# Un "retour" de la logique dans les programmes du lycée : une occasion à ne pas rater !

Atelier proposé par le

groupe logique

de la Commission Inter IREM lycée

http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique275

Animé par Geneviève Bouvart, IREM de Lorraine, gbouvart@wanadoo.fr
Emmanuelle Forgeoux, IREM de Rennes, eforgeoux@yahoo.fr
Denise Grenier, IREM de Grenoble, denise.grenier@ujf-grenoble.fr
Zoé Mesnil, IREM de Paris, zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr

# Rapide historique

- **1960** : une entrée discrète dans les textes, une préparation sur le terrain
- **1969** : le programme des maths modernes : la logique, associée à la théorie des ensembles, comme base du langage mathématique propre à expliquer le monde
- **1981** : programme de la contre-réforme : la logique bannie
- **2001** : un retour timide
- **2009** : le tableau des objectifs

# Des conséquences de cette histoire mouvementée

- Ces allers-retours de la présence de la logique dans les programmes de mathématiques font que nous n'avons pas vraiment de recul sur comment associer logique et mathématiques dans l'enseignement au lycée.
- Il y a des différences de formation entre les générations de professeurs, entre professeurs d'une même génération.

# Quelques questions

- Si de toutes façons il y a forcément de la logique là où il y a des mathématiques, qu'est-ce qui dépend des programmes ?
- Est-ce que la présence d'une demande explicite concernant des notions de logique change les pratiques de professeurs ?

# En seconde

**Raisonnement et langage mathématiques**

Le développement de l'argumentation et l'**entraînement à la logique** font partie intégrante des exigences des classes de lycée. À l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant et, par exemple, à distinguer implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme.

# Dans le cycle terminal

Comme en classe de seconde, les capacités d'argumentation, de rédaction d'une démonstration et de logique font partie intégrante des exigences du cycle terminal.

Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne font pas l'objet de cours spécifiques mais prennent naturellement leur place dans tous les champs du programme. Il importe toutefois de prévoir

des moments d'institutionnalisation

de certains concepts ou types de raisonnement, après que ceux-ci ont été rencontrés plusieurs fois en situation.(*spécifique en S*)

## Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

**Notations mathématiques**

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

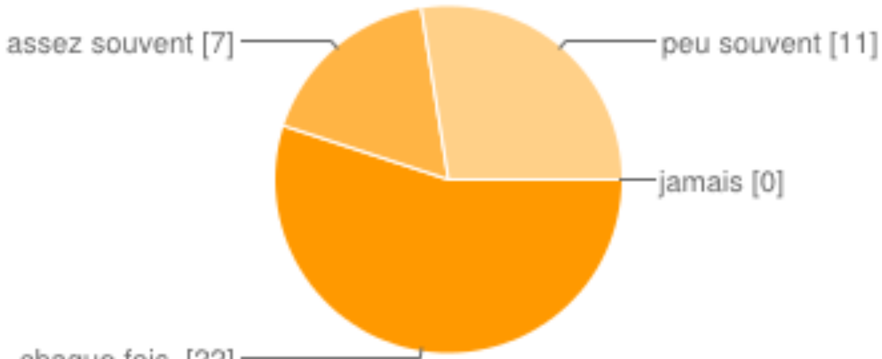
Pour le complémentaire d'un ensemble $A$, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

**Pour ce qui concerne le raisonnement logique**, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

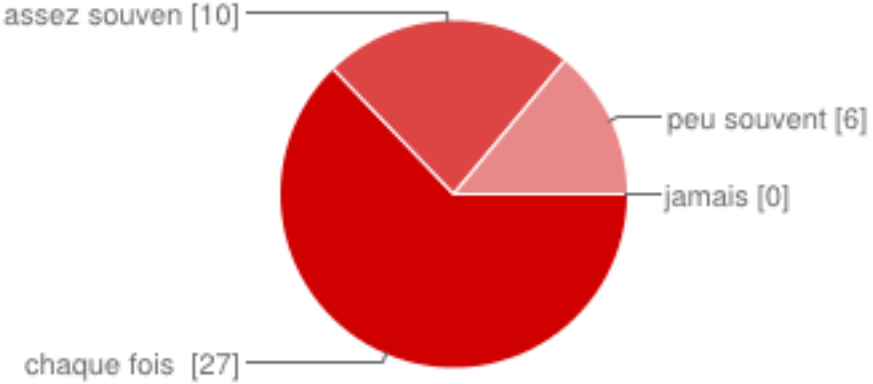
# Pratiques d'enseignants

**Avant les nouveaux programmes, je faisais des commentaires sur des notionsde logique**




| | | |
|---|---|---|
| chaque fois que l'occasion se présente | **22** | 55 % |
| assez souvent | **7** | 18 % |
| peu souvent | **11** | 28 % |
| jamais | **0** | 0 % |

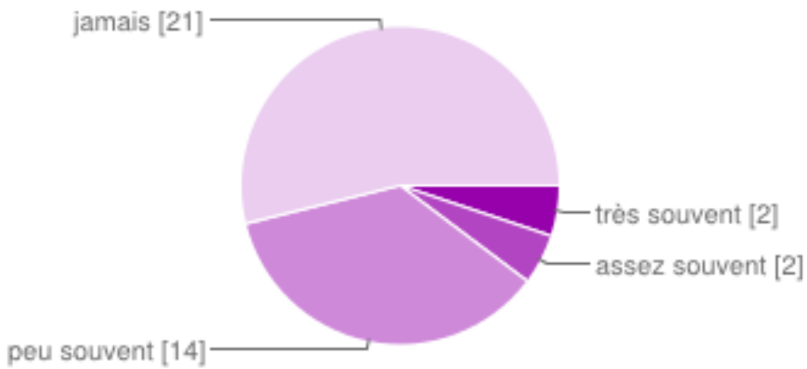
**Depuis le nouveau programme, je fais des commentaires sur des notions de logique**




| | | |
|---|---|---|
| chaque fois que l'occasion se présente | **27** | 63 % |
| assez souvent | **10** | 23 % |
| peu souvent | **6** | 14 % |
| jamais | **0** | 0 % |

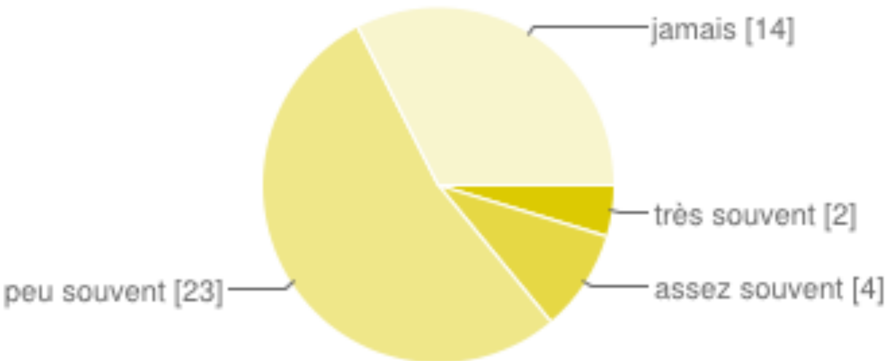
# Pratiques d'enseignants

**Avant les nouveaux programmes, je faisais noter aux élèves une synthèse sur des notions de logique :**




| | | |
|---|---|---|
| très souvent | **2** | 5 % |
| assez souvent | **2** | 5 % |
| peu souvent | **14** | 36 % |
| jamais | **21** | 54 % |

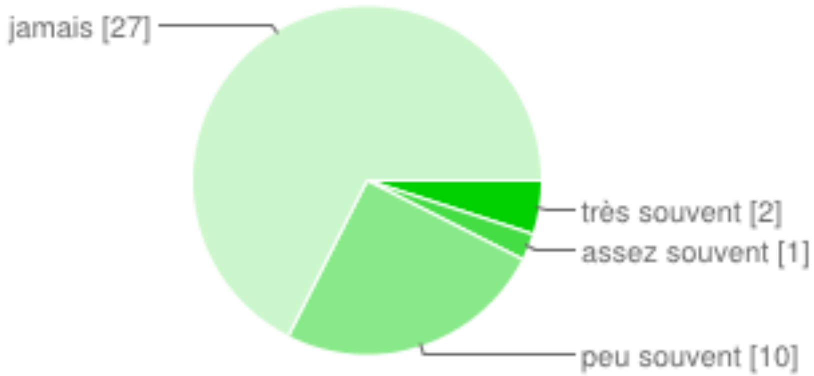
**Depuis le nouveau programme, je fais noter aux élèves une synthèse sur des notions de logique :**




| | | |
|---|---|---|
| très souvent | **2** | 5 % |
| assez souvent | **4** | 9 % |
| peu souvent | **23** | 53 % |
| jamais | **14** | 33 % |

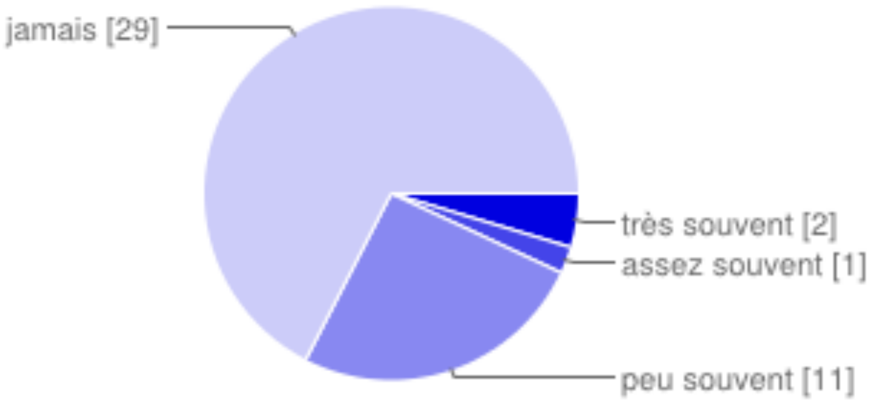
# Pratiques d'enseignants

**Avant le nouveau programme,je faisais un petit cours de logique :**




| | | |
|---|---|---|
| très souvent | 2 | 5 % |
| assez souvent | 1 | 3 % |
| peu souvent | 10 | 25 % |
| jamais | 27 | 68 % |

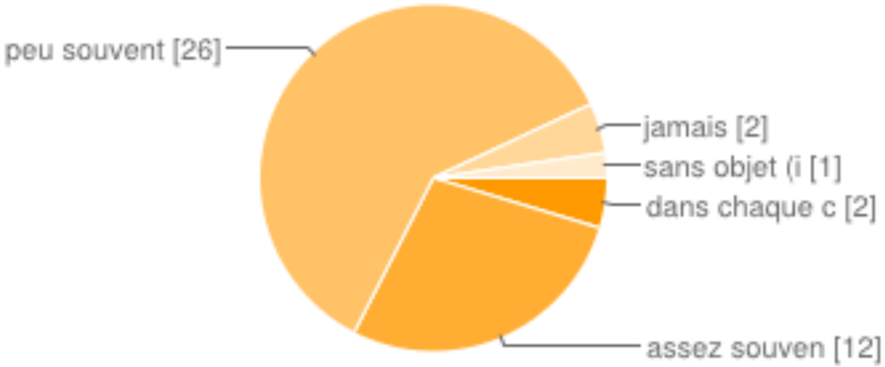
**Depuis le nouveau programme, je fais un petit cours de logique :**




| | | |
|---|---|---|
| très souvent | 2 | 5 % |
| assez souvent | 1 | 2 % |
| peu souvent | 11 | 26 % |
| jamais | 29 | 67 % |

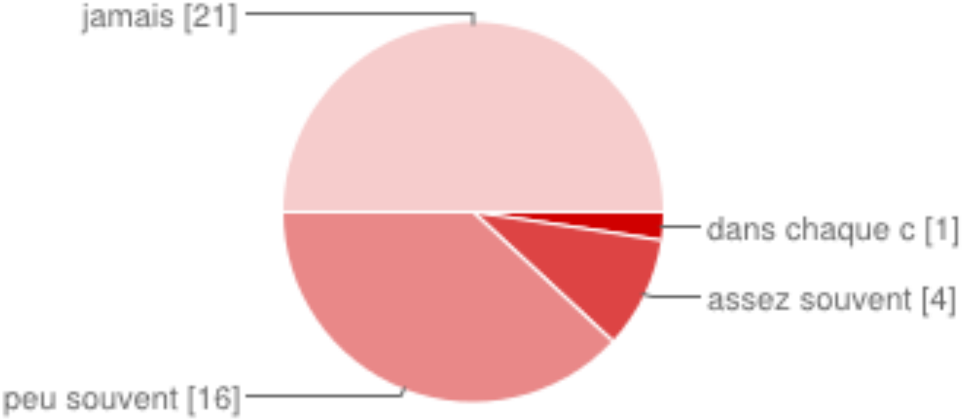
# Quelles modalités ?

**Je fais faire à mes élèves des exercices du manuel portant le logo « logique » :**




| | | |
|---|---|---|
| dans chaque chapitre | 2 | 5 % |
| assez souvent | 12 | 28 % |
| peu souvent | 26 | 60 % |
| jamais | 2 | 5 % |
| sans objet (il n'y en a pas c | 1 | 2 % |

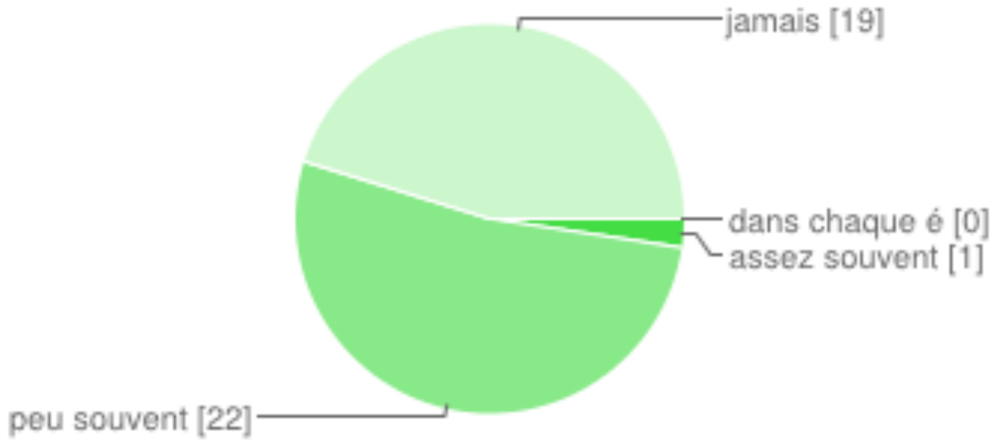
**Je rédige moi-même des exercices spécialement consacrés à la logique :**




| | | |
|---|---|---|
| dans chaque chapitre | 1 | 2 % |
| assez souvent | 4 | 10 % |
| peu souvent | 16 | 38 % |
| jamais | 21 | 50 % |

# Quelles modalités ?

**Il y a des questions portant spécifiquement sur des notions de logique dans mes évaluations :**




| | | |
|---|---|---|
| dans chaque évaluation | **0** | 0 % |
| assez souvent | **1** | 2 % |
| peu souvent | **22** | 52 % |
| jamais | **19** | 45 % |

**Estimez-vous que la logique mathématique doit faire partie de la formation des enseignants de**


| | | |
|---|---|---|
| oui | **39** | 98 % |
| non | **1** | 3 % |

# Evaluations

**EXERCICE 1** **5 POINTS**

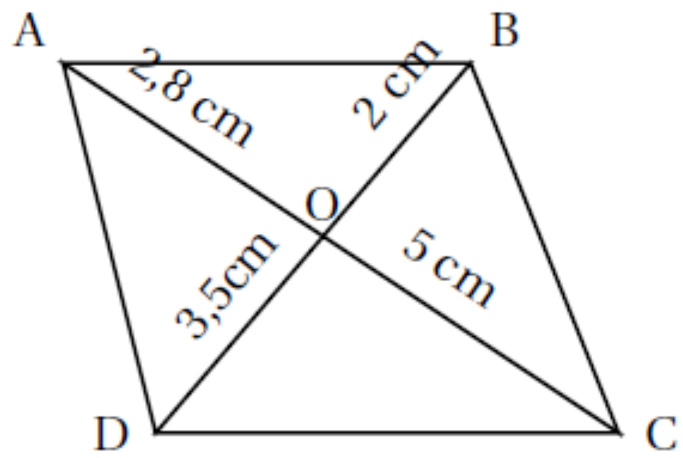
Quatre affirmations sont données ci-dessous :
Affirmation 1 : $\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$ est un nombre entier.

Affirmation 2 : 4 n'admet que deux diviseurs.

Affirmation 3 : Un cube, une pyramide à base carrée et un pavé droit totalisent 17 faces.

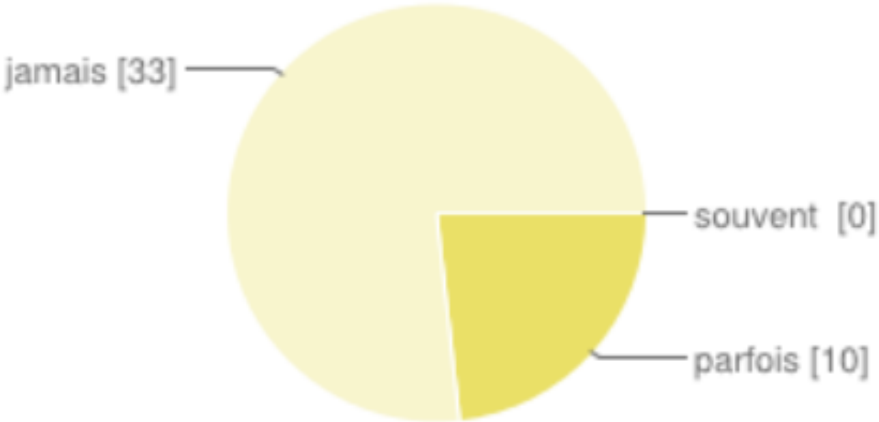
Affirmation 4 :

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.




*Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en argumentant la réponse.*

## Je travaille sur la logique en collaboration avec d'autres disciplines




| | | |
|---|---|---|
| souvent | **0** | 0 % |
| parfois | **10** | 23 % |
| jamais | **33** | 77 % |

# Progressions possibles

**Seconde :**
***Propositions ; Valeurs de vérité ; ou ; et ; négation ; implication ; quantificateurs***

**Première :**
**Construction de l'herbier des démonstrations**
***implication, disjonction des cas, contraposée…***

**Terminale :**
**Maîtrise des quantificateurs**
**Raisonnement par récurrence , équivalence, implication…**

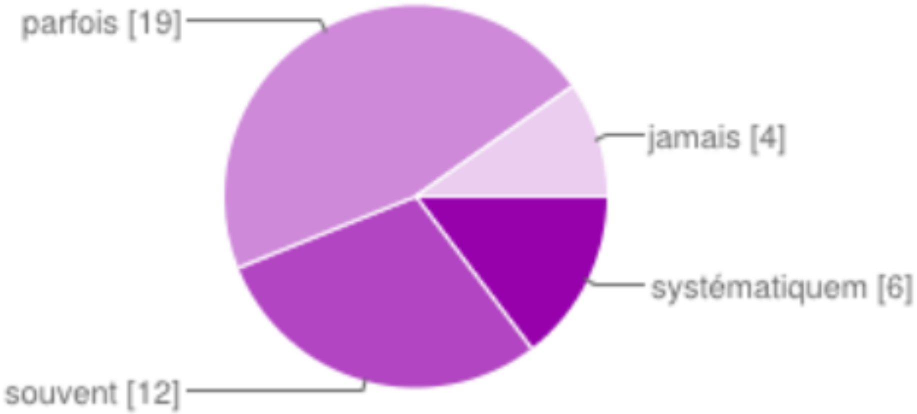
# Progressions possibles

Plutôt un degré d'acquisition différent suivant les niveaux que  des apprentissages nouveaux :

**Exemple : Contraposée :**
**•à (re)découvrir et à énoncer (seconde),**
**•utiliser une contraposée pour montrer un résultat, (première)**
**•démontrer en prenant l'initiative à l'aide d'une contraposée (terminale)**

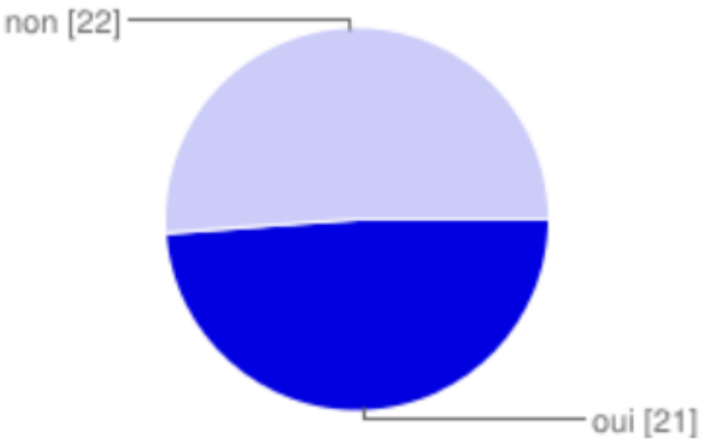
# Usage de la quantification

**La quantification explicite des énoncés me paraît nécessaire :**




| | | |
|---|---|---|
| systématiquement | **6** | 15 % |
| souvent | **12** | 29 % |
| parfois | **19** | 46 % |
| jamais | **4** | 10 % |

**J'utilise les symboles des quantificateurs :**




| | | |
|---|---|---|
| oui | **21** | 49 % |
| non | **22** | 51 % |

# Dans le supérieur

Beaucoup d'enseignants :

- qui ont eu un cours de logique en classe prépa
- qui font un cours de logique ou une synthèse au début de l'année

Les termes associés à l'expression "logique mathématique" :

- Règles
- Raisonnement
- Rigueur

Par rapport aux réponses du secondaire, la logique est à la fois vue comme un outil de l'activité mathématique et comme un objet d'enseignement.

# Dans le supérieur

- Les enseignants disent utiliser dans leur activité de recherche de manière implicite bon nombre de notions de logique (pas tiers-exclu, table de vérité, tautologie).
- Dans leur enseignement, ils disent utiliser la plupart mais pas toujours les définir.
- Sur les difficultés des étudiants qui posent problème :
  - sur la quantification
  - sur l'implication
  - sur les notions ensemblistes

# Cours Langage Mathématique

Proposé en L1, obligatoire pour les parcours Math/ Info/Math-Info, quelques étudiants de MASS.

<u>Plan du cours :</u>

- Chapitre 1 : généralités sur le langage : expressions mathématiques, statut des variables.
- Chapitre 2 : les connecteurs logiques (attention particulière portée à l'implication).
- Chapitre 3 : les quantificateurs (avec aussi il existe au plus, il existe au moins…)
- Chapitre 4 : les raisonnements (introduction, élimination des connecteurs et des quantificateurs vu sous l'angle démonstrateur/utilisateur).
- Chapitre 5 : langage ensembliste.

En ligne : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/logique/

**Exercice 3.**

(a) La borne inférieure d'un ensemble est, s'il existe, le plus grand des minorants de cet ensemble. Montrer que l'énoncé "Le réel $m$ est la borne inférieure de la partie $A$" (la variable $m$ est astreinte à $\mathbb{R}$ et la variable $A$ est astreinte à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$) est équivalent à :

$$(\forall x \in A \quad m \leqslant x) \ \wedge \ (\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in A \quad m \leqslant x < m + \varepsilon).$$

(b) $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne inférieure (c'est-à-dire que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure). À l'aide de cette propriété, montrer que toute suite décroissante minorée de réels converge.

# Exercice $f$ et $f'$

(version élèves puis version distribuée à atelier à la fin du diaporama)

## REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE *f ET* f’

A vous :
Compléter le tableau
Chercher des relations entre les propositions 2, 3 et 4.

| Propositions | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de réponses sur 28 | | | | | | |
| exactes | 21 | 22 | 25 | 22 | 21 | 14 |
| fausses | 1 | | 3 | 6 | 6 | 10 |
| absentes | 6 | 6 | | | 1 | 3 |

## Pascaline

$f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$

| $f \leq g$ | $f' \leq g'$ | Prop 1 | Prop 2 | Prop 3 | Prop 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | V | V | F | F |

Prop 1 : pour $x = 0$, on a $\underset{0\ <\ 2}{f(0) \leq g(0)}$ et $\underset{0\ <\ 1}{f'(0) \leq g'(0)}$

Prop 2 : pour $x = 1$, on a $\underset{1\ \leq\ 3}{f(1) \leq g(1)}$ et $\underset{2\ >\ 1}{f'(1) > g'(1)}$

Prop 3 : Négat° : (Il existe un réel $x$ tel que $\underset{\text{sur } [-1;2]}{f(x) \leq g(x)}$ et $\underset{x = 1}{f'(x) > g'(x)}$ → Vraie, donc Prop 3 fausse)

→ fausse car prop 2 : négat° 3

Terminale S Prop 4 Négat° : Pour $\forall x$ de $I$, $f(x) \leq g'(x)$ et il existe $x$ de $I$, $f(x) > g'(x)$ 2012-2013

→ Vraie pour $x = 1$ car ex.

## Gautier

| $f(x) = x^2$<br>$g(x) = x + 2$. | Prop 1<br>V par $x = 0$ | Prop 2.<br>V par $x = 1$ | Prop 3.<br>F car la negation (prop 2) est Vraie |
|---|---|---|---|

Prop 4.

V car non P mais Q.

Lise

$f(x) = x^2$ et $g(x) = x+2$

$\mathbb{R}$ $f \leq g$ → Faux car $f \leq g$ sur $[-1;2]$ et $f \geq g$ sur $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$

$f' \leq g'$ → Faux car $f' \leq g'$ sur $]-\infty;0,5]$ et $f' \geq g'$ sur $[0,5;+\infty[$.

Prop 1 → Vrai pour $a = 0,2$

Prop 2 → Vrai pour $a = 1$

Prop 3 → Faux car la négation est vraie (prop 2)

Terminale S

Prop 4 → Faux car pour tt réel $x$ de $I$, $f(x) \leq g(x)$ et il existe $x$ de $I$ tel que $f'(x) \geq g'(x)$

$x = 1$ par exemple

Elodie

$f(x) = x^2$ et $g(x) = x+2$

$f \leq g$ Faux

$f' \leq g'$ Faux

Prop 1 : Vrai car il existe un réel $a$, par exemple 0 où $f(0) < g(0)$ et $f'(0) < g'(0)$

Prop 2 : Vrai " " " par exemple 1 où $f(1) < g(1)$ et $f'(1) > g'(1)$

Prop 3 : Faux car il existe un réel où $f' > g'$ comme par exemple 1.

Prop 4 : Vrai car la négat° est Fausse puisque pour tout $x$ de $I$ $f(x) \leq g(x)$ et que $f'$ n'est pas supérieur à $g'$ donc faux

Donc la proposit° est Vrai

$f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$
rouge — bleu

**$P_1$** : $f(a) \leq g(a)$ sur $[-1;2]$
$f'(a) \leq g'(a)$ sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$
Donc VRAI pour 0,5 par exple.

**$P_2$** : $f(a) \leq g(a)$ sur $[-1;2]$
$f'(a) > g'(a)$ sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$
donc VRAI pour 1 par ex.

**$P_3$** : négat$^{\circ}$ $= P_2$ or $P_2$ VRAI
donc $P_3$ FAUX

**$P_4$** : négat$^{\circ}$ = pour tout $x$ de I, $f(x) \leq g(x)$ et il existe $x$ de I tq $f'(x) > g'(x)$
$f(x) \leq g(x)$ UNIQT SUR $[-1;2]$ et pas pour tout $x$ de I.
Négat$^{\circ}$ fausse → $P_4$ VRAIE

Coline

Lucas

① $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$

**$P_1$** Vrai car sur l'intervalle $]-1;0]$
$f(x) \leq g(x)$ et $f'(x) \leq g'(x)$

**$P_2$** Vrai car sur l'intervalle $[1;2[$
$f(x) \leq g(x)$ et $f'(x) \geq g'(x)$

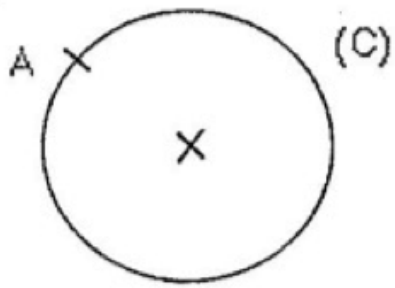
**$P_3$** Faux car il existe un réel $x$ tel que $f(x) \leq g(x)$ et $f'(x) \geq g'(x)$
par exemple pour $x = 1,2$

**$P_4$** Vrai car c'est faux que pour tout réel ~~de~~ $x$ de I, $f(x) \leq g(x)$

Brochure IREM de Rennes

"Apprentissage des structures logiques", 2000

http://www.irem.univ-rennes1.fr/publications/doc_irem/catalogue/catal_5.html

| | | VRAI | FAUX | AUTRE |
|---|---|---|---|---|
| 1) | Si $(x-1)(x-2)=0$ alors $x=1$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 2) | Si $x=1$ alors $(x-1)(x-2)=0$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 3) | Si la droite (D) a pour équation $y=2x-7$ alors (D) passe par le point $A(5\ ;\ 3)$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 4) | Si la droite (D) passe par le point $A(5\ ;\ 3)$ alors (D) a pour équation $y=2x-7$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 5) | La condition $x^2=4$ entraîne $x=2$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 6) | Si $x=2$ alors $x^2=4$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 7) | Si $x<2$ alors $x^2<4$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 8) | La condition $x^2<4$ entraîne la condition $x<2$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 9) | MA = MB entraîne que M est le milieu de [AB] | ☐ | ☐ | ☐ |
| 10) | Si A, B et C sont alignés alors AC + CB = AB | ☐ | ☐ | ☐ |
| | On considère la figure suivante où A est un point du cercle C de rayon r.   | | | |
| 11) | Si AM = 2r alors M appartient au cercle (C) | ☐ | ☐ | ☐ |
| 12) | Si AM = 2r alors M n'appartient pas au cercle (C) | ☐ | ☐ | ☐ |

| | 1) | 2) | 3) | 4) | 5) | 6) | 7) | 8) | 9) | 10) | 11) | 12) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **VRAI** | 11 | 20 | 24 | 5 | 13 | 29 | 16 | 21 | 14 | 12 | 17 | 10 |
| **FAUX** | 6 | 8 | 3 | 14 | 7 | 1 | 13 | 9 | 16 | 16 | 10 | 14 |
| **AUTRE** | 19 | 2 | 3 | 15 | 12 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 15 | 15 |
| *Total* | *36* | *30* | *30* | *34* | *32* | *30* | *30* | *32* | *33* | *31* | *42* | *39* |

Nombre total de copies : 30

1$^{er}$ paquet de questions : 2), 3), 6) et 8)

2$^{ème}$ paquet : 7), 9) et 10)

3$^{ème}$ paquet : 1), 4), 5), 11) et 12)

Extrait 1

[ Question 5 du questionnaire ] 1803
[ « La condition $x^2=4$ entraine $x=2$ » ]

(...)

- <u>Lucille :</u> oui mais ça montre quand-même que c'est pas vrai ou faux, c'est pas blanc ou noir. C'est un peu entre les deux. Il manque quelque chose mais dans le fond c'est un peu vrai. C'est pas complètement faux (...)
- <u>Hugo :</u> En fait, moi ça me fait penser : qu'est-ce que c'est que ce soit vrai, qu'est-ce que c'est que ce soit faux ? Est-ce que c'est vrai parce que c'est pas faux ? ou est-ce que c'est faux parce que c'est pas vrai ? ou est ce que c'est vrai parce que y'a rien où c'est faux ?
- <u>Élèves :</u> Oh là là !...
- <u>Hugo :</u> parce que ceux qui disent que c'est vrai parce que c'est pas toujours faux, ben j'suis désolé mais là, euh ... ça marche pas parce que y'a quelque chose qu'est faux donc c'est pas toujours vrai. Je sais pas (...)

Extrait 2 [ Débat général en fin de séance ] 

- <u>Christophe à Hugo :</u> il y a quelque chose qui a été dit tout à l'heure, il suffisait d'un contre-exemple pour montrer que quelque chose était faux, c'est que…
- <u>Hugo :</u> donc c'est faux parce que c'est pas toujours vrai. Est-ce que cette phrase c'est vrai ?
- <u>Emmanuelle :</u> si je vous dis (...) que tout rectangle est un carré, vous me dites quoi ?
- <u>Élèves :</u> non . Faux (...)
- <u>Emmanuelle :</u> tout nombre réel est pair
- <u>Élèves :</u> faux / C'est vrai / des fois mais c'est faux /
- <u>Christophe / Emmanuelle :</u> pourtant il y a des nombres réels qui sont pairs / il faut bien décider / C'est faux
- <u>Jeanne :</u> vous dites tout, alors que eux à aucun moment ils ont dit tout
- <u>Christophe :</u> ça c'est vrai

- <u>Lucille :</u> Vous avez dit (...) Vous dites tous, enfin, vous dites clairement que c'est tous, tous les réels, du coup c'est faux parce que tous les réels ne sont pas pairs, mais eux ils disent jamais...

- <u>Hugo :</u> mais en maths on sait bien que ça veut dire tout

- <u>Lucille :</u> mais là, ils disent pas tous tout le temps, c'est pas clair.

- <u>Xxx :</u> il manque des conditions (...)

- <u>Emmanuelle :</u> D'où l'importance ? d'écrire si c'est pour tout machin ou pas, c'est ça ?

- <u>Christophe :</u> et si on écrivait pour tout devant les phrases (...)

- <u>Xxx :</u> Mais du coup si on met pour tous ça va être faux.

- <u>Christophe :</u> si on dit pour tout x la condition $x^2=4$ entraine $x=2$

- <u>Élèves :</u> c'est faux !

- <u>Lucille :</u> du coup ce sera faux mais c'est parce qu'on a mis pour tout, si on ne met pas le pour tout c'est pas faux

- <u>Christophe :</u> et pour tout point $M$, $MA=MB$ entraine que $M$ milieu de $[AB]$

- <u>Élèves :</u> c'est faux / là c'est faux / parce que là, voilà, c'est une certitude

# Sur l'implication

Les élèves sont entraînés, sur des exemples, à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciroque, sa contraposée et sa négation.

# 2 L'implication : si..., alors...

Le mot **proposition** désigne, à notre niveau, une phrase **qui est soit vraie, soit fausse.**
Une proposition sera notée (P) ou notée (Q).

## 2.1 Un exemple pour comprendre

La proposition « **Si** ABC est un triangle isocèle en A, **alors** AB= AC **» est une implication.**
Elle affirme ceci :

s'il est vrai que le triangle ABC est isocèle en A, **alors il est vrai que AB = AC.**

Autrement dit, lorsque la proposition (P) : « **ABC est un triangle isocèle en A » est vraie, alors la** proposition (Q) : « Dans le triangle ABC, AB = AC » **est vraie aussi.**

On dit alors que **l'hypothèse** (P) **implique la conclusion (Q).**
Ce qui se traduit par **Si** (P), **alors** (Q) ou aussi par **(P) donc (Q) ou encore par (P) $\Rightarrow$ (Q).**

**Exercice 1 :**

**1.** Dans chacun des cas comparer, sur l'intervalle donné, les fonctions $f$ et $g$ puis les fonctions $f'$ et $g'$.

| $I$ | $f(x)$ | $g(x)$ | Comparer $f$ et $g$ sur $I$ | Comparer $f'$ et $g'$ sur $I$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $e^x$ | $e^{x+1}$ | $f \leqslant g$ | $f' \leqslant g'$ |
| $\mathbb{R}$ | $x$ | $e^x$ | $f \leqslant g$ | $f' \geqslant g'$sur $]-\infty;0]$, $f' \leqslant g'$ sur $[0;+\infty[$ |
| $]0;+\infty[$ | $ln(x)$ | $x$ | $f \leqslant g$ | $f' \geqslant g'$sur $]0;1]$, $f' \leqslant g'$ sur $[1;+\infty[$ |
| $\mathbb{R}$ | $x^2$ | $x^2+2x$ | $f \leqslant g$ sur $[0;+\infty[$, $f \geqslant g$ sur $]-\infty;0]$ | $f' \leqslant g'$ |

**2. Vrai ou faux ?**
Pour chacune des propositions suivantes dire si elle est vraie ou fausse en justifiant les réponses.
Proposition 1 : "Il existe un réel $a$ de $I$ tel que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f'(a) \leqslant g'(a)$."
Proposition 2 : "Il existe un réel $a$ de $I$ tel que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f'(a) > g'(a)$."
Proposition 3 : "Pour tout réel $x$ de $I$, $(f(x) \leqslant g(x) \Longrightarrow f'(x) \leqslant g'(x))$."
Proposition 4 : "(Pour tout réel $x$ de $I$, $f(x) \leqslant g(x)) \Longrightarrow$ (Pour tout réel $x$ de $I$ , $f'(x) \leqslant g'(x)$)"

Résumer les réponses obtenues en complétant le tableau ci-dessous par **V** si la proposition est vraie et **F** si la proposition est fausse.

| $I$ | $f(x)$ | $g(x)$ | $f \leqslant g$ | $f' \leqslant g'$ | Prop 1 | Prop 2 | Prop 3 | Prop 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $e^x$ | $e^{x+1}$ | **V** | ... | ... | ... | ... | ... |
| $\mathbb{R}$ | $x$ | $e^x$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $]0;+\infty[$ | $ln(x)$ | $x$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $\mathbb{R}$ | $x^2$ | $x^2+2x$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

**3.** Proposer un intervalle I sur lequel la proposition 3 est vraie.

**Exercice 2 :**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions telles que $f(0) < g(0)$ et $f(1) < g(1)$.
Les fonctions $f$ et $g$ sont décroissantes sur l'intervalle $[0;1]$.
Peut-on affirmer que $f \leqslant g$ ?