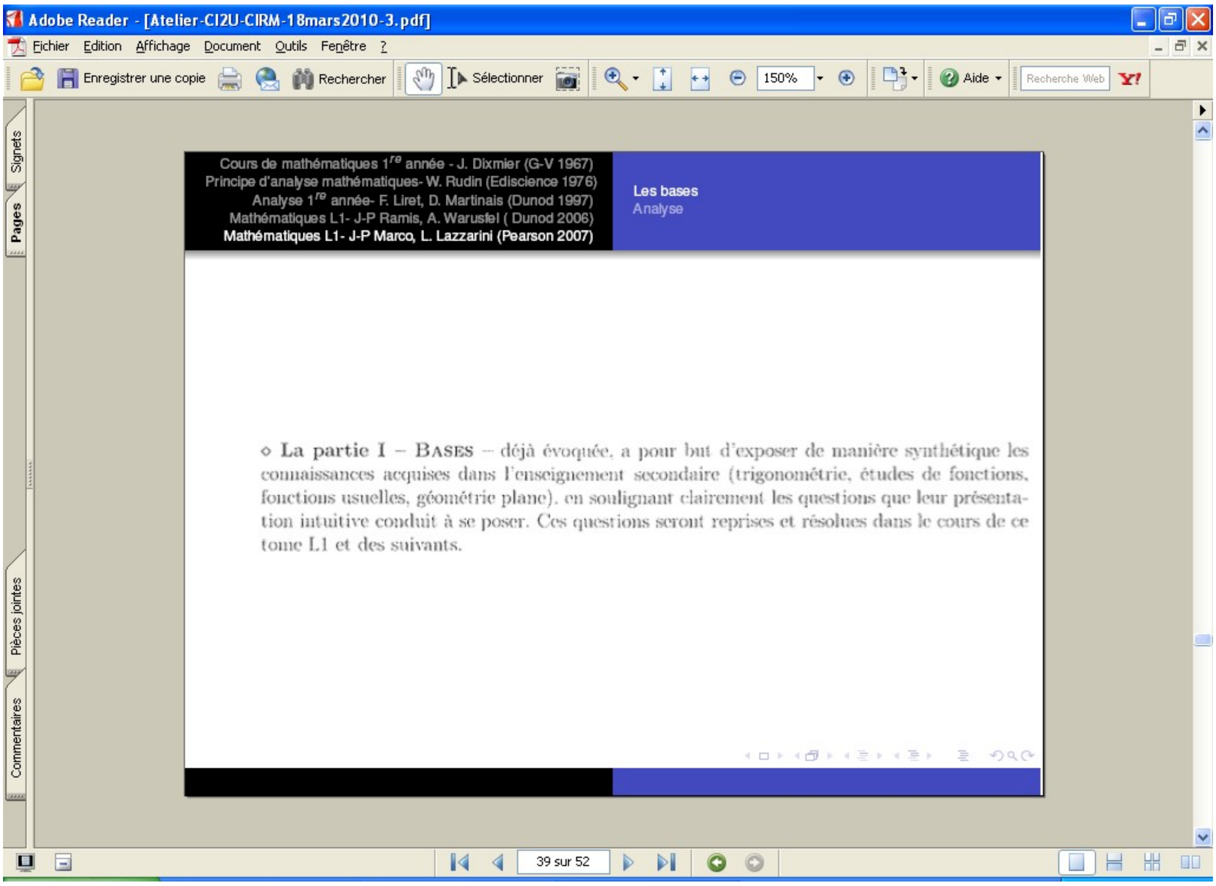


Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

Les bases
Analyse



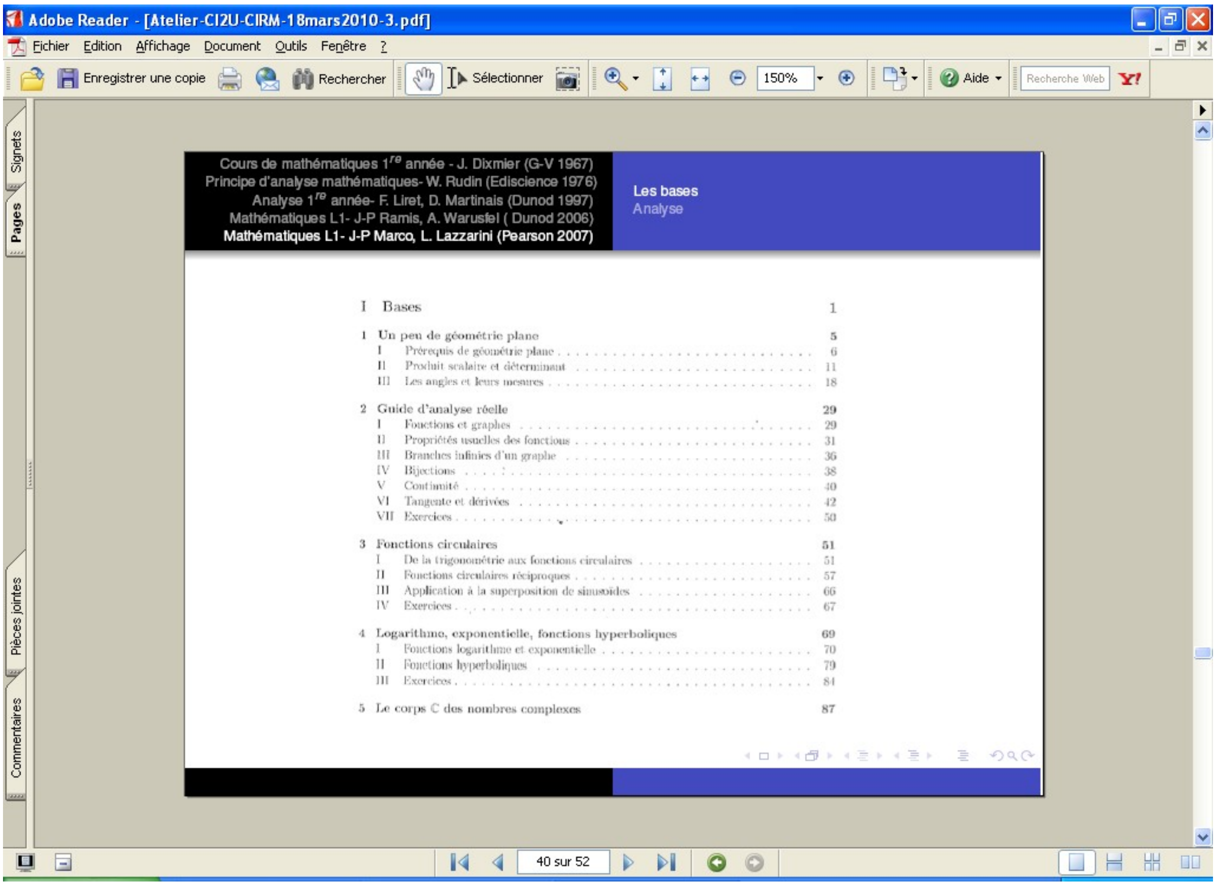
Dans le but de permettre à l'étudiant de faire un point précis sur les notions qu'il doit être en mesure d'utiliser en abordant ce texte, nous avons adjoint à l'exposé de niveau L1 une mise au point générale des connaissances acquises dans les classes secondaires, dans la partie « Bases ». Cette mise au point nous apparaît comme indispensable. Au-delà d'une simple révision, l'objectif est d'aider l'étudiant à passer d'une perception intuitive des idées à une formalisation mathématique indispensable au niveau L1. En effet, durant les premières années de mathématiques, au collège et au lycée, les définitions d'objets comme la droite, le plan, le cercle, l'angle, la mesure des angles, la longueur des segments, la longueur des arcs de cercles, les nombres réels et le nombre π font appel à une grande part d'intuition. Il est d'ailleurs presque inévitable de commencer ainsi, ces notions ont toutes nécessité des siècles d'élaboration pour atteindre la forme que nous leur donnons aujourd'hui. Notre récapitulation aura l'avantage de mettre clairement en relief ce contenu intuitif et en tirera un ensemble de questions clairement formulées (sur la nature du nombre π par exemple). La plupart de



Cours de mathématiques 1^{re} année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1^{re} année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

Les bases
Analyse

⋄ **La partie I – Bases** – déjà évoquée, a pour but d'exposer de manière synthétique les connaissances acquises dans l'enseignement secondaire (trigonométrie, études de fonctions, fonctions usuelles, géométrie plane), en soulignant clairement les questions que leur présentation intuitive conduit à se poser. Ces questions seront reprises et résolues dans le cours de ce tome L1 et des suivants.



Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]

Fichier Edition Affichage Document Outils Fenêtre ?

Enregistrer une copie Rechercher Sélectionner 150% Aide Recherche Web

Cours de mathématiques 1^{re} année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1^{re} année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

Les bases
Analyse

Signets Pages Pièces jointes Commentaires

40 sur 52

• Continuité

La définition de la continuité repose sur la notion de limite, que nous supposerons ici acquise.

Définition 2.22. (Continuité). *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in I$. *On dit que* f *est continue en* x_0 *lorsque* $f(x)$ *tend vers* $f(x_0)$ *quand* x *tend vers* x_0. *On dit que* f *est continue sur l'intervalle* I *lorsque* f *est continue en tout point de* I.

Le graphe d'une fonction continue est un objet plus complexe[4] qu'il n'y paraît. On se méfiera des représentations naïves des fonctions continues masquant la réalité géométrique de cette notion. Les mathématiciens de la seconde moitié du XIX^{e} siècle nous ont appris

Les fonctions usuelles (fonctions polynômes, fractions rationnelles, cos, sin, tan, exp, ln) sont continues sur leurs ensembles de définition. Les sommes, produits et quotients (lorsqu'ils sont définis) de fonctions continues sont des fonctions continues.

Rappelons le théorème des valeurs intermédiaires, souvent indispensable pour justifier l'existence d'une solution pour certaines équations.

Théorème 2.23. (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue sur l'intervalle* I, x_1 *et* x_2 *dans* I. *Alors, pour tout nombre* y *compris entre* $f(x_1)$ *et* $f(x_2)$, *il existe* x *compris entre* x_1 *et* x_2 *tel que* $y = f(x)$.

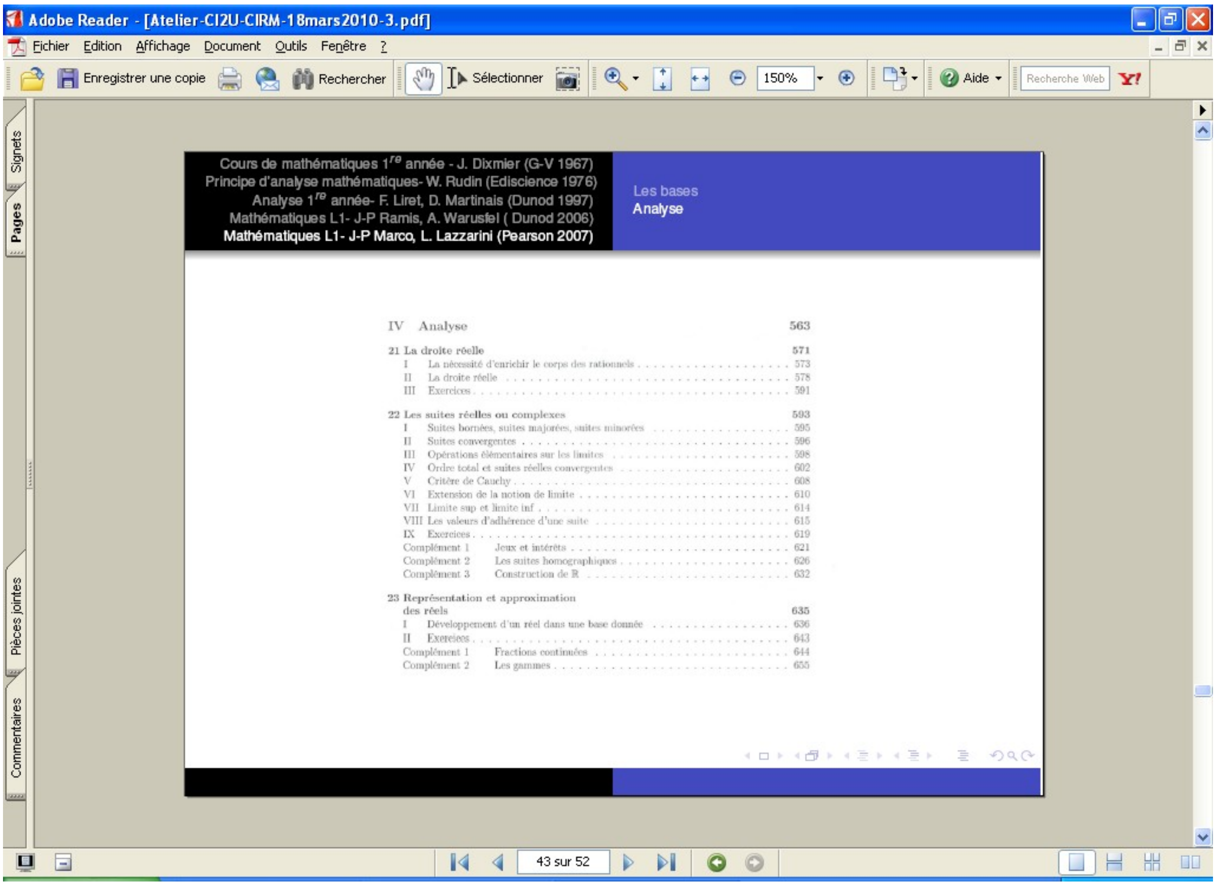
- Dérivabilité

Proposition 2.32. (Bijectivité et dérivée). *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$, *telle que* $f' \geqslant 0$ *et telle que* f' *ne soit identiquement nulle sur aucun intervalle ouvert non vide contenu dans* $[a,b]$. *Alors* f *réalise une bijection strictement croissante de* $[a,b]$ *sur* $[f(a),f(b)]$ *de bijection réciproque* $f^{-1} : [f(a),f(b)] \to [a,b]$ *strictement croissante et continue sur* $[f(a),f(b)]$.

Nous n'avons énoncé ce théorème que dans le cas particulier où l'intervalle de départ est de la forme $[a,b]$, il va de soi qu'il existe des variantes correspondant aux cas où f est définie sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$, $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$, etc. Dans la pratique, on repère une éventuelle bijection entre intervalles en étudiant le signe de $f'(t)$ et en lisant les intervalles en question sur le tableau de variation de f.

VI.4. Dérivabilité d'une bijection réciproque

Soit $f : I \to J$ une bijection. Puisque les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ du repère, la dérivabilité de f^{-1} en $y_0 = f(x_0)$ est reliée à celle de f en x_0. Voici une première approche intuitive de ce problème, qui sera revu de manière rigoureuse dans la suite du cours. On observe que la réflexion d'axe Δ conserve la propriété de tangence entre les droites et les courbes, et transforme donc la tangente en $M_0(x_0,y_0)$ à la courbe de f en la tangente en $M_0'(y_0,x_0) = \Delta(M_0(x_0,y_0))$ à la courbe de f^{-1}. Le nombre dérivé $f'(x_0)$ (quand il est défini !) étant la pente de la tangente en M_0 à la courbe de f, nous aurons besoin pour aller plus loin du petit calcul suivant.



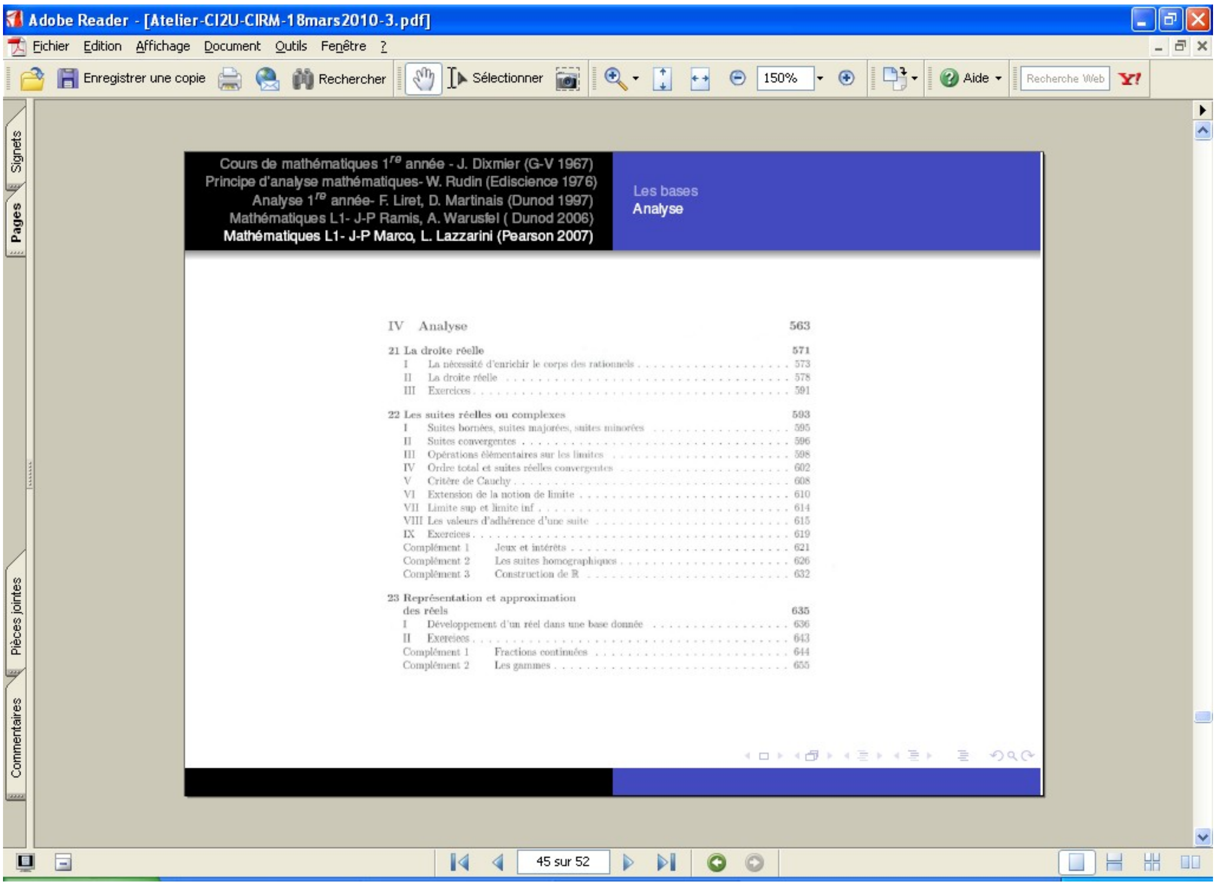
Cours de mathématiques 1^{re} année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1^{re} année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

Les bases
Analyse

◇ **La partie IV** – Analyse – est certainement celle qui est la plus détaillée dans les classes secondaires, surtout par le biais des études de fonctions. On sait, par exemple pour une fonction comme

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2+1},$$

calculer la dérivée, dresser un tableau de variations et tracer un graphe. Mais on ne sait pas encore exactement ce qu'est l'ensemble $\mathbb{R}$ sur lequel elle est définie, ni comment cette dérivée se formalise de manière satisfaisante. De même, les fonctions usuelles $(\exp, \ln, \sin, \cos, \tan)$ sont « bien connues » depuis les classes secondaires, mais leur définition ne peut être considérée comme satisfaisante au niveau L1. L'objet de cette partie IV est d'établir tous les outils nécessaires à la construction rigoureuse d'une théorie des fonctions, de la notion de nombre réel à celle de fonction dérivable et de fonction intégrable. Cette dernière notion permet à son tour de donner un sens précis à la notion de longueur des courbes planes et par là même de donner la première définition pleinement aboutie du nombre π.



Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

Les bases
Analyse

Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]

Fichier Edition Affichage Document Outils Fenêtre ?

Enregistrer une copie Rechercher Sélectionner 150% Aide Recherche Web

Signets Pages Pièces jointes Commentaires

- En introduction

Les nombres rationnels sont plus complexes. En effet, on sait aussi depuis les classes primaires que par exemple

$$\frac{1}{3} = 0,33333333333333\ldots, \qquad \frac{1}{6} = 0,16666666666666\ldots, \qquad (D_2)$$

les développements obtenus sont alors dits illimités. On se convainc intuitivement du bien fondé de ces écritures en posant la division $1/3$ ou $1/6$, et en notant que son reste se répète indéfiniment. Mais le sens même de ces développements est quelque peu obscur.

Admettons maintenant que l'on décide qu'un nombre réel est simplement une expression de la forme

$$x = a_p a_{p-1} \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-q} \ldots \qquad (D_3)$$

où le développement se poursuit indéfiniment, les entiers a_k, $k \in \mathbb{Z}$, $k \le p$, étant tous compris entre 0 et 9. Une question très naturelle est alors de se demander s'il est possible de définir une addition sur ces nombres, définie à partir de leurs développements. Reprenons pour cela les expressions (D_2). On obtient sans difficulté

$$0,33333333333333\ldots + 0,16666666666666\ldots = 0,49999999999999\ldots$$

et l'on peut se convaincre que cette suite illimitée de 9 correspond à l'addition de 1 au terme qui la précède (ou à tout le moins proposer cette règle comme règle opératoire). On obtient alors $1/3 + 1/6 = 0,5 = 1/2$, ce qui concorde avec nos conventions d'opérations sur les rationnels.

Cours de mathématiques 1re année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1re année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)

• introduction (suite)

L'idée nouvelle fondamentale, qui peut-être considérée comme à la base de toute la construction de l'analyse, est celle de *limite*. Notre intuition de la notion de limite repose certainement sur le fait qu'il n'est pas possible de trouver un rationnel strictement positif qui soit plus petit que tous les rationnels strictement positifs, ou en d'autre termes, que $\mathbb{Q}_+^*$ n'a pas de plus petit élément. En effet, suppposons que $r \in \mathbb{Q}_+^*$ soit le plus petit élément de $\mathbb{Q}_+^*$, on voit que $r/2 < r$ car la différence $r - r/2 = r/2$ est strictement positive, ce qui montre que r n'est pas le plus petit élément, puisque $r/2 \in \mathbb{Q}_+^*$.

On dit qu'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels a pour limite un rationnel ℓ lorsque pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, il existe un entier n_0 tel que $|r_n - \ell| < \varepsilon$ lorsque $n \geq n_0$. On note alors $\ell = \lim_{n\to\infty} r_n$, et on dit que la suite converge vers ℓ. Il existe bien sûr des suites qui ont des limites (toutes les suites constantes par exemple) et d'autres qui n'en ont pas, comme la suite de terme général $r_n = (-1)^n$. Mais la limite, lorsqu'elle existe, est unique. On peut donc définir sans ambiguïté *la* limite d'une suite de rationnels, lorsqu'elle existe.

Cette nouvelle notion permet de donner un sens parfaitement clair aux développements décimaux illimités que nous manipulions plus haut. Considérons le développement (D_3). On pose

$$r_n = \sum_{k=-n}^{p} a_k 10^k \qquad (S)$$

et on décide que le développement (D_3) est égal à *la* limite de la suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *lorsque cette limite existe.*

- introduction (suite)

Mais on peut montrer que cette limite n'existe pas toujours, plus précisément qu'elle existe si et seulement si le développement est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire s'il existe des entiers k_0 et ν tels que $a_{-k} = a_{-k-\nu}$ si $k \geq k_0$. Il apparaît donc que les développements qui n'entrent pas dans ce cadre correspondent à des *nombres non rationnels*.

Il serait possible de poursuivre dans cette voie et de donner des définitions de l'addition et de la multiplication des développements grâce aux suites définies par les termes généraux (S). Mais c'est un peu lourd, on préfère en général d'autres constructions. On note en particulier que les suites de la forme $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont en commun une propriété très intéressante, à savoir que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, il existe un entier n_0 tel que pour tous indices m et n plus grands que n_0, on a $|r_m - r_n| < \varepsilon$. En d'autres termes, l'écart entre deux termes de la suite peut être rendu arbitrairement petit à condition de choisir les indices de ces termes assez grands. Cette propriété est ce que l'on appelle la propriété de Cauchy.

Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]

Fichier Edition Affichage Document Outils Fenêtre ?

Enregistrer une copie Rechercher Sélectionner 150% Aide Recherche Web

• La droite numérique

Bien que le corps des réels soit d'une utilisation fréquente, sa construction n'est pas simple. Nous allons donner dans ce chapitre une idée intuitive de sa nature. Nous verrons plus loin, en complément au chapitre 22, une construction, due à Cauchy. Mais avant d'introduire les notions nécessaires à une véritable formalisation des notions, et pour permettre au lecteur de former son intuition des divers problèmes, nous allons donner quelques exemples supplémentaires de même nature que celui que nous venons de considérer.

Les nombres réels et les symboles que nous utilisons dans ces exemples ont le sens usuel introduit dans les classes secondaires, rappelé dans la première partie de ce livre.

II. La droite réelle

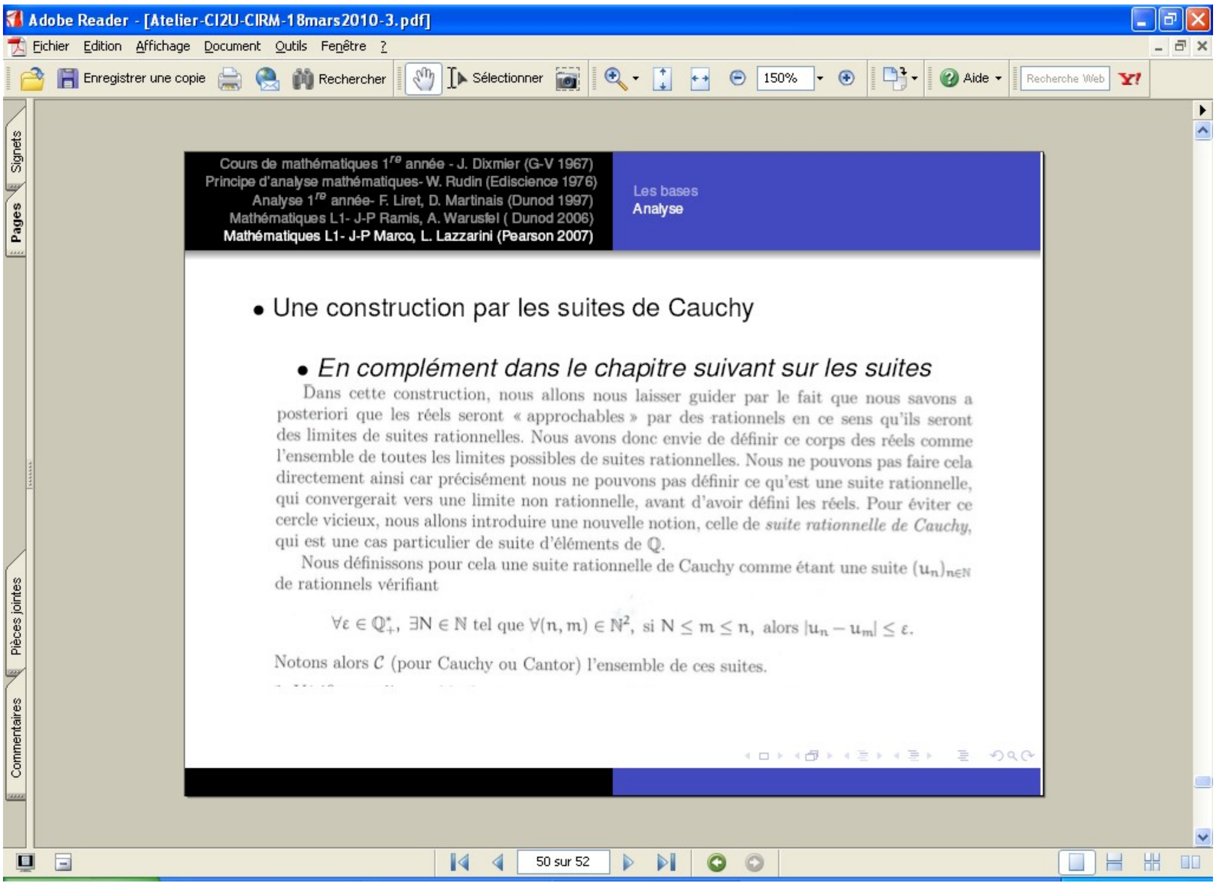
Nous sommes maintenant en mesure d'introduire de manière formalisée le corps des réels, dont les parties précédentes montrent l'intérêt, et d'en étudier les premières propriétés.

II.1. La droite réelle

Pour l'instant nous nous limitons à énoncer un théorème d'existence, dont nous donnerons la preuve en complément.

Théorème 21.10. *Il existe un corps commutatif contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-corps, muni d'une relation d'ordre total prolongeant celle de $\mathbb{Q}$, compatible avec les opérations, et dans lequel toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure.*

Ce corps, dont on peut de plus montrer l'unicité à isomorphisme près, sera appelé *corps des réels*, ou encore *droite réelle*, et sera noté $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (on note aussi $\times$ la multiplication). La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ sera notée $\leq$, le fait qu'elle prolonge celle de $\mathbb{Q}$ signifie qu'elle coïncide



- Une construction par les suites de Cauchy

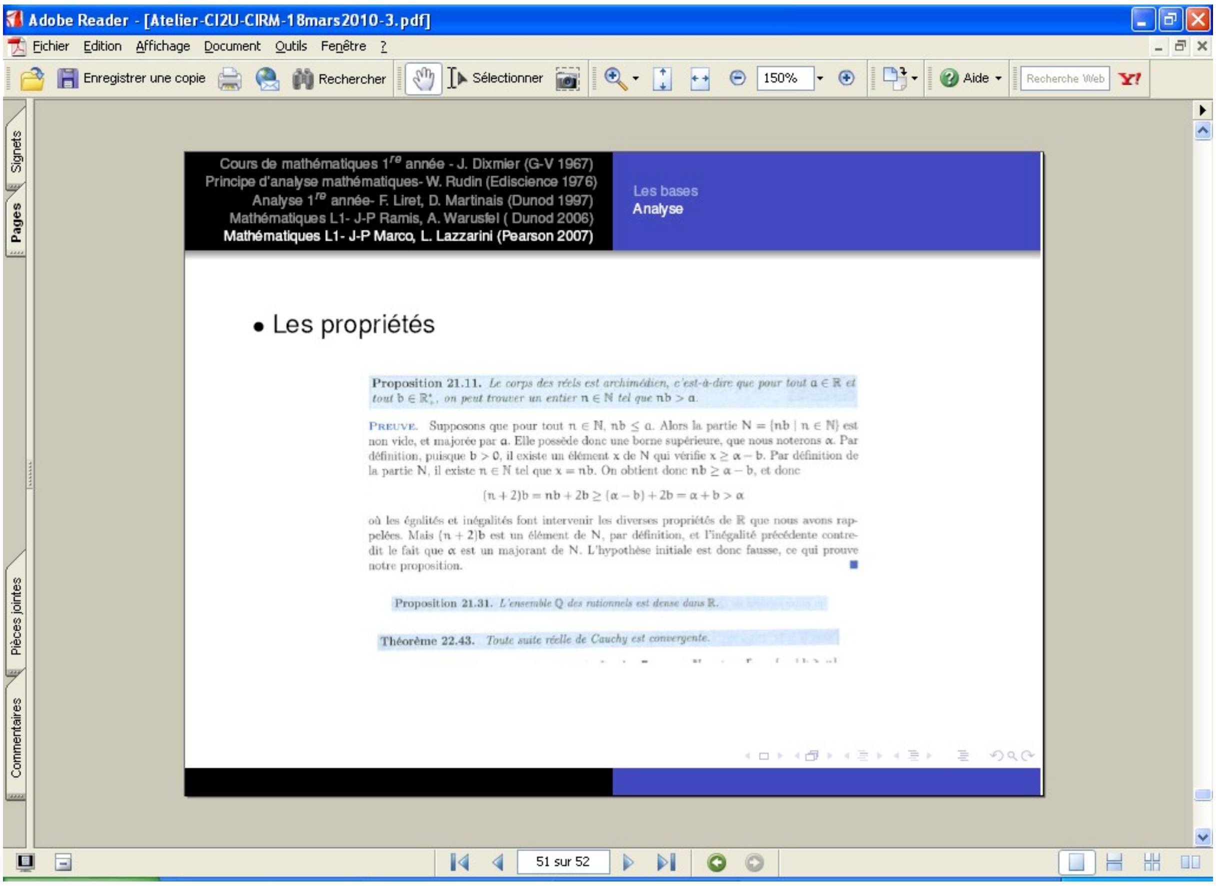
  - *En complément dans le chapitre suivant sur les suites*

Dans cette construction, nous allons nous laisser guider par le fait que nous savons a posteriori que les réels seront « approchables » par des rationnels en ce sens qu'ils seront des limites de suites rationnelles. Nous avons donc envie de définir ce corps des réels comme l'ensemble de toutes les limites possibles de suites rationnelles. Nous ne pouvons pas faire cela directement ainsi car précisément nous ne pouvons pas définir ce qu'est une suite rationnelle, qui convergerait vers une limite non rationnelle, avant d'avoir défini les réels. Pour éviter ce cercle vicieux, nous allons introduire une nouvelle notion, celle de *suite rationnelle de Cauchy*, qui est une cas particulier de suite d'éléments de $\mathbb{Q}$.

Nous définissons pour cela une suite rationnelle de Cauchy comme étant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels vérifiant

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \text{si } N \leq m \leq n,\ \text{alors } |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

Notons alors $\mathcal{C}$ (pour Cauchy ou Cantor) l'ensemble de ces suites.


Adobe Reader - [Atelier-CI2U-CIRM-18mars2010-3.pdf]
Cours de mathématiques 1^{re} année - J. Dixmier (G-V 1967)
Principe d'analyse mathématiques- W. Rudin (Ediscience 1976)
Analyse 1^{re} année- F. Liret, D. Martinais (Dunod 1997)
Mathématiques L1- J-P Ramis, A. Warusfel (Dunod 2006)
Mathématiques L1- J-P Marco, L. Lazzarini (Pearson 2007)
Les bases
Analyse
• Les propriétés
Proposition 21.11. *Le corps des réels est archimédien, c'est-à-dire que pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *et tout* $b \in \mathbb{R}_+^*$*, on peut trouver un entier* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $nb > a$.
PREUVE. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nb \leq a$. Alors la partie $N = \{nb \mid n \in \mathbb{N}\}$ est non vide, et majorée par a. Elle possède donc une borne supérieure, que nous noterons α. Par définition, puisque $b > 0$, il existe un élément x de N qui vérifie $x \geq \alpha - b$. Par définition de la partie N, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = nb$. On obtient donc $nb \geq \alpha - b$, et donc
$$(n+2)b = nb + 2b \geq (\alpha - b) + 2b = \alpha + b > \alpha$$
où les égalités et inégalités font intervenir les diverses propriétés de $\mathbb{R}$ que nous avons rappelées. Mais $(n+2)b$ est un élément de N, par définition, et l'inégalité précédente contredit le fait que α est un majorant de N. L'hypothèse initiale est donc fausse, ce qui prouve notre proposition. ■
Proposition 21.31. *L'ensemble* $\mathbb{Q}$ *des rationnels est dense dans* $\mathbb{R}$.
Théorème 22.43. *Toute suite réelle de Cauchy est convergente.*
51 sur 52

- Développement d'un réel dans une base

entiers ne demandaient que des additions en nombre fini. La notion de suite va donc être une nouvelle fois mise à l'honneur. On notera $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^*$ à éléments dans $\{0, \ldots, b-1\}$. Introduisons aussi les ensembles

$$\mathscr{C} = \{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathscr{S} \mid \exists n_0 \text{ tel que } p_n = b-1,\ \forall n \geq n_0\}, \quad \mathscr{P} = \mathscr{S} \setminus \mathscr{C}.$$

Le principe du développement des réels en base b est donné par la proposition suivante.

Proposition 23.1. *Soit $x \in [0,1[$. Il existe une unique suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{P}$ qui vérifie*

$$x = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{p_1}{b} + \frac{p_2}{b^2} + \cdots + \frac{p_n}{b^n}\right).$$

- Développement d'un réel en fractions continuées

Un peu de nostalgie :

une expérience en DEUG 1 à Lille dans les années 1984-1996, portant sur tout le contenu d'une année, mais analysée ici du point de vue de l'enseignement de la convergence des suites.

Marc Rogalski

OBJECTIF

Faire acquérir par les étudiants un bon concept de convergence en e-N, leur permettant d'étudier avec succès un grand nombre de types de suites qu'on peut rencontrer en analyse. Ne pas éviter les points difficiles.

CONTEXTE

Un enseignement expérimental annuel de DEUG 1 (L1)

MOYENS

(1) Donner aux étudiants des exercices et problèmes qui ne soient pas seulement des applications simples et isolées de théorèmes de convergence automatique, mais où il faille *revenir à la définition et au sens de la convergence*

(2) Donc, leur faire acquérir un *niveau d' expertise* suffisant pour étudier des suites un peu difficiles

(3) Dégager des *méthodes générales* à mettre en œuvre dans l'étude de la convergence de suites

(4) Développer *le travail sur la technique*

(5) Faire travailler les étudiants dans des *"ateliers"* (travail en petits groupes de 4 sur un seul exercice, sur une longue durée)

(6) Organiser un *TP informatique* sur l'étude des suites

(7) *Soigner l'introduction* (scénario de A. Robert)

(8) Etablir un lien étroit avec la compréhension des *nombres réels* (dans le contexte de leur construction dans le cours) et la notion de *borne supérieure*

(9) Donner autant que faire se peut des *motivations*

POURQUOI ?

Travaux d'Aline Robert

Les représentations mentales des étudiants sur la convergence des suites :

- Ø le modèle *archaïque* (limite = barrière) ;
- Ø le modèle *monotone* (converger = se rapprocher de façon monotone) ;
- Ø le modèle *dynamique* (converger = se rapprocher) ;
- Ø le modèle *statique* (en e-N, éventuellement en langage naturel).

Constat : Les meilleures performances sont réalisées par les étudiants ayant le modèle statique, même pour les exercices qui n'utilisent pas le e-N. Les étudiants ayant un modèle seulement dynamique ne réussissent qu'à 50 %.

Donc, hypothèse : pour réussir bien à un niveau n il faut être à un niveau n+1. Dit autrement : *un niveau d'expertise minimum est nécessaire pour acquérir un concept*.

Choix repris d'A. Robert : *implanter tôt le bon modèle* (statique).

Choix supplémentaire : un fort *travail sur la technique*, accompagné d'un *enseignement de méthode*, c'est-à-dire de manière systématique de se poser de bonnes questions.

EVALUATION PARTIELLE

1/ Bon taux de réponses à un examen partiel avec le sujet :

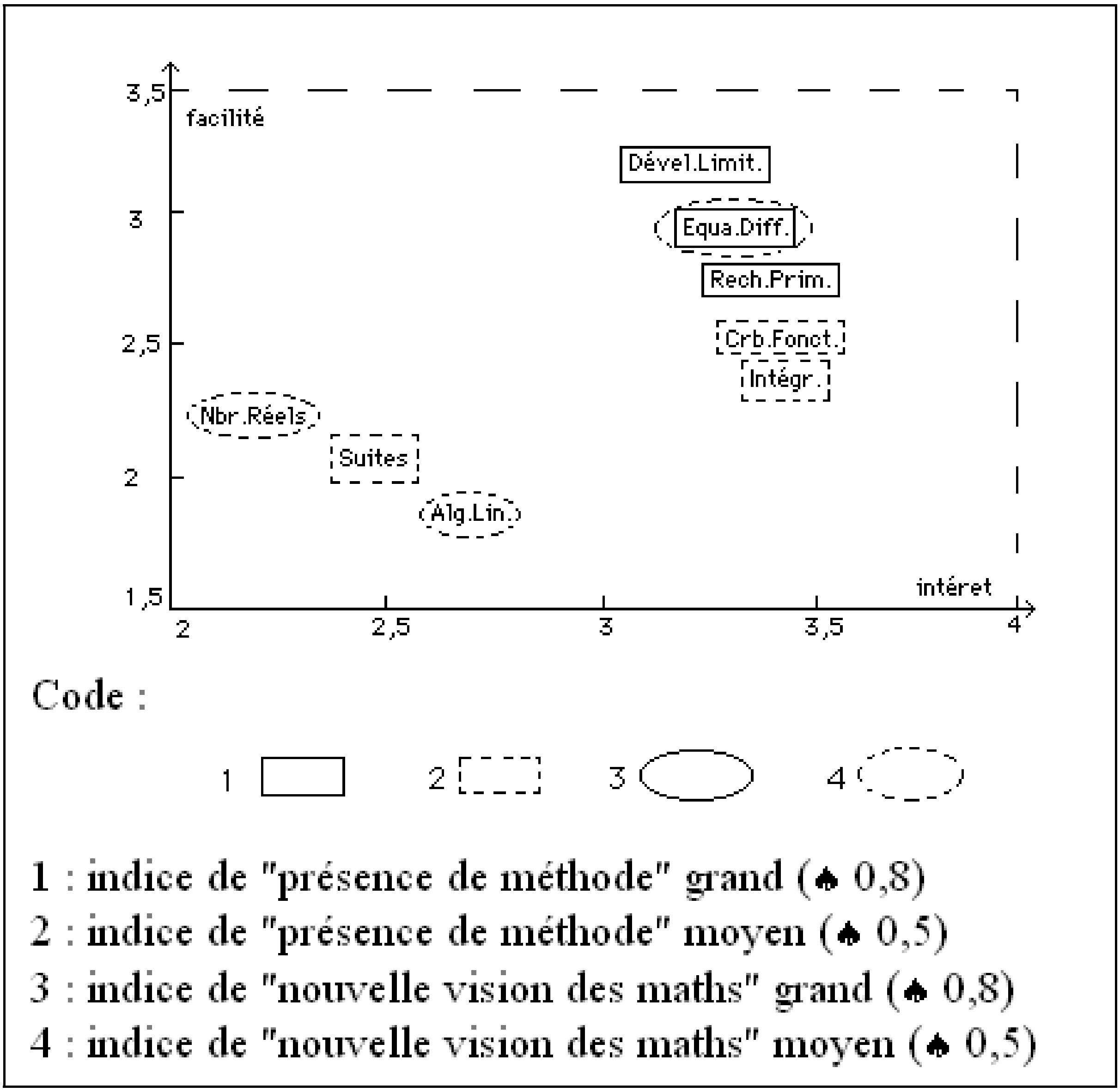
"u_0 étant donné, on définit la suite u_n par

$$u_{n+1} = u_n^2 + \log u_n \text{ si } u_n > 0 \text{ ; } u_{n+1} = -1989 \text{ si } u_n \leq 0.$$

Quelles conjectures faites-vous sur cette suite ?"

2/ Les étudiants étant remis en Deug 2 dans des enseignements standard en commun avec les étudiants d'une section de Deug 1 non expérimentale, les taux de succès au Deug en 2 ou 3 ans ont été de 59 % contre 48 %.

3/ Un questionnaire aux étudiants :



QU'EST-CE QUI ÉTAIT POSSIBLE ET NE L'EST PEUT-ÊTRE PLUS ? POURQUOI ?

Quelques conditions qui étaient alors réunies :

- Un enseignement annuel, où la coordination des divers chapitres était soigneusement organisée (par exemple, géométrie analytique, faisceaux de plans, courbes et surfaces gauches, suites récurrentes linéaires, équations différentielles linéaires précédaient l'algèbre linéaire ; pratique des changements de cadres et registres sur les fonctions et études locales précédaient l'étude qualitative élémentaire des équations différentielles ; l'étude des polynômes et l'arithmétique précédaient les concepts généraux d'algèbre ; ...).
- Une année d'enseignement de 28 à 30 semaines (selon les années), avec environ 11heures par semaine de mathématiques.
- Un devoir de mathématiques donné tous les 15 jours.
- Un contrôle des connaissances approfondi : 3 examens partiels et l'examen final, assez conceptuels ; 5 interrogations écrites en TD, sur les techniques, renvoyées au travail personnel ; 3 ou 4 TP sur ordinateur, avec un compte-rendu écrit ; un mémoire à rédiger par groupes de 3 ou 4 étudiants, à partir du mois de mars.
- Un enseignement de l'intégrale reposant sur la mesure des grandeurs géométriques ou physiques.
- Un travail en petits groupes (les "ateliers") où chaque groupe a à résoudre un seul problème, mais durant 2 heures, pour que les étudiants travaillent à leur "vrai" rythme.
- Des étudiants majoritairement issus de l'ancien bac C, et prêts à travailler.

QUESTIONS :

- Ø L'introduction du LMD (24 semaines d'enseignements, parcellisation en unités isolées les unes des autres) ;
- Ø Le passage au bac S, la réduction constante des horaires de mathématiques dans le secondaire ;
- Ø L'évolution de l'état d'esprit des étudiants, leur conception de l'activité mathématique (citation en TD : "m'sieur, si on n'a pas trouvé en 5 minutes, on ne trouvera jamais") ;
- Ø Le renoncement des enseignants du supérieur à faire travailler les étudiants (disparition des devoirs à la maison), ou à réfléchir un minimum sur l'épistémologie et l'histoire de ce qu'ils veulent enseigner, ou à contrôler sérieusement l'acquisition des concepts du programme, ou à avoir le minimum de respect humain pour leurs étudiants (citation : "ils sont nuls, mais il faut les recevoir, sinon on n'aura plus d'étudiants… et plus de postes").

Tous ces faits permettent-ils de refaire l'enseignement expérimental qu'on a fait à Lille de 1984 à 1996 ?

Dans cette période, un grand nombre d'expérimentations ont eu lieu (sous l'impulsion ministérielle de la "rénovation pédagogique des Deugs"). Force est de constater que rien de ce qui a été entrepris à cette époque ne subsiste aujourd'hui, tout a été écrasé sous le rouleau compresseur de la modularisation, puis du LMD imposés par Allègre et Jospin, puis par leurs successeurs… mais avec la résignation des enseignants.

Faut-il quand même être optimiste ?