Colloque La Réforme des Programmes de Lycée : et alors ?

Lyon – Samedi 25 mai 2013

Atelier B3

Les nombres réels à la transition secondaire /supérieur

.

Viviane Durand-Guerrier et Martine Vergnac

IREM de Montpellier

Bref panorama sur le nombre dans l' enseignement français

A l'école élémentaire, la construction du nombre entier se fait en appui sur les collections discrètes et sur la suite ordonnée des nombres : notion de collections équipotentes - mise en correspondance biunivoque entre une collection à dénombrer et une section commençante de la suite ordonnée des nombres - identification du dernier mot nombre prononcé avec le cardinal de la collection.

La nécessité d'introduire les fractions et les décimaux émerge de la mesure des grandeurs dites *continues,* ce qui n'exclut pas un traitement arithmétique de ces nouveaux nombres.

Les opérations sur les entiers se prolongent.

Les fractions apparaissent comme des opérateurs.

Les décimaux sont utilisés dans le mesurage.

Le liens entre décimaux et fractions décimales est établi:

3, 245 = 3245/1000 = 3+ 2/10 + 4/100 + 5/1000

La droite numérique joue un rôle important

Au cours du collège et du lycée, les élèves sont sensibilisés à la nécessité de considérer des irrationnels, en particulier pour les racines carrées d'entiers qui ne sont pas des carrées parfaits, et pour quelques nombres emblématiques comme π, et apprennent à les manipuler via leurs représentations.

Ils rencontrent des valeurs approchées, essentiellement sous forme décimale, en particulier via les calculatrices.

Au collège, ils sont éventuellement sensibilisés à la notion d’ écriture décimale illimitée des nombres réels; et au fait que les rationnels sont caractérisés par une écriture périodique, et les décimaux par une écriture limitée.

Le rationnel 1/8 peut s’ écrire 0, 125 ; c’ est un décimal.

Le rationnel 1/3 peut s’ écrire 0, $666\underline{6}$; ce n’ est pas un décimal.

√2 n’ est pas un nombre rationnel : il n’ existe pas de nombre rationnel dont le carré soit égal à 2; son écriture décimale n’ est pas périodique.

Dans les anciens programmes, ceci était repris en seconde avec le travail sur les ensembles de nombres.

Ce type de travail est moins présent depuis que les programmes de lycée ont été modifiés.

Extrait du programme de seconde 2002

Contenus	Capacités attendues	Extraits des commentaires
Nature et écriture des nombres. Notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathcal{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Représentation des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. Décomposer un entier en produit de nombres premiers.	On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. On travaillera sur les ordres de grandeur. On donnera un ou deux exemples de limites d'utilisation d'une calculatrice. On fera quelques manipulations de nombres en écriture scientifique. On se limitera à des exemples (du type 56 x 67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit.
Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre.	Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a, a^2, et a^3 lorsque a est positif. Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.	La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.

Extrait du programme de seconde 2009-2010

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.
Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités A.

Sur le continu en mathématiques

L'intuition du continu

(Longo, 1999, The mathematical continuum: from Intuition to Logic)

L'expérience la plus commune du continu est celle du tracé d'une ligne sur une feuille de papier, sans lever le crayon. Les points *disparaissent* dans la trace obtenue ; ils réapparaissent, comme points isolés, lorsque deux lignes se coupent.

Cette intuition est mobilisée par Cauchy dans sa première preuve du théorème des valeurs intermédiaires.

Si une fonction f de la variable x est continue sur un intervalle [a, b], alors pour toute valeur u comprise entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c) = u.

Mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires (Bolzano, 1817)

Bolzano, dans son mémoire de 1817 souhaite donner une preuve du théorème des valeurs intermédiaires ne faisant pas appel à l'intuition géométrique. Il considère qu'aucune des preuves existantes à son époque n'est satisfaisante.

Il donne une définition précise de la notion de fonction continue, mais dans sa preuve, il utilise le théorème de la borne supérieure, comme une évidence. Pour autant, aucune construction des nombres réels n'est disponible à cette époque.

Il faudra attendre Dedekind et Cantor, cinquante ans plus tard, pour une définition précise de l'ensemble des nombres réels.

Le théorème des valeurs intermédiaires met en jeu deux notions de continu : la propriété de l'ensemble des réels et la propriété des fonctions.

La formalisation du continu intuitif de la droite

(*Dedekind, 1872, 2008)*

« Mais il est un fait de la plus haute importance : sur la droite *L* il existe une infinité de points qui ne correspondent à aucun point rationnel. (…) nous pouvons affirmer : la droite *L* est infiniment plus riche en individus ponctuels que le domaine R des nombres rationnels en individus numériques.

(…) il devient alors absolument nécessaire d'affiner substantiellement l'instrument R, construit par la création des nombres rationnels, en créant de nouveaux nombres de telle sorte que le domaine des nombres acquière la même complétude, ou disons le tout de suite la même *continuité* que la ligne droite. »

La formalisation du continu intuitif de la droite

(*Dedekind, 1872, 2008)*

« Etant donné un point déterminé *p* de la droite *L*, tous les points de *L* se répartissent en deux classes P_1, P_2 contenant tous les deux une infinité d'individus; la première classe contient tous les points à gauche ; la seconde classe contient tous les points à droite. Le point *p* peut-être au choix rangé dans la première ou la seconde classe. Dans tous les cas, le partage de la droite *L* en deux classes ou portions P_1, P_2 est tel que tout point de la première classe P_1 est situé à gauche de tout point de la classe P_2. » (p.68)

La formalisation du continu intuitif de la droite

(*Dedekind, 1872, 2008)*

« Je trouve l'essence de la continuité dans la réciproque, donc dans le principe suivant :

Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes telles que tout point de la première classe est situé à gauche de tout point de la seconde classe, alors il existe un et un seul point qui opère cette distribution de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions. » (p. 72)

La formalisation du continu intuitif de la droite

(*Dedekind, 1872, 2008)*

Il s'agit de compléter le domaine discontinu des nombres rationnels *Q* pour obtenir un domaine continu.

Par analogie avec la droite, Dedekind définit des coupures dans *Q* : deux classes A_1 et A_2 telles que tout nombre a_1 de la première classe est plus petit que tout nombre a_2 de la seconde classe.

Tout nombre rationnel opère une coupure de *Q*

Il existe une infinité de coupures de *Q* qui ne sont pas opérés par des nombres rationnels.

Etant donné un entier n qui n'est pas un carré parfait, la coupure ci-dessous n'est pas opérée par un rationnel:

$$A_1 = \{x \in Q+/ \ x^2 \leq n\} \quad \text{et} \quad A_2 = \{x \in Q+/ \ x^2 > n\}$$

La formalisation du continu intuitif de la droite

(*Dedekind, 1872, 2008)*

Le nouveau système R ainsi construit est un ensemble totalement ordonné unidimensionnel, qui possède la continuité:

« IV. Si le système R de tous les nombres réels se subdivise en deux classes $R1_1$, R_2 telles que tout nombre a_1 de la classe R_1 est plus petit que tout nombre a_2 de la classe R_2, alors il existe un nombre et un seul α par lequel est opéré ce partage. »

L'ensemble ainsi construit est complet au sens où la réitération du procédé des coupures ne produit pas de nouveaux nombres. Il possède la propriété de la borne supérieure.

La formalisation du continu intuitif de la droite

Dedekind,

La construction de Dedekind est un exemple de l'élaboration d'un concept théorique qui s'appuie sur une intuition empirique.

Cette construction s'inscrit dans la tradition euclidienne qui compare les grandeurs, commensurables ou non, à l'aide des équimultiples (en termes modernes de rationnels) ; son innovation consiste en la création de nouveaux nombres, qui permettent en une seul fois de combler toutes les lacunes de l'ensemble des rationnels, considéré comme déjà créé, ceci en évitant le cercle vicieux qui consisterait à opérer sur des nombres non encore créés.

La complétude ainsi obtenue est une propriété remarquable de l'ensemble des nombres réels, qui ne peut plus être étendu par un procédé de ce type.

Enseignement des nombres réels à la transition lycée-université.

En début d'université, une axiomatique de l'ensemble des réels est généralement introduite et la propriété de la borne supérieure (*tout partie majorée non vide de l'ensemble des nombre réels admet une borne supérieure*) et le théorème sur les suites de Cauchy (*toute suite de Cauchy est convergente dans l'ensemble des nombres réels*) sont énoncés, le plus souvent sans qu'une construction ne soit proposée.

Des exercices théoriques sont proposés ; le plus souvent le lien avec les résultats numériques associés n'est pas traité explicitement en cours, ni même en TD.

Un travail est parfois conduit sur l'écriture décimale illimitée afin de stabiliser les résultats vus au lycée.

On pourrait faire l'hypothèse que les étudiants arrivent du lycée avec des connaissances stabilisées sur les nombres réels. Les résultats des recherches et de diverses enquêtes montrent que ce n'est pas le cas.

Sur les conceptions des élèves et des étudiants sur les nombres réels

Un questionnaire proposé en terminale S et en licence

Quelles réponses attendriez-vous à la question 2 de ce questionnaire de la part de vos élèves ou étudiants ?

Merci de préciser le niveau considéré depuis la seconde jusqu'à la Troisième année de licence et les masters MEF.

Travail en groupe mixte secondaire/supérieur sur un corpus recueilli auprès d'élèves et d'étudiants

Nous vous proposons de réfléchir aux questions ci-dessous et de préparer une synthèse pour un bilan collectif.

Quelles sont, selon vous, les conceptions qui se dégagent des réponses des élèves et des étudiants ?

Quelles hypothèses pourraient expliquer que certaines conceptions persistent jusqu'en licence ?

Identifiez-vous des évolutions du lycée à la licence ?

Quels éléments des programmes de lycée vous semblent pouvoir permettre un travail favorisant des évolutions vers la transition ?

Vous disposez d'une heure.

Exemple 2 – discret *versus* dense

Pontille & al. (1996) Et pourtant, ils trouvent, repères IREM, 24

Un problème qui soulève la question du continu

On considère une application f de $\{1, 2,\ldots n\}$dans $\{1, 2, \ldots n\}$, où n est un naturel non nul. On suppose f croissante ; montrer qu'il existe un entier k tel que $f(k) = k$; k est appelé point fixe.

Etudier de possibles généralisations aux cas suivants, avec f croissante:

- $f : D\cap[0, 1] \to D\cap[0, 1]$ D est l'ensemble des décimaux
- $f : Q\cap[0, 1] \to Q\cap[0, 1]$ Q est l'ensemble des rationnels
- $f : [0, 1] \to [0, 1]$

ou tout autre généralisation.

Le contexte de l'observation

- Le dispositif : MATH.en.JEANS, en 1993-1994
- En tout début d'année scolaire, un mathématicien a proposé dans deux lycées de Lyon quelques problèmes de recherche; des étudiants volontaires choisissent un problème et travaille en petit groupe tout au long de l'année. Il y a des séminaires organisés pendant l'année et en fin d'année
- Ils sont accompagnés par leurs professeurs et par le mathématicien qui a proposé le sujet.
- Les auteurs de l'article (Pontille & al. 1996) les ont observés; enregistrements audio et video ; interview d'étudiants; recueil d'écrits.

Le problème dans les entiers naturels

- Essai avec quelques fonctions - renforce la conjecture - ne conduit pas vers une preuve
- Choisir une fonction générique - donner des petites valeurs à n. Ceci peut faire apparaître une contradiction :

"Si pour tout entier k, $f(k) \neq k$, alors $f(n) > n$"

Par exemple pour $n = 4$

On suppose $f(1) \neq 1$, $f(2) \neq 2$, $f(3) \neq 3$, $f(4) \neq 4$.

On a $f(1) \geq 2$; $f(2) \geq f(1)$ et $f(2) \neq 2$, d'où $f(2) \geq 3$;

de même $f(3) \geq 4$ et $f(4) \geq 5$. Mais $f(4) \leq 4$.

Ceci se généralise pour n quelconque.

Au bout de quatre semaines, les élèves écrivent une preuve par l'absurde, prenant en compte explicitement la question de la généralité.

Généralisation dans l'ensemble des décimaux

- La structure logique de l'énoncé est semblable.
- La structure de la preuve est très différente.
- La modification de la nature des nombres disqualifie le mode de preuve élaboré précédemment.
- Rechercher une autre preuve fait émerger chez les élèves un questionnement sur les propriétés fondamentales des décimaux.

Premières explorations par les élèves

Les élèves commencent par utiliser le même schéma de preuve basé sur le fait que chaque entier sauf 0 a un successeur. Ceci les conduit à se poser les questions suivantes :

1. Peut-on considérer qu'il y a une distance fixe entre deux décimaux ?
2. Peut-on trouver un plus petit nombre décimal positif ?
3. Est-ce que ces deux questions sont liées ou indépendantes.

Les élèves finalement concluent qu'il n'y a pas de plus petit décimal positif, ni de différence fixe entre deux décimaux.

Une nouvelle question

Est-ce possible que le graphe d'une fonction croissante de l'ensemble D des nombres décimaux dans lui-même coupe la première bissectrice en dehors de D.

Pour traiter cette question, les élèves produisent diverses représentions discrètes des nombres décimaux

Alternance de nombres décimaux et de nombres non décimaux / Représentation de carrés bicolore.

« On a vu que dans la droite décimale, il y a des trous »

« En fait, on aura une ligne pointillée avec tantôt des décimaux, tantôt des rationnels, tantôt des réels qui s'entremêleront complètement et c'est pour ça qu'il faut qu'on relie nos points et qu'on travaille en courbe sinon on pourra rien faire. »

Les conclusions des élèves

(cinq mois plus tard)

- Après de nombreux échanges, ils concluent qu'avec les nombres décimaux, il est possible que l'intersection soit sur « un trou ».
- Retournant à la question initiale, ils cherchent un contre-exemple.
- Ils cherchent un contre-exemple avec des fonctions "simples et concrètes", et produisent un contre-exemple avec une fonction affine et un rationnel non décimal, et un contre-exemple avec une fonction quadratique et un irrationnel, résolvant ainsi le cas de l'ensemble des rationnels.
- Ils n'auront pas le temps d'aborder la question dans R. Dans c e cas l'existence d'un point fixe est assuré par la théorème de la borne supérieure.

Des difficultés encore présentes en L3 ou en M1

Parmi les étudiants de L3 ou de M1, certains se posent la question d'un espace fixe entre deux décimaux. Ils ont pourtant étudié la densité et savent que D est dense dans lui-même.

Ils éprouvent des difficultés à élaborer les contre-exemples.

Concernant le cas réel, de nombreux étudiants pensent que le résultat est faux car « *pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, il faut que la fonction soit continue* ».

Très peu pensent à utiliser le théorème de la borne supérieure pour établir la preuve.

N.B. Ce résultat est un cas particulier d'un théorème de point fixe dans les treillis complet (Théorème de Knaster-Tarski).

Références citées

Bloch I., Ghedamsi, I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie, *Petit x*, 69, 7-30

Chellougui, F. (2003), *Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien*, Petit X n°61, pp.11-34.

Dedekind, R. (2008) *La création des nombres*, Traduction H. Sinaceur, Paris: Vrin

Durand-Guerrier, V. (2012) Sur la question du nombre et du continu dans les apprentissages mathématiques, M. Ouelbani (dir.) *Des mathématiques à la Philosophie, regards croisés Didactique, Histoire et Philosophie*, Tunis 10 et 11 décembre 2010.

Longo, G. 1999, The mathematical continuum: from Intuition to Logic in Petitot J. Varela F.J., Pachoud B., Roy J.M. (eds) *Naturalizing Phenomenology*, 401-425, Standford university Press.

Pontille, M.C., Feurly-Reynaud, J., Tisseron, C.,1996, Et pourtant, ils trouvent…, *Repères IREM*, 24, 11-34.