

Intégrale et mesure des grandeurs, leurs rapports à travers des situations physiques

La place des Maths dans les nouveaux programmes de Physique du lycée

Marc Rogalski (IREM de Paris, CI2 Université, Laboratoire de Didactique André Revuz)

Anne Amandine Decroix (IUFM Nord Pas de Calais, Laboratoire de Didactique André Revuz)



Rappel du préambule du programme de 1^{ère} S

Au cycle terminal de la série S, les élèves ayant fait le choix d'une orientation scientifique, le programme a pour ambition de développer leur vocation pour la science et de les préparer à des études scientifiques post-baccalauréat.

L'enseignement des sciences physiques et chimiques de la série S n'est pas tourné en premier lieu vers la discipline, mais vers les élèves.
« la discipline au service des compétences et des appétences de science »

Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011

Dans le prolongement du programme de première S, le programme de terminale S doit permettre :

- d'approfondir la formation à la démarche scientifique
- de mieux installer et de compléter les compétences déjà rencontrées
- de faire acquérir des connaissances nouvelles

Deux compétences occupent une place centrale en terminale : « **extraire** » et « **exploiter** » **des informations**

Elles doivent être mises en œuvre fréquemment, en **respectant l'esprit de la démarche scientifique.**



Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011

Les programmes de terminale de la série scientifique comme ceux de première s'articulent autour des grandes phases de la démarche scientifique :

Observer, Comprendre, Agir

et s'appuient sur des entrées porteuses et modernes introduites à partir de questionnements

Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011

Dans le BO, le programme est présenté en deux colonnes intitulées :

- Notions et contenus : il s'agit des concepts à étudier
- Compétences exigibles : il s'agit de connaissances à mobiliser, de capacités à mettre en œuvre et d'attitudes à acquérir

2nde colonne du BO : Compétences exigibles

Compétences	Nb de fois où elles sont citées
Extraire et exploiter des informations sur :	18
Pratiquer une démarche expérimentale Mettre en œuvre une démarche expérimentale	18
Réaliser ou mettre en œuvre un protocole expérimental ou élaborer et réaliser un protocole	5
Connaître	4
Exploiter	4
Connaître et exploiter	7



Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011

L'exploitation sera conduite en passant par l'étape d'identification des grandeurs physiques ou chimiques pertinentes et par celle de modélisation. Cette formalisation pourra conduire à l'établissement des équations du modèle puis à leur traitement mathématique, numérique ou graphique.

L'élève est ainsi amené à raisonner avec méthode et à mettre en œuvre avec rigueur l'ensemble des étapes qui lui permettent de trouver la ou les solution(s) au problème posé. Le professeur aura cependant à l'esprit que le recours à des outils mathématiques n'est pas le but premier de la formation de l'élève en physique-chimie, même si cela peut être parfois nécessaire pour conduire une étude à son terme. Dans certains cas, le professeur utilisera des méthodes de résolutions graphique ou numérique, pratiques de plus en plus fréquentes en raison de la complexité des systèmes étudiés.



Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011

Le professeur fera aussi appel à des exploitations qualitatives conduites avec rigueur.

Familiariser ainsi l'élève à pratiquer des raisonnements qualitatifs, à savoir faire de la physique et de la chimie « avec les mains », c'est aussi l'habituer à savoir communiquer en tant que scientifique avec des non scientifiques.

Comme pour la première S, une rédaction volontairement allégée des contenus, notions et compétences a été privilégiée.



Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011

- Lorsque les compétences sont de nature expérimentale, leur acquisition est indissociable d'une pratique pédagogique dans des conditions indispensables à une activité expérimentale de chaque élève authentique et sûre, ce qui intègre dès la classe de première des **compétences liées à la précision et aux incertitudes des mesures**

Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011

Notions et contenus	Compétences expérimentales exigibles
Erreurs et notions associées	Identifier les différentes sources d'erreur (de limites à la précision) lors d'une mesure : variabilités du phénomène et de l'acte de mesure (facteurs liés à l'opérateur, aux instruments, etc.).
Incertitudes et notions associées	Évaluer et comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreur. Évaluer l'incertitude de répétabilité à l'aide d'une formule d'évaluation fournie. Évaluer l'incertitude d'une mesure unique obtenue à l'aide d'un instrument de mesure. Évaluer, à l'aide d'une formule fournie, l'incertitude d'une mesure obtenue lors de la réalisation d'un protocole dans lequel interviennent plusieurs sources d'erreurs.
Expression et acceptabilité du résultat	Maîtriser l'usage des chiffres significatifs et l'écriture scientifique. Associer l'incertitude à cette écriture. Exprimer le résultat d'une opération de mesure par une valeur issue éventuellement d'une moyenne et une incertitude de mesure associée à un niveau de confiance. Évaluer la précision relative. Déterminer les mesures à conserver en fonction d'un critère donné. Commenter le résultat d'une opération de mesure en le comparant à une valeur de référence. Faire des propositions pour améliorer la démarche.

En résumé :

Par rapport à l'ancien programme :

- la partie « connaissances exigibles » est diminuée et remplacée par davantage de « compétences ou de capacités exigibles », notamment de recherche d'informations scientifiques (avec la compétence « **extraire et exploiter des informations** ») ;
- le programme donne **une vision plus « moderne » de la physique et de la chimie** (détecteur de particules, spectres RMN, etc.) au détriment de l'enseignement de l'électricité notamment ;
- il y a **moins de modélisation** demandée et **moins de recours à l'outil mathématique** ;
- la radioactivité est maintenant vue en Première (de façon plus qualitative) ;
- Place importante donnée à la précision et aux incertitudes de mesures

Intégrale et mesure des grandeurs, leurs rapports à travers des situations physiques

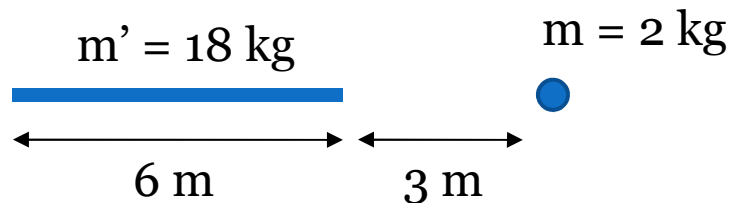
Exemple 1 : Force gravitationnelle
entre une barre et une masse
ponctuelle

Présentation du problème

Déterminer la norme de la force d'attraction F entre une masse ponctuelle m de 2 kg et une barre fine de 6 mètres de long et de masse m' égale à 18 kg dans la disposition suivante

On rappelle la relation suivante : $F = G \frac{m \cdot m'}{r^2}$

G: Constante de gravitation: $G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$



vous essayerez de prévoir ce que feraient des élèves qui n'ont pas encore vu l'intégrale, avec leurs connaissances de physique de terminale S

Place dans les programmes

PROGRAMME DE PHYSIQUE - CHIMIE EN CLASSE DE SECONDE GÉNÉRALE ET TECHNOLOGIQUE (2010)

L'UNIVERS

L'Homme a de tout temps observé les astres afin de se situer dans l'Univers. L'analyse de la lumière émise par les étoiles lui a permis d'en connaître la composition ainsi que celle de leur atmosphère et de la matière interstellaire. L'étude du mouvement des planètes autour du Soleil l'a conduit à la loi de gravitation universelle.

Il apparaît ainsi que le monde matériel présente une unité structurale fondée sur l'universalité des atomes et des lois.

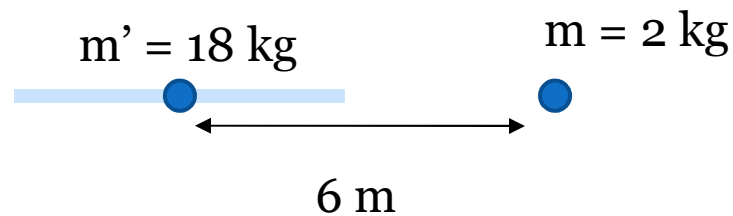
NOTIONS ET CONTENUS	COMPÉTENCES ATTENDUES
La gravitation universelle. L'interaction gravitationnelle entre deux corps. La pesanteur terrestre.	Calculer la force d'attraction gravitationnelle qui s'exerce entre deux corps à répartition sphérique de masse.



3 méthodes envisageables :

- Règle du centre de gravité, puis principe de découpage
- Principe d'encadrement
- Intégrale

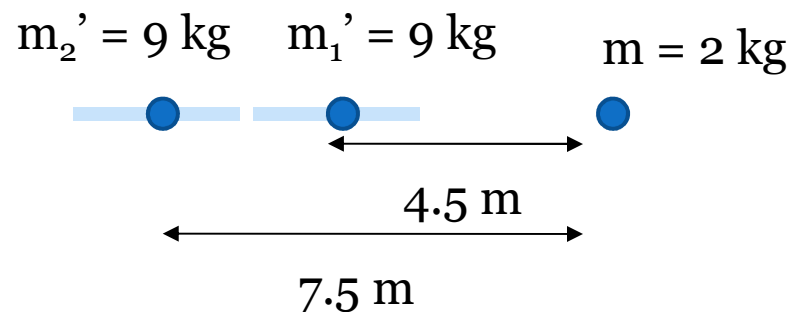
1^{ère} méthode : on assimile la barre à un point ponctuel situé en son centre de masse



On a donc deux masses ponctuelles de masses 18 kg et 2 kg distantes de 6 m.

$$F = G \frac{m \cdot m'}{r^2} = G \frac{2 * 18}{6^2} = G$$

Découpage de la barre en 2 en appliquant toujours la règle du centre de gravité

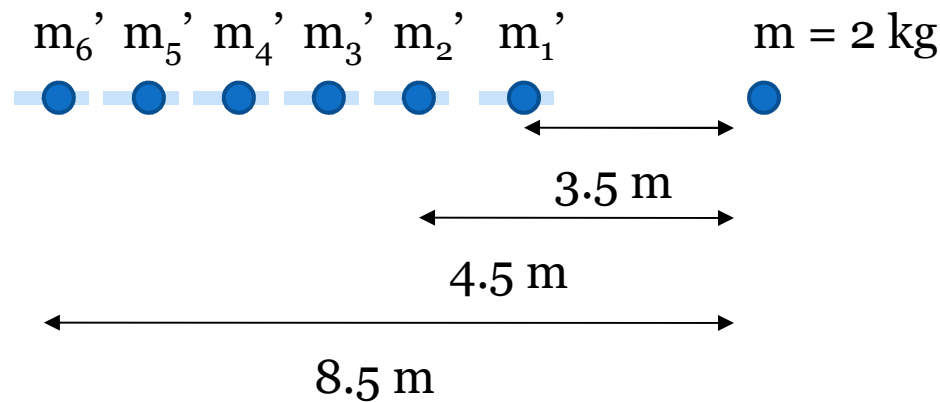


$$F = G \frac{m \cdot m_1'}{r_1^2} + G \frac{m \cdot m_2'}{r_2^2} = G \left[\frac{2 \cdot 9}{4.5^2} + \frac{2 \cdot 9}{7.5^2} \right] = \frac{272}{225} G \approx 1.21G$$

Valeur différente de celle obtenue en assimilant la barre à un point ponctuel situé en son centre de masse

Découpage de la barre en 6 en appliquant toujours la règle du centre de gravité

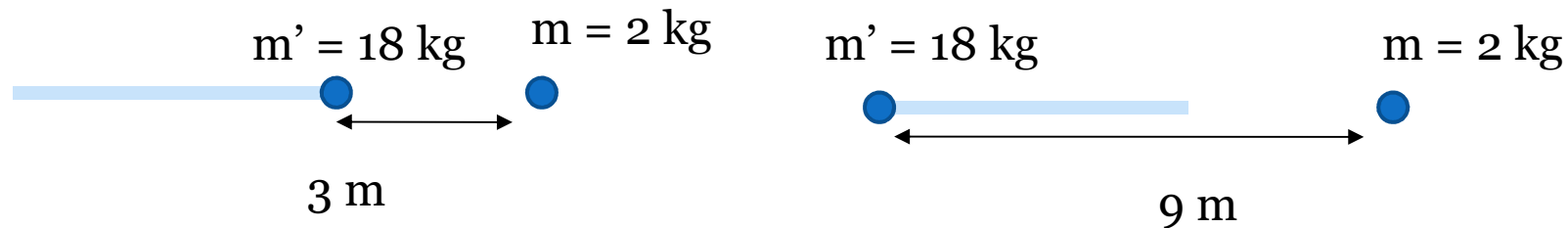
$$m_1' = m_2' = m_3' = m_4' = m_5' = m_6' = 3 \text{ kg}$$



$$F = G \frac{m \cdot m_1'}{r_1^2} + G \frac{m \cdot m_2'}{r_2^2} + \dots + G \frac{m \cdot m_6'}{r_6^2} = G \left[\frac{2 * 3}{3.5^2} + \frac{2 * 3}{4.5^2} + \dots + \frac{2 * 3}{8.5^2} \right] \approx 1.32G$$

Valeur différente de celles obtenues en assimilant la barre à un point ponctuel situé en son centre de masse et en découpant la barre en 2

Articuler le principe du découpage avec celui de l'encadrement



La force dépend de la distance, la valeur exacte se situe donc entre ces deux cas extrêmes

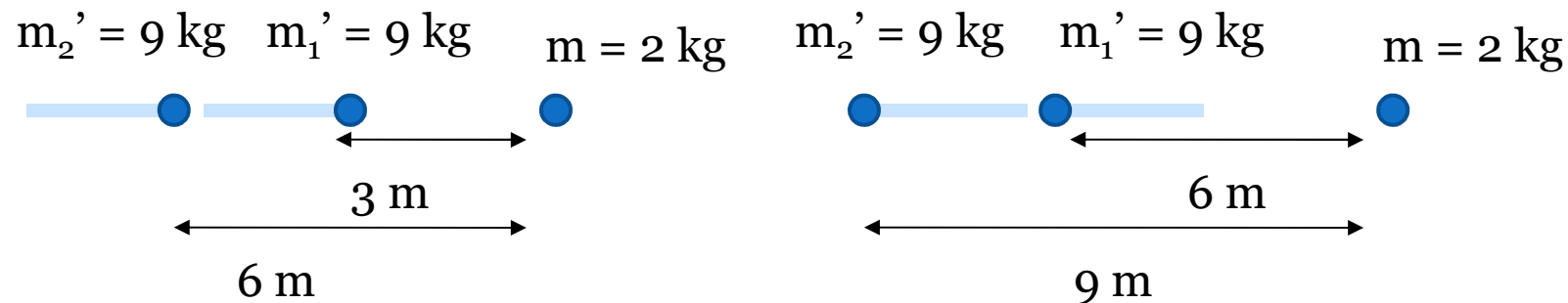
$$F_+ = G \frac{m \cdot m'}{r^2} = G \frac{2 * 18}{3^2} = 4G$$

$$F_- = G \frac{m \cdot m'}{r^2} = G \frac{2 * 18}{9^2} = \frac{4}{9}G$$

On a donc $F_- < F < F_+ \rightarrow \frac{4}{9} G < F < 4 G \rightarrow 0.44 G < F < 4 G$

Articuler le principe du découpage avec celui de l'encadrement

On coupe la barre en 2 et on refait des majorations et des minorations



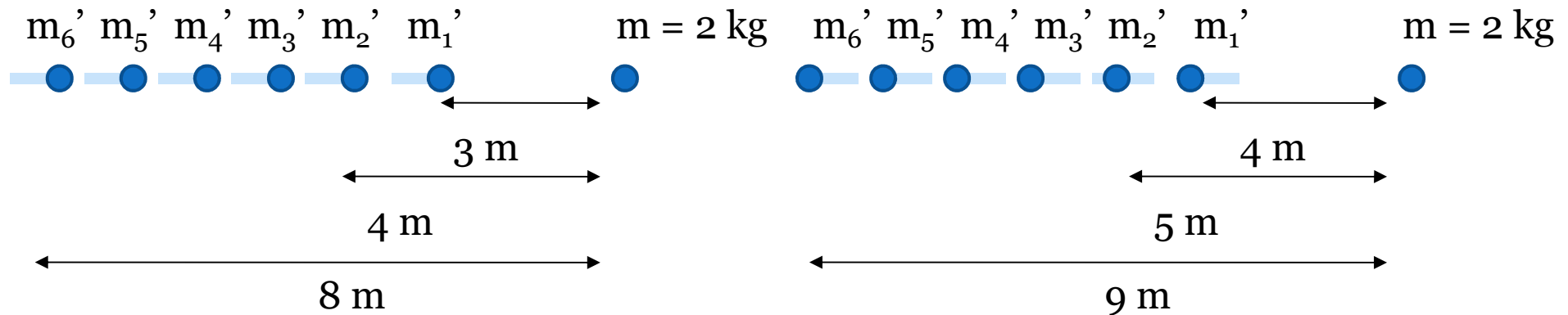
$$F_+ = G \frac{m \cdot m_1'}{r_1^2} + G \frac{m \cdot m_2'}{r_2^2} = G \left[\frac{2 \cdot 9}{3^2} + \frac{2 \cdot 9}{6^2} \right] = \frac{5}{2} G$$

$$F_- = G \frac{m \cdot m_1'}{r_1^2} + G \frac{m \cdot m_2'}{r_2^2} = G \left[\frac{2 \cdot 9}{6^2} + \frac{2 \cdot 9}{9^2} \right] = \frac{13}{18} G$$

On a donc $F_- < F < F_+ \rightarrow 13/18 G < F < 5/2 G \rightarrow 0.72 G < F < 2.5 G$

Articuler le principe du découpage avec celui de l'encadrement

$$m_1' = m_2' = m_3' = m_4' = m_5' = m_6' = 3 \text{ kg}$$



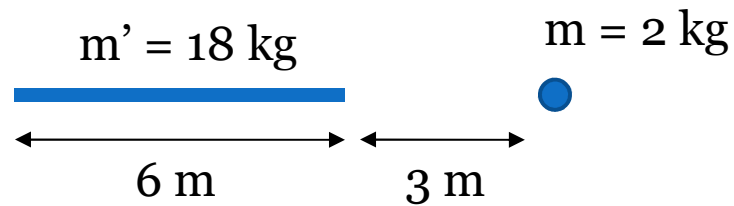
$$F_+ = G \frac{m \cdot m_1'}{r_1^2} + G \frac{m \cdot m_2'}{r_2^2} + \dots + G \frac{m \cdot m_6'}{r_6^2} = G \left[\frac{2 \cdot 3}{3^2} + \frac{2 \cdot 3}{4^2} + \dots + \frac{2 \cdot 3}{8^2} \right] \approx 1.66G$$

$$F_- = G \frac{m \cdot m_1'}{r_1^2} + G \frac{m \cdot m_2'}{r_2^2} + \dots + G \frac{m \cdot m_6'}{r_6^2} = G \left[\frac{2 \cdot 3}{4^2} + \frac{2 \cdot 3}{45^2} + \dots + \frac{2 \cdot 3}{9^2} \right] \approx 1.07G$$

On a donc $F_- < F < F_+ \rightarrow 1.07 G < F < 1.66 G$

Avec une Intégrale

- La barre a une masse linéaire de 3kg.m^{-1}



$$F = \int_3^9 G \frac{m \cdot m_l'}{r^2} dr = \int_3^9 G \frac{2 \cdot 3}{r^2} dr = \int_3^9 6G \frac{1}{r^2} dr = -6G \left[\frac{1}{r} \right]_3^9 = 6G \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right] = \frac{4}{3} G$$

On trouve $F = \frac{4}{3} G$



Lyon CIIU, CIIL, CIISP

Mai 2013

L'intégrale, de la physique aux mathématiques

Anne-Amandine Decroix, Marc Rogalski

Laboratoire de Didactique André Revuz

La mesure des grandeurs produits en physique.

Formules usuelles valables quand les premiers facteurs sont constants :

densité constante \times volume = masse ;

hauteur constante \times longueur de la base = aire ;

hauteur constante \times aire de la base = volume ;

vitesse constante \times temps = distance parcourue ;

force constante \times déplacement (colinéaire) = travail ;

pression constante \times surface plane = force ;

(distance constante à un axe)² \times masse ponctuelle =
moment d'inertie ;

(inverse de distance constante)² \times produit des masses
ponctuelles = attraction.

Certaines de ces formules, en fait, définissent une **grandeur physique “produit”** à partir d’autres quand les premiers facteurs sont constants.

D’autres cherchent à calculer de telles grandeurs produits à partir d’une formule d’une théorie physique.

Généralisons : les deuxièmes facteurs sont associés à des “domaines” Ω sur lesquels sont définis les premiers facteurs, *supposés maintenant être des fonctions f non constantes* : densité ou pression en un point d’un volume Ω , hauteur au-dessus d’un point de la base Ω , pression en un point d’une surface Ω , distance d’un point de Ω à l’axe, etc ...

De plus on peut définir la *mesure* $m(A)$ d'une partie A de Ω , ou du moins d'une classe de parties de Ω : aire, volume, masse, distance parcourue, temps entre deux instants, sont supposés définis pour ces parties de Ω .

On se propose donc de *savoir à quelles conditions on peut mesurer, ou même définir une grandeur $I(\Omega, f)$ ou $\int_{\Omega} f dm$ attachée à une grandeur physique décrite par le domaine Ω avec la mesure m et la fonction f .*

Les conditions raisonnables pour parler de la grandeur cherchée sont **les 3 principes** qui suivent, issus de considérations physiques ; le premier renvoie à la définition du type de grandeur étudiée, les deux autres en sont des propriétés, dont le sens est immédiat sur les exemples cités :

(1) si f est constante ($f = C$), $I(\Omega, f) = C \times \text{mesure}(\Omega)$ [les formules ci-dessus !] ;

(2) l'additivité par rapport au domaine (une “relation de Chasles”) : si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\Omega_1 \cap \Omega_2$ de mesure nulle (par exemple vide), alors $I(\Omega, f) = I(\Omega_1, f) + I(\Omega_2, f)$;

(3) la croissance : si $f \leq g$, $I(\Omega, f) \leq I(\Omega, g)$.

Pour calculer une grandeur de la forme $I(\Omega, f)$ vérifiant les principes (1), (2), (3) :

* on découpe l'ensemble Ω en un nombre *fini* de “petits” morceaux Ω_i ;

* on encadre la fonction f entre m_i et M_i sur Ω_i (par exemple par ses bornes inférieures et supérieures sur l'ensemble Ω_i) ;

* par sommation, on peut encadrer $I(\Omega, f)$ par des “sommes inférieures” et “supérieures” :

$$s = \sum_i m_i m(\Omega_i) \quad \text{et} \quad S = \sum_i M_i m(\Omega_i);$$

* enfin, on essaie de passer à la limite en prenant des Ω_i de plus en plus petits.

La **procédure intégrale** est donc formée de ces 4 étapes :

**découpage, encadrement, sommation,
passage à la limite.**

Cette procédure amène ainsi à encadrer $I(\Omega, f)$ entre $\sum_i m_i m(\Omega_i)$ et $\sum_i M_i m(\Omega_i)$, avec des Ω_i disjoints (ou d'intersections de mesure nulle).

On obtient ainsi ce qu'on appelle *l'intégrale des fonctions "en escalier"* $\sum \lambda_i 1_{\Omega_i}$, et on souhaite passer à la limite pour obtenir l'intégrale d'autres fonctions, par exemple de fonctions continues ... si cela marche !

Mathématiquement, il faut préciser un peu plus la nature des ensembles Ω_i et la nature de leur mesure, d'une part, et quel type de limite on souhaite prendre, de l'autre.

En se bornant au cas $\Omega = [a, b]$, seul envisageable en terminale S et en L1, on a deux choix “raisonnables” pour chacune de ces deux questions :

(a1) les Ω_i sont des *intervalles*, et leur mesure est leur *longueur* ;

(a2) les Ω_i sont les éléments d'une *tribu*, avec pour mesure la *mesure de Lebesgue* ;

(b1) l'approximation se fait en *approchant uniformément* f par des fonctions en escalier (on prend une condition de Cauchy pour la norme uniforme, en supposant f bornée) ;

(b2) l'approximation se fait *directement au moyen de l'intégrale* (la condition de Cauchy dit que l'intégrale d'une certaine fonction en escalier doit être petite).

En recoupant ces deux choix, et en abandonnant dans le premier et le quatrième cas la condition d'encadrement, qui n'est plus utile, on trouve alors 4 théories classiques de l'intégration :

(a1b1) : l'intégrale des fonctions réglées ;

(a1b2) : l'intégrale de Darboux des fonctions bornées Darboux-intégrables (c'est aussi l'intégrale de Riemann) ;

(a2b1) : l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables bornées (c'est la définition initiale de Lebesgue) ;

(a2b2) : l'intégrale de Lebesgue générale.

La notion physique d'intégrale peut donc se traduire de façon polysémique en mathématiques !

Enfin, la procédure de l'accroissement différentiel fait le lien avec la notion de primitive d'une fonction continue.

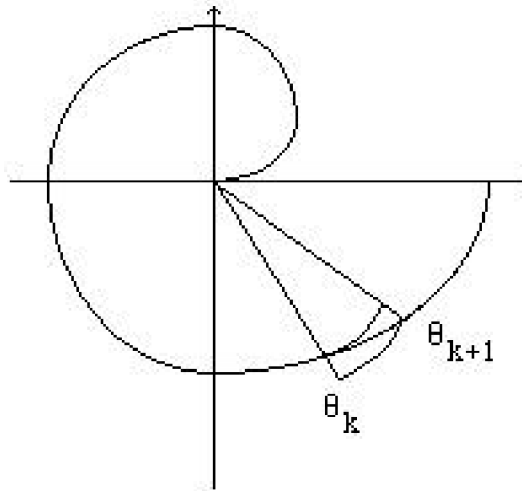
Atelier mesure des grandeurs et intégrale

L'AIRE DE LA SPIRALE D'ARCHIMEDE

On considère la courbe d'équation en coordonnées polaires $\rho = c\theta$, où c est une longueur et où on a $0 \leq \theta \leq 2\pi$. On se propose de calculer son aire S , d'une part par *la procédure intégrale*, de l'autre par *la procédure dérivée-primitive*.

Calcul par la procédure intégrale

Comme sur le dessin ci-dessous, on découpe l'intervalle de variation de l'angle $[0, 2\pi]$ en n



parties égales par les points $\theta_k = 2k\pi/n$, $0 \leq k \leq n$.

On encadre l'aire $\Delta_k S$ du morceau de spirale entre θ_k et θ_{k+1} par les aires des deux secteurs de cercles de rayons $c2k\pi/n$ et $c2(k+1)\pi/n$ et de même angle $2\pi/n$, c'est-à-dire par les inégalités

$$4c^2 \pi^3 / n^3 \cdot k^2 \leq \Delta_k S \leq 4c^2 \pi^3 / n^3 \cdot (k+1)^2.$$

On en déduit en sommant l'encadrement

$$[4c^2 \pi^3 / n^3] \sum_{0 \leq k \leq n-1} k^2 \leq S \leq [4c^2 \pi^3 / n^3] \sum_{0 \leq k \leq n-1} (k+1)^2,$$

soit en renommant les indices à droite

$$(1/n^3) \sum_{1 \leq k \leq n} k^2 \leq S/4c^2 \pi^3 \leq (1/n^3) \sum_{1 \leq k \leq n} k^2.$$

Mais on a la formule

$$(*) \quad \sum_{1 \leq k \leq n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6 = (n^3/3)(1+1/n)(1+1/2n).$$

On en déduit en passant à la limite

$$S = 4c^2 \pi^3 / 3.$$

Calcul par la procédure dérivée-primitive

On note $S(\theta)$ l'aire de la spirale entre les angles 0 et θ , et on encadre son accroissement ΔS entre θ et $\theta + \Delta\theta$. Par le même raisonnement que cidessus on obtient

$$(\Delta\theta/2)c^2 \theta^2 \leq \Delta S \leq (\Delta\theta/2)c^2 (\theta + \Delta\theta)^2.$$

On en déduit que $c^2\theta^2/2 \leq \Delta S/\Delta\theta \leq c^2(\theta+\Delta\theta)^2/2$, et en passant à la limite quand $\Delta\theta \rightarrow 0$ on obtient la dérivabilité de la fonction $\theta \rightarrow S(\theta)$ et la relation

$$dS/d\theta = c^2\theta^2/2.$$

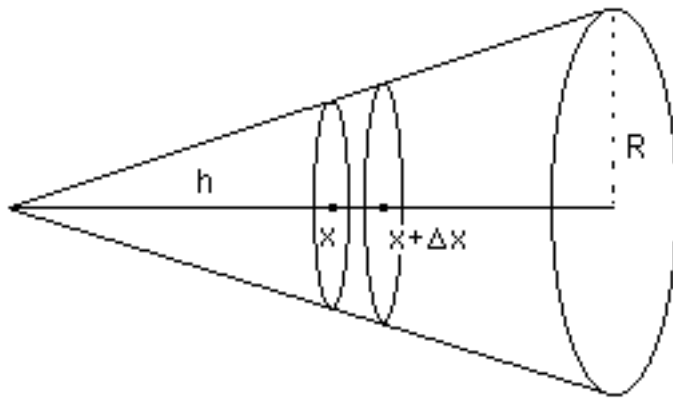
Par suite $S = S(2\pi)$ est la primitive de la fonction $\theta \rightarrow c^2\theta^2/2$ entre 0 et 2π , soit $S = 4c^2\pi^3/3$.

On retrouve le même résultat et on peut comparer la difficulté des deux procédures.

Et on peut interpréter au moyen de l'aire sous le graphe de la fonction $\theta \rightarrow c^2\theta^2/2$ entre 0 et 2π , c'est-à-dire faire le lien avec la définition de l'intégrale donnée en terminale.

L'AIRE DU TRONC DE CONE

On se donne un tronc de cône de révolution de hauteur h dont la base est un disque de rayon R . Déterminer son volume.



Première méthode : procédure dérivée-primitive

On note $V(x)$ le volume entre le sommet et le plan d'abscisse x . On évalue l'accroissement $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$ par encadrement, et on montre que l'on a $dV/dx = \pi(xR/h)^2$, d'où le résultat par une primitive simple (de la fonction $x \mapsto x^2$).

Deuxième méthode : procédure intégrale

On découpe en $\Delta x = h/n$, on encadre chaque petit volume et on somme. On obtient

$$\sum_{0 \leq k \leq n-1} \pi((k/n)R)^2 h/n \leq V \leq \sum_{1 \leq k \leq n} \pi((k/n)R)^2 h/n,$$

soit

$$(1/n^3) \sum_{1 \leq k \leq n-1} k^2 \leq V/\pi h R^2 \leq (1/n^3) \sum_{1 \leq k \leq n} k^2.$$

En utilisant la formule (*)

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6,$$

on obtient le résultat.

Atelier mesure des grandeurs et intégrale

La spirale d'Archimède et le volume du tronc de cône de révolution sont très analogues, et posent tous deux les mêmes problèmes très intéressants sur la notion d'intégrale.

1/ Pourquoi a-t-on affaire à une intégrale ? C'est là le point délicat, que les élèves et les étudiants ne savent pas reconnaître, en général. L'idée clé, est de **découper en tranches fines**. C'est ce que font les physiciens pour le cône, mais **de façon trop "naturelle"** : pour eux, cela va de soi, alors que ce n'est pas le cas pour les élèves et étudiants. C'est ce dont il faut convaincre les enseignants (les "dénaturaliser").

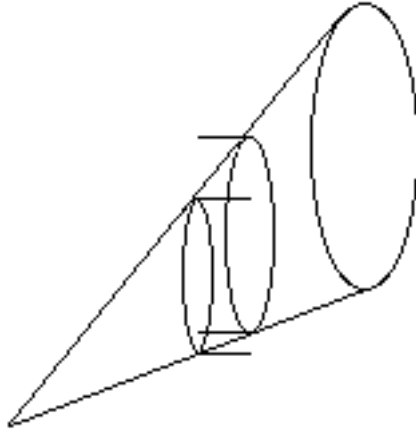
La meilleure méthode est de comparer avec ce qu'on ferait pour le cylindre, et pourquoi il faut faire autrement. Dans le cas de la spirale, il faut comparer avec la même chose pour le disque...

2/ Dès lors que le découpage s'est imposé, il faut savoir si l'erreur commise sur chaque tranche est suffisamment négligeable pour que la procédure intégrale, ou la procédure "dérivée-primitive" (c'est celle souvent utilisée, là encore comme étant "naturelle"...) soit applicable.

Par exemple, être sûr que c'est par une primitive de $\pi(Rx/h)^2$ qu'on va calculer le volume du tronc de cône, revient à dire que, si on note $V(x)$ le volume entre le sommet et le point d'abscisse x sur l'axe, alors dV/dx est bien $\pi(Rx/h)^2$, c'est à dire que quand on assimile $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$ au volume du cylindre de hauteur Δx et rayon Rx/h , c'est-à-dire $\pi(Rx/h)^2 \Delta x$, **on commet une erreur qui est négligeable devant Δx** . Ce point est crucial à débattre avec les élèves, il renvoie à la notion même de dérivée et l'éclaire.

3/ Traditionnellement, les physiciens ne vérifient jamais ce point, qui a pourtant un sens physique, puisqu'il signifie que c'est **l'erreur relative** qui tend vers 0 quand Δx tend vers 0 (et non seulement une erreur absolue). Ils se contentent de penser (et rarement de dire) : "on a supposé quelque chose de négligeable, et le résultat obtenu montre qu'on avait raison" (ou bien, autre version : "...l'expérience montre qu'on avait raison"). Et à mon avis **ce type de raisonnement est propre à l'épistémologie de la physique, les mathématiciens n'ont pas à le contester.**

Mais fondamentalement **ce mode de raisonnement n'est pas accepté en mathématiques** : si on a $P \implies Q$ et que Q redonne P , cela ne prouve pas que P soit vrai (sinon, les mathématiques ne tiendraient plus debout, et on plaint les physiciens qui s'en serviraient !). Il faut donc montrer **a priori**, ici, que l'erreur commise est bien négligeable devant Δx (c'est-à-dire, dès qu'il s'agit de calculs algébriques, du deuxième ordre en Δx). La bonne méthode pour ce faire est **d'encadrer physiquement le volume ΔV** , entre les volumes des deux tranches de cylindres, de rayon Rx/h et $R(x+\Delta x)/h$, et de passer à la limite dans le quotient $\Delta V/\Delta x$ quand Δx tend vers 0. Cela marche très bien... parce que la tranche du cône est comprise entre les deux tranches de cylindre (l'argument est analogue avec la spirale). Mais pour un cône dont le sommet se projeterait orthogonalement sur le plan de la base **en dehors de la base**, cette double inclusion serait fautive, et alors le problème se compliquerait...



4/ Si on veut, non pas directement calculer une primitive, mais utiliser la procédure intégrale, on se trouve devant une somme d'un grand nombre de termes $\Delta_k V$ qu'on a remplacés par $\pi(Rx_k/h)^2 \Delta_k x$, en commettant chaque fois une "petite" erreur e_k , et on fait la somme $\sum_{1 \leq k \leq n} \pi(Rx_k/h)^2 \Delta_k x$, avec une erreur totale $e = \sum_{1 \leq k \leq n} e_k$ par rapport à la vraie somme $V = \sum_{1 \leq k \leq n} \Delta_k V$. Si on ne contrôle pas bien les n erreurs, la somme e peut être très grande, ou ne pas tendre vers 0. Par exemple, si on prend les $\Delta_k x = 1/n$ (en supposant $h=1$ pour simplifier), si l'erreur e_k est de l'ordre de $1/\sqrt{n}$, de $1/n$ ou de $1/n^2$, on a une erreur globale e de l'ordre de \sqrt{n} , de 1 ou de $1/n$... Seul le dernier cas tend vers 0 quand n tend vers l'infini, c'est le cas où chaque erreur $e_k \approx 1/n^2$ est bien négligeable devant $\Delta_k x = 1/n$.

5/ Enfin, un dernier point est intéressant à dégager, et est bien mis en valeur par la comparaison du cas de la spirale avec celui du cône. Il s'agit de mettre en évidence que dans les deux cas **on fait apparaître la même fonction $x \rightarrow x^2$, et que ce qu'on calcule n'est rien d'autre que l'aire sous le graphe de cette fonction**, entre 0 et 2π dans un cas, entre 0 et h dans l'autre. **C'est en effet la définition donnée en terminale de l'intégrale, et il faut bien s'y raccrocher.**

Ce passage d'une méthode de découpage en morceaux, faisant apparaître selon les cas des sommes du type $1 + 2 + \dots + n$, ou $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ ou $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$, etc est ce qui historiquement a fait passer du calcul laborieux, chaque fois ad hoc, de la mesure d'une certaine grandeur, à la découverte que **ce qui compte est la fonction qui y intervient** : $x \rightarrow x$ ou $x \rightarrow x^2$ ou $x \rightarrow x^3$ ou $x \rightarrow 1/x^2$ (cas de l'attraction de la barre) ...et ainsi à la notion d'intégrale d'une fonction. C'est pourquoi il est souhaitable d'utiliser dans le cas de la spirale les sommes $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.