Matrices au lycée: de nouvelles possibilités, pour la transition secondaire-supérieur ?

IREM RENNES

Anne Balliot, IREM de Rennes, Lycée Victor et Hélène Basch

Ghislaine Gueudet, IREM de Rennes, IUFM Bretagne

Colloque liaison lycée-post-bac, Lyon, 25 mai 2013

Présentation de l'atelier

1. Présentation du programme, orientée par des questions ;
2. Présentation de la progression suivie cette année par Anne ;
3. Focus sur un thème : “pertinence d'une page web”
4. Retour sur les apports possibles, pour le post-bac.

Matrices en spé TS, programme et questions

Principes généraux annoncés dans le progamme :

Un enseignement fondé sur la résolution de problèmes, les matrices apparaissant comme outils, mobilisant divers outils logiciels : tableur, calcul formel, calculatrice etc.

Peu de détails sur les objectifs précis de l'enseignement, en termes de contenus mathématiques.

Matrices en spé TS, programme et questions

Questions :

- Au lycée, comment mettre en place un enseignement fondé sur la résolution de problèmes (avec un rôle important des technologies) ?
- Est-ce que l'évaluation de cet enseignement suivra les mêmes principes ?
- Quels sont les éléments théoriques exigibles ?
- Est-ce que l'enseignement post-bac peut suivre ces mêmes principes ?

Introduction des matrices et des opérations sur les matrices

(Regards sur les contenus, d'après différents manuels – un programme qui laisse ouvertes différentes possibilités !)

Par la résolution de problèmes ; contextes : calcul de coût, graphe probabiliste.

Dans ces problèmes, rencontre du produit d'une matrice et d'un vecteur, puissances de matrices, comme outils.

Pour l'introduction du produit dans le cours: généralisation à partir de ces cas particuliers (qui justifient la curieuse formule du produit).

Possibilité de calculs instrumentés (calculatrice – logiciel), produits, inverses.

Puissances-diagonalisation-suites de matrices

Puissances introduites dans des contextes qui mènent à l'étude de suites récurrentes $U_{n+1}=AU_n+B$: évolution d'une population, marches aléatoires.

Observation : il est plus simple de calculer les puissances d'une matrice diagonale !

Dans certains manuels :

Diagonalisation, notion de valeur propre ; décomposition diagonale + triangulaire supérieure.

Un jeu sur les analogies et différences entre matrices et nombres réels

Analogies a priori naturelles : un tableau de nombres se comporte comme un nombre, ou plusieurs nombres juxtaposés

La matrice nulle O : pas d'ambiguïté sur ses coefficients, mais confusions possibles si oubli de la taille, selon la notation retenue (O_3).

La matrice I (pourquoi elle se nomme I ? pourquoi n'est-elle pas formée que de 1 ?), élément neutre pour le produit

Etude de suites de matrices, limites de suites de matrice

Suites $U_{n+1}=A\ U_n$

Un jeu sur les analogies et différences entre matrices et nombres réels

Mais des différences importantes

Un produit qui ne vérifie pas les propriétés habituelles :

Non commutativité ;

Existence de matrices non nulles, mais tout de même pas inversibles, nécessité d'une étude de l'inversibilité

Etude de suites de matrices, mais pas de leurs variations !

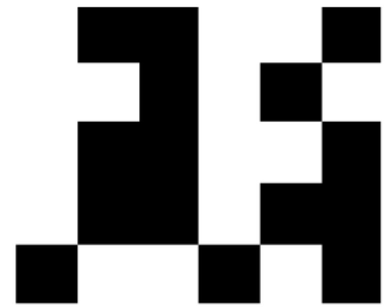
Appui possible sur les analogies et les différences pour faire ressortir l'idée de loi de composition, et de propriétés de ces lois.

Mais possibilités de confusion : A-I= I(A-1) !!!

Beaucoup de visualisation, associée au contexte ou à l'outil informatique...

2. <u>Opérations sur les images</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



On transforme la matrice A associée à l'image de gauche en remplaçant 1 par 0 et 0 par 1, on obtient la matrice B, associée à l'image de droite, qui est le négatif de l'image de gauche.

Matrice vue comme représentant une image numérique (pixels), un autre sens...

Beaucoup de visualisation, associée au contexte ou à l'outil informatique...

*Voici le code **Scilab** de la fougère de référence, et une représentation avec 10 000 points*

```
function
point_image=transformation(point_antecedent,
choix)
  if choix == 1 then
    A = [[0,0];[0,0.16]] ; V=[0;0];
  end
  if choix == 2 then
    A = [[0.85,0.04];[-0.04,0.85]] ; V=[0;1.6];
  end
  if choix == 3 then
    A = [[0.2,-0.26];[0.23,0.22]] ; V=[0;1.6]
  end
  if choix == 4 then
    A = [[-0.15,0.28];[0.26,0.24]] ; V=[0;0.44]
```

Construction de la fougère de Barnsley, extrait du document d'accompagnement

… et peu de géométrie !

Dans les manuels, des activités sur “matrice d'une transformation géométrique”.

Emploi de Geogebra comme “boîte noire” : observation de l'effet d'une tranformation définie par une matrice 2x2 sur une image.

Symétrie, rotation...

Transformation agissant sur des points, ou sur des vecteurs ?

2.Une progression en spéTS sur les matrices

3 chapitres intercalés par de l’arithmétique

Total heures pour ces 3 chapitres : 26h

(pour 30h d’arithmétique)

C’est la progression que j’ai choisie pour cette première année d’enseignement de ces notions……

Chapitre 1- *12h novembre*

1) Définition-Premiers exemples d'utilisation:

Matrice associée à un graphe

Suites de matrices

2) Calculs : somme produit puissance

$$\begin{pmatrix} le & a & le \\ un & a & un \\ le & avait & un \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} chat & rat & lion \\ mangé & dévoré & dégusté \\ poisson & fromage & touriste \end{pmatrix}$$

3) Suites de matrices $U_{n+1} = AU_n$

4) Marches aléatoires $X_{n+1}=X_nT$

Exemples de problèmes étudiés

Le collectionneur

Dans chaque paquet de céréales il y a une figurine…..On veut collectionner les 11 figurines. Combien de paquets acheter pour avoir la collection ?

Simulation:

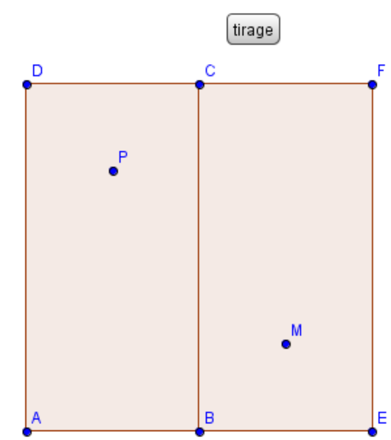
```
M=zeros(1,11);n=0;m
afficher(M);
while prod(M)<1
  n=n+1;
  fig=floor(11*rand()+1);
  M(1,fig)=1;
  afficher ("pour n="+string(n));
  afficher (M);
end;
```

Modèle de l’urne d’Ehrenfest à deux boules

Simulation avec Geogebra

Suite $U_{n+1}=U_nT$ avec T matrice de transition

Temps de retour



Référence Math’x

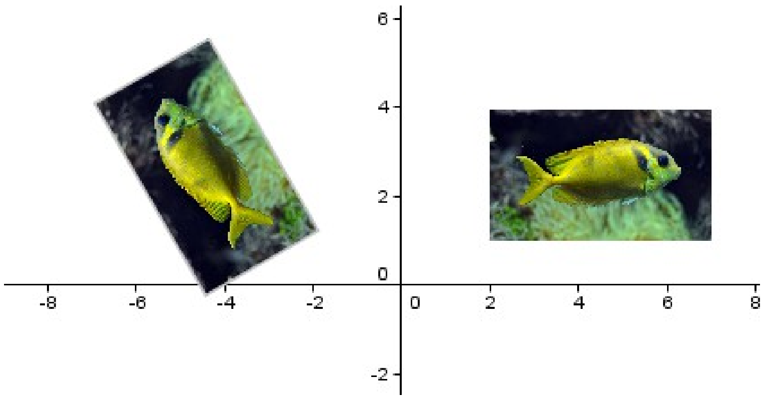
Chapitre 2- *6h février*

1) Inverse d’une matrice
2) Déterminant d’une matrice 2*2
3) Résolution de systèmes
4) Calcul des puissances successives d'une matrice en utilisant la diagonalisation sur des exemples

Exemples de problèmes étudiés

Matrice et rotation

Matrice d’une rotation…
matrice de la transformation
réciproque….



Chiffrement de Hill

Utilisation d’une matrice pour coder un message….et de la matrice inverse pour décoder
Lien avec le programme d’arithmétique.

Référence Transmath

Chapitre 3- *8h mai*

1) Suites de matrices $U_{n+1} = AU_n + B$

2) Convergence d’une suite de matrices

3) Etude asymptotique d’une marche aléatoire

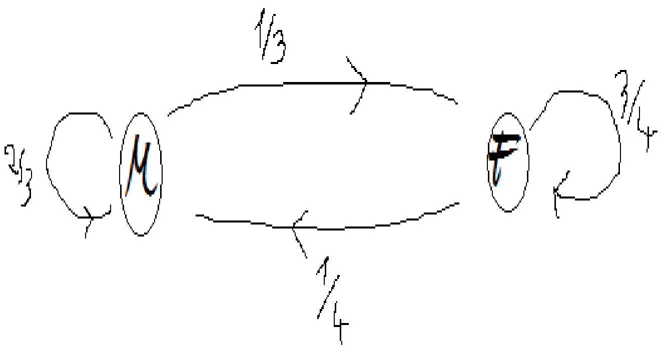
Exemples de problèmes étudiés

Pertinence d'une page web

Voir Fiche donnée

Etude asymptotique d'une marche aléatoire

Changement de genre sur la planète Herma

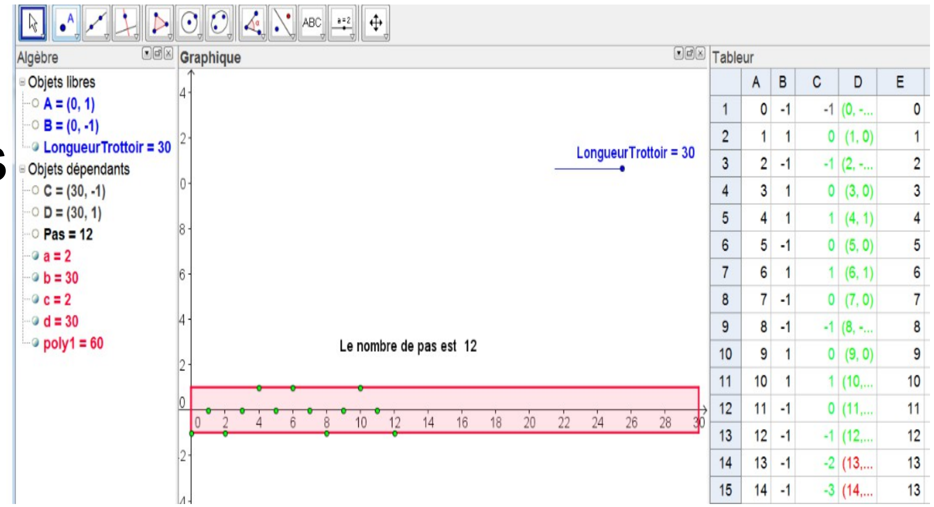


Référence Repère

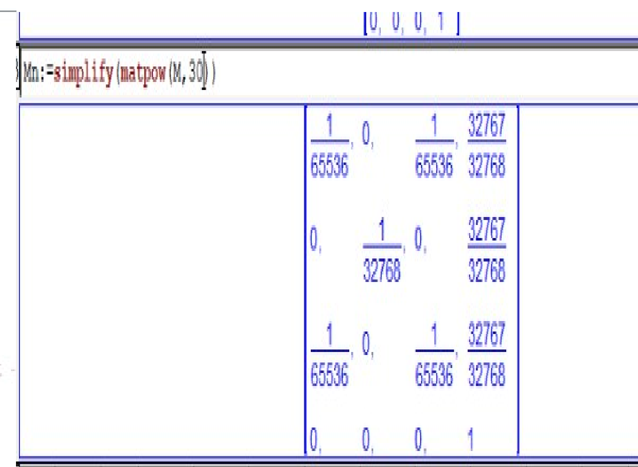
Une activité introductive aux 3 chapitres élaborée par ma collègue Soazig Jolivet

Le funambule…

Introduction des matrices à partir d'une marche aléatoire. Matrice de transition, produit, puissance….




```
M=[0 1/2 0 1/2;1/2 0 1/2 0;0 1/2 0 1/2;0 0 0 1];
A=M;
n=input("puissance de la matrice ");
i=2;
for i=2:n
    A=A*M;
    i=i+1;
end
afficher(" La puissance "+string(n)+" de la matrice vaut
");
afficher(A)
```



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{65536}, & 0, & \frac{1}{65536}, & \frac{32767}{32768} \\ 0, & \frac{1}{32768}, & 0, & \frac{32767}{32768} \\ \frac{1}{65536}, & 0, & \frac{1}{65536}, & \frac{32767}{32768} \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

3. Focus sur un thème : pertinence d'une page web

Supports : texte de l'activité + extraits de manuels

Questions proposées :

- quels sont les connaissances et savoir-faire relatifs aux matrices, en jeu dans l'activité "procédé de classement de pages web" ?
- comment aborder le thème "pertinence d'une page web", dans le cadre de l'enseignement actuel de spécialité TS ?
- quels apports possibles d'un tel travail, dans le contexte de la transition secondaire-supérieur ?

3.Pertinence d'une page web : remarques, observations

Remarques générales

- Le thème de la “pertinence” : ambigu ! Différentes définitions possibles, entraînant des modélisations différentes.
- Les ressources proposées par le document d'accompagnement : denses et complexes !

L'activité testée (choix d'un graphe sans “pertinence évidente”)

- Appropriation par les élèves : nécessite un temps de réflexion sur ce que peut être la pertinence ; sur le sens à attribuer au graphe.
- Modélisation difficile pour les élèves : complexité de l'arbre, de la recherche des matrices.
- Partie de traitement mathématique, avec emploi de la calculatrice : plus simple !
- Interprétation de la limite trouvée en termes de pertinence respective des 4 pages.

4. Au niveau post-bac ?

Des exploitations différentes, selon les filières :

- classes prépa (contenus proches, en prépa HEC notamment) ;
- IUT (informatique notamment) ;
- première année d'université.

Un contenu abordé en spécialité, donc a priori *seulement par certains étudiants*

4. Au niveau post-bac ?

Plutôt s'inspirer de l'esprit du programme, pour introduire (à l'université) des aspects qui généralement n'y sont pas présents :

- résolution de problèmes ;
- emploi des TICE ;
- travail associant algèbre linéaire et probabilités.

Organiser par groupes (dont un ex-TS spécialité) des exposés, utilisant certains thèmes du programme TS spécialité ?