Atelier A2

Les nombres complexes : entre mathématiques, physique et philosophie

Thomas Hausberger
Manuel Bächtold
Université Montpellier 2, IREM de Montpellier

Introduction

Les nombres complexes constituent un objet interdisciplinaire :
- élaborés par les mathématiciens
- utilisés par les physiciens
- discutés par les philosophes

Un objet de transition

Un objet qui facilite la transition

L'approche proposée : historique et épistémologique

Plan de l'atelier :

Partie 1 : les nombres complexes : un objet de transition secondaire-supérieur pour l'enseignement des mathématiques

Partie 2 : un exemple pour éclairer les liens entre les mathématiques et la physique

Partie 1

Les *nombres complexes* : un objet de transition secondaire-supérieur pour l'enseignement des mathématiques

Le programme de TS (extrait) :

2. Géométrie

Nombres complexes

En classe terminale, les nombres complexes sont vus essentiellement comme constituant un nouvel ensemble de nombres avec ses opérations propres. Cette introduction s'inscrit dans la perspective d'un approfondissement lors d'une poursuite d'études.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Forme algébrique, conjugué. Somme, produit, quotient.	• Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.	On introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique.
Équation du second degré à coefficients réels.	• Résoudre dans **C** une équation du second degré à coefficients réels.	
Représentation géométrique.	• Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur.	Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
Affixe d'un point, d'un vecteur.	• Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.	
Forme trigonométrique : - module et argument, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ; - notation exponentielle.	• Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. • Connaître et utiliser la relation $z\,\overline{z} = \lvert z \rvert^2$. • Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.	La notation exponentielle est introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle. Les nombres complexes permettent de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première. ⇆ [SI] Analyse fréquentielle d'un système.

L'ancien programme de TS (extrait) :

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Géométrie plane : nombres complexes		
Le plan complexe : affixe d'un point ; parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes. Module et argument d'un nombre complexe ; module et argument d'un produit, d'un quotient. Écriture $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.	Le vocabulaire sera introduit à partir de considérations géométriques. On retrouvera à cette occasion la notion de coordonnées polaires et celle, sous-jacente, d'équation paramétrique d'un cercle (sous la forme $z=z_\omega+re^{i\theta}$ ou $x=x_\omega+r\cos\theta$, $y=y_\omega+r\sin\theta$). La notation exponentielle sera introduite après avoir montré que la fonction $\theta\mapsto\cos\theta+i\sin\theta$ vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles.	La vision des nombres complexes est d'abord géométrique : calculs sur des points du plan. Les repérages cartésien et polaire introduits en première conduisent naturellement à deux écritures d'un nombre complexe. L'objectif est ensuite de montrer la puissance de ce calcul dans les problèmes de géométrie. On introduira dans ce chapitre quelques éléments lui donnant une dimension historique. Les nombres complexes permettent de retrouver et de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première.
Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.		
Interprétation géométrique de $z\mapsto z'$ avec $z'=z+b$ ou $z'-w=k(z-w)$ avec k réel non nul, ou $z'-w=e^{i\theta}(z-w)$.	On utilisera les nombres complexes pour traiter des exemples simples de configurations et résoudre des problèmes faisant intervenir des translations, des rotations, des homothéties.	On exploitera à la fois les possibilités offertes par les nombres complexes et les raisonnements géométriques directs qui réactivent les connaissances antérieures, notamment sur les transformations du plan.

L'ancien programme de spécialité Maths de TS (extrait) :

Similitudes planes		
Définition géométrique. Cas des isométries. Caractérisation complexe : toute similitude a une écriture complexe de la forme $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\bar{z}+b$ (a non nul).	Les similitudes seront introduites comme transformations du plan conservant les rapports de distances. On fera remarquer que la réciproque d'une similitude est une similitude, que la composée de deux similitudes est une similitude et que, dans le cas général, la composition n'est pas commutative. On démontrera qu'une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité ou une symétrie axiale.	La définition générale sera illustrée d'une part avec les transformations étudiées antérieurement, d'autre part avec les transformations d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\bar{z}+b$; ces dernières seront amenées progressivement à travers des exemples. La caractérisation complexe est un moyen efficace d'établir la plupart des propriétés.
Étude des similitudes directes	Forme réduite d'une similitude directe. On démontrera la propriété suivante : étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que A ≠ B et A' ≠ B', il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.	La recherche des éléments caractérisant une similitude indirecte est hors programme.
	Applications géométriques des similitudes à l'étude de configurations, la recherche de lieux et la résolution de problèmes de construction.	On fera le lien avec les triangles semblables ou isométriques introduits en classe de seconde.

Un exemple : le cours sur les nombres complexes en L1 à l'UM2

Plan du cours :
1. Description des nombres complexes
2. Propriétés fondamentales des opérations
3. Forme algébrique d'un nombre complexe, parties réelles et imaginaires
4. L'absence de relation d'ordre sur **C**
5. Représentation géométrique des nombres complexes
6. Conjugué d'un nombre complexe
7. Module et argument
8. Propriétés du module et de l'argument
9. Forme polaire, notation exponentielle
10. Multiplication par un nombre complexe et géométrie
11. Formules trigonométriques
12. Racine carrée d'un nombre complexe
13. Équation du second degré à coefficients complexes
14. Racines n-èmes d'un nombre complexe
15. Racines des polynômes à coefficients complexes
16. Le cercle unité
17. L'exponentielle complexe.
18. Appendice : une construction des nombres complexes

Question 1 : en quoi les nombres complexes sont-ils des objets de transition ?

Quelques caractéristiques de la transition lycée-université :

- Deux cultures différentes, un contrat didactique différent à l'Université

- Le passage de « décrire à définir, de convaincre à prouver » (Tall, Advanced Mathematical Thinking)

- L'obstacle du formalisme

- L'enrichissement des objets et concepts, organisés en réseaux

- L'accroissement du niveau d'abstraction

- Nécessité de flexibilité et d'autonomie dans les changements de cadres (Douady) et de registres de représentations sémiotiques (Duval)

Nombres complexes et formalisme

Hypothèses :

a) L'étude des nombres complexes permet d'éclairer le processus de constitution et le fonctionnement du formalisme mathématique.

b) Un enjeu didactique important de la construction des nombres complexes à la transition lycée-université pourrait être de faciliter l'appropriation des démarches formelles abstraites en mathématiques [si l'on se donne le temps d'interroger le processus de construction...]

Nombres complexes et formalisme :
(hypothèse a)

- Les nombres complexes sont des objets formels : ils sont décrits par des symboles nouveaux (i) ou définis comme des couples.

- Ce formalisme a émergé historiquement en étant déconnecté du réel.

- La construction de ce formalisme a une histoire qui permet de la problématiser, elle se révèle une conquête.

- Le principe de construction est érigé en méthode par Hilbert (méthode des éléments idéaux) : adjonction d'éléments idéaux, par commodité et simplicité, de façon à obtenir la permanence de certaines lois (un polynôme de degré n possède n racines, 2 droites se coupent en un point,...)

- Ce formalisme « attrape » *a posteriori* plus que ce que l'on y a mis

Hypothèse b : proposition d'une activité (voir plus loin)

Nombres complexes : articulation entre algèbre et géométrie

Hypothèses :

a) L'articulation entre algèbre et géométrie, au sein d'un objet à « double-face », est un des enjeux mathématiques et épistémologiques fondamentaux des nombres complexes

b) Un enjeu didactique important de l'introduction des nombres complexes en fin de lycée est de favoriser la flexibilité dans les changements de cadres et de registres requise par la pensée mathématique avancée à l'Université.

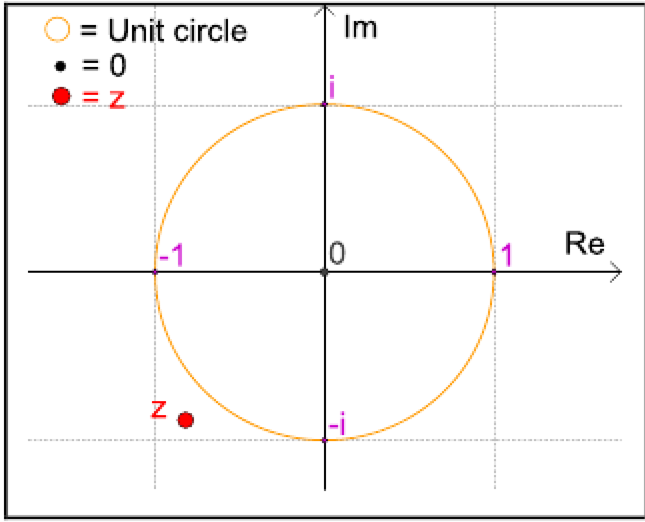
Nombres complexes : articulation entre algèbre et géométrie (hypothèse a)

• Enjeu : c'est cette découverte (les complexes) qui permettra d'obtenir ultérieurement une extension significative des possibilités d'algébrisation de la géométrie et de géométrisation de l'algèbre.
C, **H**, **O**, algèbres de Clifford
les algèbres géométriques : langage de la physique du XXe s. (électron relativiste de Dirac)
Un chemin de pensée conduit jusqu'aux grands programmes d'unification (Langlands, supercordes), cf Parrochia et al. : L'unification des mathématiques, Lavoisier 2012.

• Philosophie : l'algèbre crée des nombres pour traduire des propriétés géométriques (irrationnels, complexes, quaternions,...) et réciproquement, la géométrie fournit des intuitions pour décrire les propriétés des équations de courbes, surfaces, variétés algébriques,...

• Origine : la géométrie de Descartes : réécriture de la géométrie en algèbre.
Une Correspondance imparfaite.
Difficulté : définir géométriquement les opérations sur les complexes. C'est la percée d'Argand qui voit la naissance d'un nouveau cadre : le cadre vectoriel

Une situation pour travailler la flexibilité dans les changements de cadres (hypothèse b) :



The figure on the left represents the plane of complex numbers, with a number $z=x+iy$ in the plane. Please find the position of the number $\mathbf{w} = -\mathbf{i}\bar{\mathbf{z}}$.

To answer, click on the figure where you think that w is located.

Figure 1: Example of a "Complex shot" task – WIMS (Vandebrouck 2006)

En L3 : on choisit comme système de représentants des irréductibles de Z[i] (modulo les inversibles) en prenant ceux qui sont situés dans le premier quadrant. Décomposer un entier de Gauss donné en produit d'irréductibles ainsi normalisés.
Conclusion : une difficulté persistante...

[Nous n'en dirons pas plus sur ce point : nos travaux sont davantage axés sur

Question 2 : comment introduire les nombres complexes ?

Un obstacle de nature épistémologique :

• Nombres ou solutions impossibles, qui « sont plus sophistiques que réels » (Cardan 1545, Bombelli 1560)
• Nombres imaginaires (Descartes, 1637)
• Nombres complexes (Gauss, 1837)

G. Gaston-Granger, l'irrationnel, Odile Jacob, 1998 chap. II

« L'irrationnel épistémique apparaît dans le procès même de la connaissance, lorsque ce procès rencontre inopinément une propriété de son objet qui interdit de poursuivre ce processus tel quel. Il s'agit donc, dans ce domaine, d'un cas typique d**'irrationnel comme obstacle, considéré dans l'*acte* de connaître**. Mais il peut arriver aussi que le sujet connaissant ait recours délibérément à une contradiction de ce genre qu'il introduit lui-même dans l'objet et qu'il assume, au moins provisoirement, pour obtenir des résultats nouveaux. Il s'agit toujours alors d'un moment du **travail de constitution de l'objet scientifique**, et l'irrationnel ne qualifie nullement une attitude et un comportement pratique de l'acteur. »

Morellet, arcs de cercles complémentaires

La proposition de l'équipe IREM maths-philo de Montpellier :
la ressource « L'équation du troisième degré : une histoire complexe »
disponible à l'adresse :
http://www.irem.univ-montp2.fr/Actions-en-direction-des-lycees

- Ne pas partir de l'équation de degré 2 mais de degré 3, qui fait apparaître un **conflit cognitif**

- **Dialectique outil-objet**

- Se donner le temps de présenter la démarche de construction de l'outil et de discuter la pertinence des notations.

- Restaurer ainsi la rationalité des nombres complexes : l'introduction de la racine carrée d'un nombre négatif, historiquement située, apparaît comme un procédé délibéré justifié par son succès dans la résolution du conflit cognitif.

Partie 2

Les liens entre les mathématiques et la physique :
le cas des nombres complexes

Ressources produites sur ce thème :

Le groupe IREM math-philo de Montpellier* a constitué deux scénarios pédagogiques sur le thème des liens math-physique basés sur le cas des nombres complexes :
- « Le réel et la raison 1 »
- « Le réel et la raison 3 : utilisation des nombres complexes en physique »

Ces deux ressources s'appuient sur une vidéo présentant l'exemple de la réflexion totale frustrée :
- « Nombres complexes en sciences physiques »

Pour accéder à ces ressources, voir le site :
http://www.irem.univ-montp2.fr/Actions-en-direction-des-lycees

* membres du groupe :
Bächtold Manuel, François Thomas, Guin Daniel, Guin Dominique, Hausberger Thomas, Pinet Véronique, Reboul Henri et Vergnerie Cédric

Quel est l'intérêt de ces scénarios ?

● montrer aux élèves une <u>application concrète</u> en physique de ces objets abstraits que sont les nombres complexes

● l'étude de l'<u>aspect opératoire</u> des nombres complexes dans le cadre d'une réflexion épistémologique est un moyen de <u>donner du sens</u> à ces objets abstraits

● <u>faire entrevoir</u> aux élèves l'usage qui pourra être fait de ces objets mathématiques dans leur possible future <u>formation universitaire en physique</u>

● les trois points précédents peuvent <u>motiver les élèves</u> à travailler les nombres complexes en mathématiques

● la <u>co-intervention</u> d'un enseignant de physique et d'un enseignant de philosophie crée un <u>dynamisme nouveau</u> dans la classe et permet de capter davantage l'attention et l'intérêt des élèves

● en s'appuyant sur des exemples concrets et en mobilisant des connaissances empruntés aux domaines des mathématiques et de la physique (accessibles aux élèves de TS), l'enseignant de philosophie <u>alimente la réflexion épistémologique</u> (cf. programme de terminale)

Ce qui est proposé dans la suite de l'atelier

1. Visionnage de la vidéo présentant l'exemple de la réflexion totale frustrée

2. Petite discussion pour clarifier le contenu de la vidéo

3. Temps de réflexion puis de discussion sur la question « Quelle est l'utilité des mathématiques en physique ? »

4. Idem sur la question « Pourquoi peut-on appliquer les mathématiques au monde physique ? »

Objectif : donner à voir le type de réflexion épistémologique pouvant être menée avec les élèves à partir des ressources produites
(remarque : on s'inspire ici de ces ressources sans les suivre)

1. Visionnage de la vidéo présentant l'exemple de la réflexion totale frustrée

2. Petite discussion pour clarifier le contenu de la vidéo

Quel est le problème posé par l'expérience du doigt ?

2. Petite discussion pour clarifier le contenu de la vidéo

Quel est le problème posé par l'expérience du doigt ?

Les lois disponibles en physique (lois de Snell-Descartes) ne permettent pas d'expliquer que l'on voit l'empreinte digitale (qui résulte d'un phénomène de réflexion totale frustrée)

2. Petite discussion pour clarifier le contenu de la vidéo

Quel est le problème posé par l'expérience du doigt ?
Les lois disponibles en physique (lois de Snell-Descartes) ne permettent pas d'expliquer que l'on voit l'empreinte digitale (qui résulte d'un phénomène de réflexion totale frustrée)

Comment surmonter le problème ?

2. Petite discussion pour clarifier le contenu de la vidéo

Quel est le problème posé par l'expérience du doigt ?
Les lois disponibles en physique (lois de Snell-Descartes) ne permettent pas d'expliquer que l'on voit l'empreinte digitale (qui résulte d'un phénomène de réflexion totale frustrée)

Comment surmonter le problème ?
En modélisant la lumière à l'aide des nombres complexes. Il est possible ainsi de trouver des solutions pour les angles d'incidence au-delà de l'angle limite (« limite » dans le cadre d'une modélisation sans nombres complexes)

3. « Quelle est l'utilité des mathématiques en physique ? »

Petit travail proposé :
Chercher des éléments de réponse à cette question en vous appuyant notamment sur l'exemple de la réflexion totale frustrée

Eléments de réponse :

Ce qu'illustre l'exemple de la réflexion totale frustrée :

(a) L'introduction d'objets mathématiques en physique peut offrir de nouvelles possibilités pour la modélisation des phénomènes problématiques et la prédiction de nouveaux phénomènes

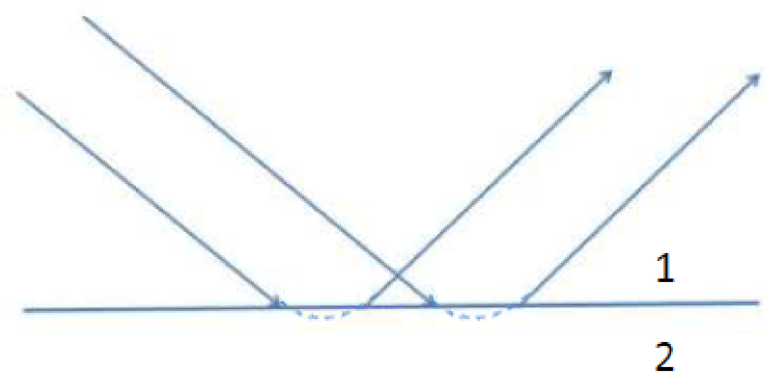
Cas de phénomènes problématiques :
Lorsque les physiciens ne parviennent pas à modéliser certains phénomènes (ex : réflexion totale frustrée ou fusion dans le Soleil), le recours à certains objets mathématiques (nombres complexes) peut permettre de débloquer la situation et de dépasser (voire transgresser) les lois existantes (resp. lois de Snell-Descartes, barrière de potentiel)

Cas de la prédiction de nouveaux phénomènes :
Le recours à de nouveaux objets mathématiques peut permettre de prédire de nouveaux phénomènes dont les physiciens ne soupçonnaient pas l'existence

Extrait de la présentation sur la réflexion totale frustrée

Réalité physique de l'onde « *évanescente* »

- Le formalisme mathématique (en particulier l'extension aux nombres complexes) a permis de concevoir l'existence de l'onde évanescente et ainsi **d'interpréter le phénomène de la réflexion totale frustrée**. Un exemple de la *« déraisonnable efficacité des mathématiques »* (Wigner).
- L'expérimentation montre que lorsqu'on empêche la formation de l'onde évanescente en introduisant un autre matériau dans la région où son amplitude est importante, la réflexion totale est frustrée : s'il n'existe pas une épaisseur e_2 suffisante ($e_2 \approx$ quelques δ) de milieu d'indice n_2, l'onde incidente n'est plus totalement réfléchie et une partie notable est transmise. La formation de l'onde évanescente semble donc nécessaire à la réflexion totale.
- Cette onde évanescente peut être directement **mise en évidence** (mesurée) dans le domaine des longueurs d'onde de la lumière visible et encore plus aisément dans celui des ondes centimétriques.
- La « frustration » de la réflexion totale (i.e. la transmission) décroit très vite avec l'augmentation du rapport e_2/δ et cela a des **applications** (diapo suivante).
- On explique également ainsi **l'irisation** rouge qu'avait observée **Newton** : pour une épaisseur e_2 donnée, le rapport e_2/δ varie comme $1/\lambda$ puisque δ est proportionnel à la longueur d'onde et la frustration est donc plus forte pour le rouge que pour le bleu. Comme en s'éloignant du contact entre plan et sphère l'épaisseur e_2 du milieu 2 devient de plus en plus grande, c'est le rouge qui domine sur les bords du faisceau transmis.
- L'effet « Goos-Hänchen » (petit décalage latéral entre un pinceau lumineux incident et le pinceau lumineux totalement réfléchi) étaye la thèse de la légère **intrusion** de la lumière incidente dans le milieu 2 avant sa résurgence dans le milieu 1 qu'avait (qualitativement et avec un autre modèle) envisagée Newton.



Autres éléments de réponse :

(b) Exprimer les résultats d'expérience (constatés ou prédits) au moyen de nombres leur confère une portée universelle (un nombre étant perçu et reconnu de la même manière par tous)

… par contraste avec la qualité d'un objet dont la perception par les sens peut varier d'un observateur à un autre

Cette expression mathématique des résultats d'expérience rend possible :

(c) l'établissement de liens précis entre les grandeurs

Ce qui, à son tour, rend possible (a), c'est-à-dire la modélisation de phénomènes problématiques et la prédiction de nouveaux phénomènes

4. « Pourquoi peut-on appliquer les mathématiques au monde physique ? »

On peut venir à cette question à partir du cas des nombres complexes :
Comment expliquer le fait que les nombres complexes qui n'ont pas été tirés de l'expérience puissent néanmoins servir à modéliser et prédire des phénomènes ?

Cette question peut être généralisée à la question de la « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles » (selon l'expression de Wigner, 1960) :
Comment expliquer le fait que les mathématiques, qui sont des produits de notre activité intellectuelle, soient efficaces lorsqu'on les applique au monde physique ?

Remarque : cette question renvoie au thème « la raison et le réel » dans le programme de Terminale de philosophie

La démarche proposée dans la ressource « Le réel et la raison 3 » :
Dans le cadre du cours de philosophie, l'objectif n'est pas de fournir une réponse fermée à cette question, mais de <u>conduire les élèves à identifier le problème</u> (c'est-à-dire saisir le caractère surprenant de l'efficacité des mathématiques) et à envisager des pistes de réponses

Notre hypothèse :
L'étude du cas des nombres complexes permet de rendre problématique la question de la raison de l'efficacité des mathématiques

Petit travail proposé :
Pour les deux réponses suivantes, expliquer en quoi le cas des nombres complexes les rend difficilement défendables

(i) les mathématiques s'appliquent au monde sensible parce que ce dernier est la source première de laquelle sont tirées les mathématiques
(réponse apportée notamment par Aristote)

(ii) les mathématiques s'appliquent au monde physique parce ce que ce dernier possède une structure mathématique
(réponse apportée notamment par Galilée)

(i) les mathématiques s'appliquent au monde sensible parce que ce dernier est la source première de laquelle sont tirées les mathématiques

Objection :
Dans le cas des nombres complexes, cette idée n'est pas vérifiée
Les nombres complexes ont été forgés dans la sphère des mathématiques
(en réponse à un problème purement mathématique)
Voir partie 1 de l'atelier

(ii) les mathématiques s'appliquent au monde physique parce ce que ce dernier possède une structure mathématique

Objection :

Dans le cas des nombres complexes, la relation entre ces objets mathématiques et le monde physique est très indirecte

Dans l'exemple de la modélisation de la réflexion totale frustrée, seule la partie dite « réelle » de la fonction d'onde complexe est mise en relation avec les phénomènes

Rien ne permet de conclure qu'il existe un isomorphisme entre les nombres complexes (côté théorie physique) et le monde physique

Remarque : dans la ressource « Le réel et la raison 3 » un texte de Husserl est proposé où cet auteur soutient que cette idée est invérifiable par principe

Autres pistes :

(iii) les théories physiques mathématisées peuvent modéliser et prédire des phénomènes parce que ces derniers sont eux-mêmes déjà exprimés au moyen des mathématiques
(réponse suggérée par Duhem)

(iv) nous pouvons appliquer les mathématiques pour décrire les phénomènes notamment parce qu'ils sont caractérisés par une certaine régularité
(transposition de l'idée de Hume pour justifier l'applicabilité du principe de causalité)

(v) certains outils mathématiques ont été développés pour s'adapter à la modélisation des phénomènes
(idée développée notamment par Dominique Lambert)

(vi) nous pourrions retourner la question ainsi :
Pourquoi les mathématiques ne pourraient-elles pas être utilisées pour modéliser et prédire les phénomènes ?

Annexes

Annexe 1 : les nombres imaginaires, un obstacle de nature épistémologique

G. Gaston Granger, l'irrationnel, Odile Jacob, 1998 chap. II : les imaginaires

Notre second exemple d'obstacle « irrationnel[1] » rencontré et surmonté dans une œuvre sera de nouveau emprunté au travail des mathématiciens.

La rencontre de l'irrationnel comme obstacle et l'histoire de sa résolution sont en effet particulièrement significatives dans le cas des nombres dits « imaginaires ». D'abord dénommés « impossibles », ils se présentent comme résultats d'opérations algébriques, impossibles en effet selon les règles antérieurement admises de l'Algèbre, mais ils sont néanmoins représentés par des symboles vides et manipulés dans des calculs avec une assurance de plus en plus grande malgré l'irrationalité patente de ces applications. Progressivement, des règles spécifiques de manipulation sont implicitement ou explicitement introduites, et des tentatives d'interprétation de ces nouveaux objets se succèdent avec des réussites diverses. Ils ne sont définitivement et officiellement intégrés qu'au XIXe siècle — par Gauss — dans un univers de nouveaux nombres dits « complexes » qui restaure *a parte post* la rationalité.

L'irrationnel comme obstacle ; les imaginaires, un irrationnel épistémique

- « Une oeuvre est le résultat d'un travail de mise en forme qui obéit d'abord à certaines règles implicites ou manifestes, qui déterminent plus précisément la nature de l'oeuvre et les procédures de la méthode. »

- « L'irrationnel apparaît quand la production de l'oeuvre se situe, ou se développe contre ou en dehors de ce cadre originaire, devenant éventuellement trop contraignant ou stérilisateur. »

- « L'irrationnel épistémique apparaît dans le procès même de la connaissance, lorsque ce procès rencontre inopinément une propriété de son objet qui interdit de poursuivre ce processus tel quel. Il s'agit donc, dans ce domaine, d'un cas typique d'irrationnel comme obstacle, considéré dans l'*acte* de connaître. Mais il peut arriver aussi que le sujet connaissant ait recours délibérément à une contradiction de ce genre qu'il introduit lui-même dans l'objet et qu'il assume, au moins provisoirement, pour obtenir des résultats nouveaux. Il s'agit toujours alors d'un moment du travail de constitution de l'objet scientifique, et l'irrationnel ne qualifie nullement une attitude et un comportement pratique de l'acteur. »

Annexe 2 : La ressource « L'équation du troisième degré : une histoire complexe » disponible à l'adresse :
http://www.irem.univ-montp2.fr/Actions-en-direction-des-lycees

Scénario : Activité 1 :

•Partie I : étude de l'équation de degré 3 : une racine réelle et au plus 3 ; se ramener à $x^3=cx+d$; il y a 3 racines réelles si et seulement si $(c/3)^3-(d/2)^2<0$ (étude analytique)

•Partie II :

2) Montrez que si y et z vérifient le système

$$(S)\ \begin{cases} yz = \dfrac{c}{3} \\ y^3 + z^3 = d \end{cases} \quad \text{alors } x = y + z \text{ est une solution de l'équation } x^3 = cx + d.$$

4) En déduire qu'une solution de l'équation s'écrit :

$$\sqrt[3]{\frac{d}{2}+\sqrt{(\frac{d}{2})^2-(\frac{c}{3})^3}}+\sqrt[3]{\frac{d}{2}-\sqrt{(\frac{d}{2})^2-(\frac{c}{3})^3}}\ .$$

•Partie III : limites d'utilisation de la formule de Cardan : le « cas irréductible » $(c/3)^3-(d/2)^2<0$

Supports : vidéos visionnées en classe (50 min) ; devoir à la maison ; corrigé en classe

Activité 2
Partie IV : Les trouvailles de Bombelli
Introduction d'un nouveau signe

« J'ai trouvé une autre sorte de racine cubique d'expressions (…) très différente des autres. Celle-ci est issue du Cas sur le Cube du Tant[1][l'inconnue] *égal au Tant et à une Constante , quand le cube du tiers du nombre de Tants est plus grand que le carré de la moitié de la Constante, comme cela va être démontré pour ce Cas.*

c est le nombre de « tants » et
d est la constante

$$x^3 = cx + d$$

$$\left(\frac{c}{3}\right)^3 > \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Cette sorte de racine carrée contient dans son algorithme de calcul, des opérations ***différentes*** *des autres et a un nom différent, parce que(…), la racine carrée de leur différence ne peut s'appeler ni plus ni moins c'est pourquoi je l'appellerai plus que moins [pdm Rq] quand celle-ci devra être ajoutée et, quand elle devra être ôtée, je l'appellerai moins que moins [mdm Rq](…)*

Dans le cas de l'équation $x^3 = 15x + 20$, on a $\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3 = -121<0$. Cet exemple correspond au cas décrit par Bombelli.

Bombelli décide de faire comme si - 121 était le carré d'un nombre imaginaire et le note pdm Rq 121. Les mathématiciens du XVII$^{\text{ème}}$ et XVIII$^{\text{ème}}$ siècle le noteront en utilisant le signe $\sqrt{-\ldots}$, ce qui donne $\sqrt{-121}$

Définition des nouvelles opérations par généralisation des propriétés des nombres

Bombelli donne ensuite sous forme de comptine les règles de multiplication concernant ce nouveau signe. En particulier, il donne trois règles qui vont être incontournables pour traiter avec ces nouvelles quantités.
Compléter les calculs de la deuxième colonne.

Règles	Exemple
1) pdm **par** pdm donne moins	$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = \ldots\ldots\ldots$
2) pdm **par** mdm donne plus	$\sqrt{-1}\times(-\sqrt{-1}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3) mdm **par** mdm donne moins	$-\sqrt{-1}\times(-\sqrt{-1}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
4) Autre règle pdm Rq 4 est 2 pdm Rq1	$\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$

Discussion de la notation et institutionnalisation du i :

Bien plus tard, le mathématicien Euler (1707-1783) reprend ces dernières règles concernant ces nouvelles quantités et trouve qu'il y a quelque chose de paradoxal :
Simplifier les écritures suivantes :

En suivant Bombelli	En suivant Euler
$(\sqrt{-1})^2 =$	$(\sqrt{-1})^2$ $=$ $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\times\ldots\ldots\ldots} =$
$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$ $=\sqrt{-1}\times\sqrt{2}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{3}$ $=(\sqrt{-1})^2\sqrt{2\times 3}=\ldots.$	$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3} = \ldots\ldots\ldots$

Le signe $\sqrt{-\ldots}$ est-il adapté ? Quelles règles sont valables ?

Euler, se rendant compte de cette insuffisance, proposera la notation i pour remplacer $\sqrt{-1}$. On utilisera dorénavant exclusivement la notation i (au lieu de $\sqrt{-1}$ que l'on abandonnera totalement) : on a donc $\mathbf{i^2 = -1}$.
Simplifier les calculs ci-dessous :
$i\sqrt{2}\times i\sqrt{3}$; $(2+ i)(6+2i)$; $(3 - i)(7-i)$; $(\sqrt{5} - \sqrt{2}\, i)(\sqrt{2} - \sqrt{5}\, i)$

Le nouvel outil permet de faire fonctionner la formule de Cardan :

Retour sur notre équation:

Bombelli sait que l'équation $x^3 = 15x + 4$ possède une solution évidente positive qui est 4. A l'aide des règles de multiplication qu'il a postulé, il va montrer que l'expression $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ est égale à 4.

Pour cela, il doit commencer par extraire **une** racine cubique de $2+\sqrt{-121}$, c'est-à-dire, avec la nouvelle notation, de $2 + i\sqrt{121} = 2 + 11i$. Il va montrer qu'une racine cubique est $2 + i$ en montrant que son cube est $2 + 11\,i$.

Avec la nouvelle notation, il va montrer que : $2+i\sqrt{121} = (2 + i)^3$

- Compléter ses calculs :

$(\sqrt[3]{2+i\sqrt{121}})^3 = 2 + i\sqrt{121}$ = ……+………i

$(2+i)^3 = (2 + i)(2 + i)](2 + i)$ =[……………………………………

= (…… + …..i) (2 + i) = ….. + …… + ……. + ………=........+.......i

- Montrer de façon analogue que $\sqrt[3]{2-i\sqrt{121}} = 2 - i$ et conclure.