Les nombres réels au lycée

Observations et perspectives

Viviane Durand-Guerrier et Martine Vergnac
IREM de Montpellier

Une étude en seconde:

- Méthode adoptée
- Résultats des entretiens avec des enseignants de lycée.
- Analyse des questionnaires seconde.

Aperçu des conceptions en terminale S:

- Classification des conceptions identifiées.
- Évolutions par rapport à la seconde.

Perspectives pour la transition:

- État des lieux.
- Les nombres réels et le programme de terminale S.
- Une observation d'une séance sur le théorème des valeurs intermédiaires.

Le constat en seconde

A travers une ***étude de cas*** *menée dans l'académie de Montpellier, nous avons tenté de déterminer comment les élèves de seconde interrogés concevaient les nombres réels.*

La démarche.

- 7 entretiens menés auprès d'enseignants de lycée en charge de classes de seconde et de classes scientifiques.

- Analyse des réponses à un questionnaire distribué dans leurs classes de seconde :

8 classes, 252 élèves.

Entretiens

La disparition du chapitre sur les ensembles de nombres : Quelles conséquences?

- Moins de travail explicite sur les nombres.
- Les nombres réels ne sont abordés que lors de l'introduction des intervalles dans le cadre du travail sur les fonctions.
- Disparition du concept de nombre rationnel au lycée.

Entretiens

- *-«[...] au début sur les fonctions,...est arrivée la notion d'intervalle donc j'ai commencé à parler des nombres[...]»*
- *-«[...]du coup j'ai introduit les notations, dans d'autres chapitres; on va dire, un peu en acte[...]»*
- *« [...]mais non, la problématique rationnelle a disparu, et du coup on n'en parle plus. »*

Entretiens

Comment les enseignants interviewés perçoivent-ils la conception qu'ont leurs élèves des nombres réels?

- Les élèves ne connaissent que deux types de nombres : les entiers et les « autres ».

- Assimilation du nombre à son affichage sur la calculatrice.

Entretiens

- *-«...une fraction c'est pas très clair; il y en a quelques -uns qui vont dire que c'est une valeur exacte mais pour la plupart on tape 2 divisé par 3, ça met 0,66666 c'est pareil... ».*

- *-«...maintenant je trouve que ça a changé très vite avec les nouveaux programmes, je pense qu'il y en a une partie qui pense que 1/3 c'est pas un nombre...1/3 c'est une fraction...» .*

Questionnaires seconde

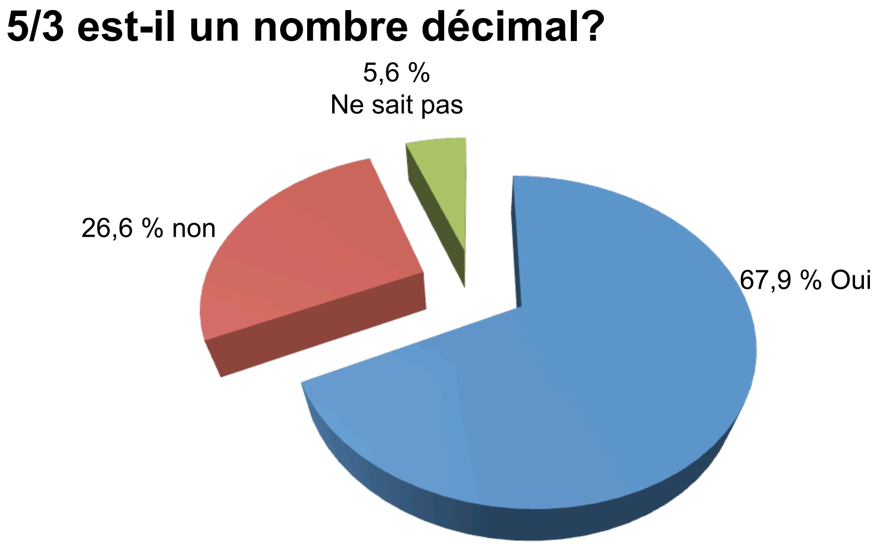
Au cours de cette étude nous avons observé que les conceptions que les élèves ont des nombres, étaient liées à leur écriture.

- Pour eux, une fraction est toujours un nombre décimal car elle peut s’écrire avec une virgule.

-Une racine carrée n’est pas un nombre et ne le devient que lorsqu’il est approximé avec la calculatrice.

- Pas de syntaxe associée aux nombres réels: difficulté à les définir.

Questionnaires seconde

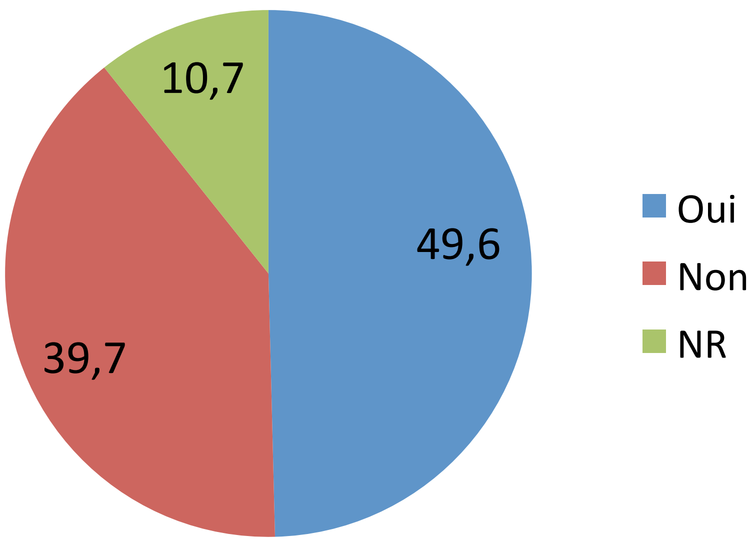


Pour plus de deux tiers des élèves interrogés, 5/3 n'est pas un nombre rationnel mais un nombre décimal:
Parmi les nombres rationnels , ils ne sont pas capables de distinguer ceux qui sont décimaux des autres.

Cela semble indiquer que le nombre n'est pas distingué de son écriture…

Questionnaires seconde

$\sqrt{7}$ **est-il un nombre?**



Seulement la moitié des élèves interrogés, considèrent explicitement que $\sqrt{7}$ est un nombre .

Parmi eux, un tiers se le représente comme un décimal; et une moitié ne se le représente pas.

Quand un nombre ne peut pas être exprimé par une écriture décimale, ce n'est pas un nombre…

Questionnaires seconde

A la question : **« Comment peux tu définir un nombre réel? »,**
il y a eu des réponses récurrentes telles que …

ils ne sont pas virtuels

c'est un nombre que l'on peut dire et écrire

C'est un nombre exact.

C'est Tous les nombres!

Un nombre réel est un nombre non décimal.

Un nombre réel c'est un nombre qui est entier

Non, un nombre réel c'est l'ensemble de définition : $\mathbb{R}$
$[-\infty ; +\infty]$

Questionnaires seconde

Cette dernière question illustre bien les difficultés qu'ont les élèves de seconde à exprimer ce qu'est un nombre réel. Ce désarroi peut s'observer notamment dans le fait que presque un tiers des élèves n'a pas répondu à cette question.

Nous avons eu des difficultés à classer les réponses très diverses qui ont été proposées et qui semblaient exprimer des conceptions personnelles pas toujours liées à la culture scolaire. On peut dégager les trois principaux types de conceptions :

-Une conception ***ensemble de tous les nombres***: elle correspond à une habitude du travail, une approche pratique des nombres.

--Une conception ***réaliste:*** l'écriture du nombre est liée à sa dénomination, elle est déconnectée du concept du nombre.

- Toutes les conceptions qui ***identifient l'***ensemble des nombres réels à un de ses ***sous-ensembles*** ou à une partition erronée de l'ensemble ***R***

Aperçu des conceptions en Terminale S

Afin d'observer s'il y a une évolution des conceptions du nombre réel de la seconde à la terminale S, nous avons soumis à deux classes de terminale S (soit 55 élèves) un questionnaire, qui a également été proposé à quelques étudiants de Licence.

Même si l'échantillon observé est moindre que pour les élèves de seconde, il permet de dégager un paysage des conceptions sur les nombres à l'entrée de l'université.

Aperçu des conceptions en Terminale S

Voici la classification que nous proposons:

Catégorie	Terminales S	Pourcentage TS
1. Conception « Ensemble de tous les nombres »	K2 ; K6 ; K7 ; K18 ; K21 ; M18 ; M 20	13%
2. Conception « Vision géométrique – axe réel »	K12 ; K23 ; M1 ; M4	7%
3. Conception « Intervalle]-∞ ; +∞[»	K16 ; K17 ; K19 ; K20 M28 ; M31.	11%
4. Conception « Complexes » non « imaginaires »	M4 ; M5 ; M6 ; M7 ; M3 ; M16 ; M27 ; M32	14,5%
5. Conception « Réaliste »	K6 ; K15 ; M6 ; M8	7%
6. Conception « Ecriture décimale illimitée »		0%
7. Conception « Partition $\mathfrak{Q}$ ou $\mathfrak{I}$ »	K3 ; K22.	4%
8. Conception « Partition incorrecte »	K5 ; K8 ; K9 ; K10 ; K11 ; K14 ; M3 ; M12.	14,5%
9. Reformulation	K2 ; K13 ; M6 ; M15 ; M16 ; M24 ; M30.	13%
10. Autres	K4 ; M2 ; M10; M11; M22 ; M14 ; M31	13%
11. Non réponses	K1 ; M9; M17; M18 ; M21 ; M23 ; M25 ; M26 ; M29.	16%

Aperçu des conceptions en Terminale S

Quelles évolutions?

- Il y a beaucoup moins de non réponses : cela semble signifier que les élèves de terminale S expriment plus aisément leurs conceptions d'un nombre réel.
- Les conceptions « ***Ensemble de tous les nombres*** » et « ***réaliste*** » prévalent moins qu'en seconde.

De nouvelles conceptions émergent :

- « Complexes non imaginaires ».

- « Vision géométrique »: on peut penser que la manipulation des graphiques en analyse favorise la construction de cette conception.

La conception ***« intervalle »*** reste solidement ancrée probablement parce qu'elle est la seule à être travaillée explicitement en particulier dans la résolution d'inéquations.

Perspectives pour la transition

Quels éléments peuvent faire obstacle à une construction de l'analyse à l'université?

- Beaucoup d'élèves ne distinguent pas le nombre de son écriture.
- Même parmi ceux qui les écrivent formellement , peu d'élèves comprennent les inclusions « successives » des sous-ensembles de ***R***.
- La notion de densité leur est complètement étrangère.

Le silence des programmes sur les nombres a pour conséquence une quasi-absence de travail sur les nombres réels au lycée.

Les constructions historiques par Dedekind et Cantor de l'ensemble ***R*** montrent que les concepts de limite et de continuité dans ***R*** sont indissociablement liés à la structure de corps ordonné complet de ***R***.
Les concepts de limite et de continuité mettent en jeu la construction de ***R*** « sans sauts ni trous »!

Quels endroits dans le programme de terminale S pourraient permettre de faire émerger et évoluer les conceptions des nombres réels?

Perspectives pour la transition

Sur les suites :

Des activité algorithmiques sont menées dans ce cadre.
Approximations de réels (π, e, nombre d'or,…)

Sur la continuité:

Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires.

Loi à densité sur un intervalle:

*On définit alors une variable aléatoire X , fonction de Ω dans **R,** qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I*
*de **R.***

Perspectives pour la transition

Une première observation d'une séance en terminale S d'introduction au théorème des valeurs intermédiaires:

Le problème posé:
a et b sont deux nombres ; soit une fonction f telle que f(a)<0 et f(b)>0.
Peut-on toujours trouver un nombre c entre a et b tel que f(c)=0 ?

Les conceptions exprimées:
-Une fonction est toujours définie sur ***R*** ou sur un intervalle de ***R***: la nature de l'ensemble de définition de *f* n'est pas présente.
-Une fonction n'est définie que si elle peut être exprimée par une formule explicite .
-Le mot ***continu*** émerge spontanément des débats dans les groupes .

Perspectives pour la transition

R est bien pour les élèves observés dans cette classe l'ensemble sur lequel la propriété de la valeur intermédiaire est vraie.

Mais :
-la continuité de ***R*** n'est pas questionnée.
-Pour la majorité des groupes observés, il y équivalence entre la continuité de la fonction et l'existence de solutions.

Comment mettre en question ces deux points précédents?

-proposer des activités qui amènent de la seconde à la terminale à travailler avec des fonctions définies avec une variable qui est un rationnel ou un décimal.

-Utiliser l'algorithmique pour construire des encadrements d'irrationnels par des suites de rationnels.

Perspectives pour la transition

Une deuxième observation d'une séance en terminale S faisant suite à la précédente.

Le problème posé:

Soit f la fonction définie sur R par f (x) = x^3-7.
*1. Montrer en appliquant le théorème énoncé que l'équation f(x)=0 admet une solution unique **c** dans] 1 ; 2[. Quelle est la nature de la solution c obtenue*
2. Proposer une méthode qui permette de déterminer un encadrement de c avec une amplitude « aussi petite que l'on veut » ?

Les conceptions exprimées et les pratiques produites:

- Le mot ***nature du nombre*** n'est pas compris par les élèves.
-Pour une grande majorité des élèves, ***c*** était un nombre décimal .
-Le procédé dichotomique n'est pas spontanément mobilisé.
-L'habitude de manipuler les racines cubiques dans la classe de physique rend la deuxième question sans objet pour les élèves.
- La majorité des élèves associent l'ensemble ***R*** à l'axe des abscisses, mais l'identification à celui des ordonnées n'est pas immédiate.

En guise de conclusion provisoire…

Les connaissances des élèves sur les nombres sont uniquement opératoires et ne leur permettent pas d'accéder à la compréhension des nombres réels.

-Des activités sur les registres d'écriture d'un nombre pourraient aider à dissocier la nature du nombre de son écriture.

-L'accent dans les programmes est mis sur la résolution de problèmes: cela devrait inciter à travailler avec des variables qui soient des entiers , des décimaux ou des rationnels.

-Une construction du concept de nombre réel peut être amorcée au lycée mais elle ne peut se faire que dans le long terme et ne peut faire l'économie de moments d'institutionnalisation. La connaissance opératoire ne peut être détachée de sa conceptualisation.

- Les activités qui favorisent cette construction sont complètement laissées à la charge des enseignants. Il est à craindre que, sans une incitation de l'institution, les contraintes horaires et les hétérogénéités des parcours ne dissuadent de nombreux enseignants de les proposer.

En guise de conclusion provisoire...

Les observations empiriques mettent en évidence des difficultés récurrentes dans l'appropriation par les étudiants des concepts fondamentaux de l'analyse.
Dans leurs travaux de recherche Bloch & Ghedamsi (2005) ont mis en évidence des raisons liées aux différences entre le travail en analyse dans le secondaire et dans le supérieur.

Au moment de la transition lycée - post bac, on passe d'un travail de type algébrique en analyse, reposant sur une approche intuitive du continu (*les nombres réels sont tous les nombres qu'on connaît sauf les complexes*) à un point de vue théorique (*axiomatique*) sans prise en compte explicite des changements conceptuels que cela représente.

En guise de conclusion provisoire…

On peut faire l'hypothèse que les étudiants qui ne construisent pas de manière adéquate la signification des nombres réels en début de formation risquent de rencontrer des difficultés dans l'apprentissage des concepts de l'analyse, ceci étant étroitement relié aux difficultés déjà bien repérées en analyse à la transition Lycée - Université (Chellougui, 2003, Bloch & Ghedamsi, 2005).

On peut également faire l'hypothèse que la fragilité des connaissances sur les liens entre aspects pratiques et aspects théoriques en Analyse aura des effets sur l'application des outils de l'Analyse à d'autres domaines.

Et pourtant, certains élèves sont intéressés…

Question posée par un élève de terminale S spécialité mathématiques en mai 2013:

« Si on choisit un nombre au hasard dans l'intervalle [0;1], quelle est la probabilité d'obtenir un nombre rationnel? »

«-Attends, regarde, là, on a dit f(a) inférieur à 0, f(b) supérieur à 0; donc, si la courbe est continue, elle va nécessairement,... On peut faire ce qu'on veut,...on peut faire le chemin qu'on veut, vous êtes d'accord qu'elle est obligée de passer par 0.
-Oui
- Elle passe d'un truc négatif à un truc positif ; voilà, en fait, t'as deux points et tu sais que ta fonction c'est une ligne ; ben, la fonction, si c'est une ligne qui relie les deux points tu pourras lui faire faire les chemins que tu veux...ça,...ça, comme là il y a la barre des 0, elle est obligée de passer par la barre des 0 »

Retour