Applications affines préservant l'excentricité des coniques.

Le plan P considéré est euclidien, R = (O, i, j) désigne un repère orthonormé de P.
On note P la direction de P , B =(i, j).

Une application affine qui transforme toute conique d'excentricité e ($e \neq 1$) en une conique de même excentricité (pour toute e) est une similitude.

Quitte à composer avec une translation on peut se borner à considérer des coniques de même centre O.

- Analyse :

Remarque : une telle application est un élément du groupe affine car transforme un repère (trois points non alignés d'une conique) nécessairement en un autre repère.
D'autre part , comme on a f(O) = O, $f \in$ G.L.(P).

Excentricité et valeurs propres.

Soit (E) une ellipse , ((H) une hyperbole).
Il existe un repère tel que (E) admette pour équation : + = 1, a > b > 0.
e = où c =
Il existe un repère tel que (E) admette pour équation : - = 1,
e = où c =
Dans les deux cas il existe un repère tel que :
une équation de (E) ((H)) est ${}^tX\,A\,X = 1$ où A = où $\varepsilon = 1$ pour (E) , -1 pour (H).
e^2 =
Si on note spec A = $\{\lambda, \mu\}$ $e^2 = 1 -$, $\lambda + \mu$ = tr A , det A = $\lambda\,\mu$.

Soit f une transformation affine répondant à la question : $f \in$ G.L.(P).d'après la remarque.
On identifie $N \in P$ avec X = = mat (, B) $\in$ M(2, 3) = F ; M = mat (f, B)
Soit (C) une conique .
$N' \in f(C)$ si et seulement si il existe $X \in F$, ${}^tX\,A\,X = 1$ et $X' = M\,X$
$N' \in f(C)$ si et seulement si , ${}^tX'\,{}^tH\,A\,H\,X' = 1$ où $H = M^{-1}$.

On peut se limiter au cas de la conservation de toute ellipse en une ellipse de même excentricité.

On fixe une ellipse (E) dont la matrice associée dans R est A =
$e^2 = 1 - \lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. quelconque.
f(E) = E' est relative à $A' = {}^tH\,A\,H$, spec A' = $\{\lambda', \mu'\}$ avec :
$\lambda' + \mu'$ = tr A' = tr ${}^tH\,A\,H$, $\lambda'\,\mu'$ = det A' = $\lambda\,(\det H)^2 = \lambda\,h^2$ où $h = |\det H|$
$e'^2 = 1 -$ $= e^2 = 1 - \lambda$: $\lambda =$ d'où $\lambda' = \lambda\,\mu'$ (*).
(**)

A étant symétrique définie positive , ${}^tH\,A\,H$ l'est aussi donc tr ${}^tH\,A\,H > 0$
λ' et μ' sont strictement positives , donc $\mu' = h$, d'après (**).

On obtient donc : pour tout λ avec $0 < \lambda < 1$:
$\lambda' = \lambda\,\mu'$ (*) et d'après (**)
$\mu' = h$, $\mu'(1+\lambda) = \mathbf{h\,(1+\lambda)} = \mathrm{tr}\,{}^t H\,A\,H = \mathrm{tr}\,A\,H\,{}^t H = \mathrm{tr} \quad = \boldsymbol{\alpha\,\lambda + \beta}$
où l'on a posé $H\,{}^t H =$
ce qui assure $\mu' = h = \alpha = \beta$ et $h^2 = (\det H)^2 = \alpha\beta - \delta^2$ donc $\delta = 0$.
On a donc $H\,{}^t H = \; = h\,I_2$.
$H\,({}^t H) = I_2$ donc $H = O \in O(2, 3)$.
$H = M^{-1} = \; O$ donc f est une similitude.

- Synthèse.

La réciproque est aisée.