

Contribution au débat sur l'enseignement de la géométrie CS des IREM du 8 juin 2012

Catherine Taveau *Co-responsable de la COPIRELEM - IUFM d'Aquitaine*

Pour commencer une petite anecdote

Formatrice de mathématiques en IUFM, je commençais le module de didactique de la géométrie avec les PLC2 par la question suivante :

« *Supposez que je sois ministre de l'éducation nationale et que je vous annonce que l'an prochain, l'enseignement de la géométrie est supprimé des programmes de mathématiques du collège et de la classe de seconde. Vous, qui êtes enseignants, quels arguments avez-vous pour contester ou pour approuver cette décision ?* »

À mon grand désarroi, j'ai pu régulièrement constater que la disparition de la géométrie se faisait sans trop de difficultés car ces enseignants stagiaires de mathématiques ne trouvaient pas d'arguments convaincants pour la défense de ce domaine des mathématiques. Ce qui me posait toujours la question du sens pour ces enseignants de l'enseignement de ce domaine des mathématiques.

Concernant l'enseignement de la géométrie à l'école primaire.

Dans ce qui est attendu du point de vue des curricula, l'enseignement des objets de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace représente 20% du temps d'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Du point de vue de son enseignement, voici une partie du texte que j'ai écrit dans le cadre de la réalisation d'outils multimédia¹. Ce texte résume des apports théoriques et didactiques sur l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et met à défaut une représentation qui associerait la géométrie de l'école primaire uniquement à des compétences de visualisation et de constructions.

Une interprétation en terme de travail géométrique

L'école élémentaire a pour but, avons-nous dit, de mettre en place les bases de la Géométrie I. Pour bien comprendre cette mise en place il faut en revenir constamment à ce qui fait l'essence de l'activité géométrique, à savoir, s'appuyer sur une coordination de la vue, de l'action et de la réflexion sur des objets visibles et constructibles. Ceci renvoie aux trois processus cognitifs complexes que sont la *visualisation*, la *construction* et le *raisonnement*. Chacun de ces processus nécessite une étude approfondie qui peut relever d'approches cognitivistes. Mais, et c'est sans doute un de ses intérêts principaux, la pratique géométrique propose toute une gamme d'activités qui développe la maîtrise de ces processus cognitifs. Ainsi, nul besoin d'être psychologue pour enseigner et faire de la géométrie, mais par contre, il sera intéressant pour le professeur d'envisager l'activité géométrique à travers le prisme des processus cognitifs précédents ne serait-ce que pour en comprendre la difficulté et accompagner l'élève dans son apprentissage.

La mise en place du travail de la Géométrie I à l'école s'appuie de manière traditionnelle sur des types d'activités centrés sur des objets en insistant sur leur description, leur construction et leur reconnaissance. Le but est ainsi de parvenir à la création d'un concept qu'on pourra qualifier de figural

¹ Fenichel M. et Taveau C., *Enseigner les mathématiques au cycle 2, Deux situations d'apprentissage en images* : « Combien de bûchettes » - « Le petit moulin », SCEREN, CRDP Créteil, 2006.

Fenichel M. et Taveau C., *Enseigner les mathématiques au cycle 2, Deux situations d'apprentissage en images* : « Les enveloppes » - « Le cercle sans tourner en rond », SCEREN, CRDP Créteil, 2008

tant il est lié à l'objet réel et visible qui lui a donné naissance. Au début du cycle III, l'objet initial renvoie encore en grande partie à un concept quotidien au sens de Vygotski¹, et tout l'effort du professeur va être de continuer à le transformer en concept scientifique en s'appuyant sur les connaissances des élèves et surtout sur la pratique d'activités géométriques de base. Ainsi le rond (concept quotidien) va définitivement devenir un cercle (concept scientifique). Dans cet exemple, les termes différencient les concepts mais ce n'est plus le cas pour le carré où concepts quotidien et scientifique portent le même nom tout en étant aussi éloignés l'un de l'autre que le rond du cercle.

Entrer dans la géométrie

Le passage d'un concept naturel comme celui de rond à celui plus élaboré de cercle suppose la mise en place d'un travail géométrique que nous avons développé dans nos séances sur « *le cercle sans tourner en rond* ». Pour cela, nous avons joué sur les différents processus cognitifs constitutifs de l'activité géométrique à savoir la visualisation, la construction et le raisonnement déductif. La maîtrise simultanée de ces trois aspects du travail géométrique suppose une mise en place progressive et constitue l'objectif essentiel de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire.

Voir pour reconnaître

C'est la première entrée dans le champ de l'activité géométrique, il faut pouvoir désigner les objets sur lesquels on travaille avec les termes standards du domaine. Pour cela il ne suffit pas de voir simplement mais aussi d'organiser sa vision grâce à un premier repérage des propriétés invariantes d'une figure à l'autre. De manière implicite l'élève va organiser des classes d'équivalence autour d'objets de référence. Se dégage ainsi une première notion de la figure comme objet générique illustré par des objets particuliers. Pareil au naturaliste du XVIIIe siècle, l'élève explore le monde des objets géométriques. C'est le temps des pratiques ostensives de la part du maître: il désigne et montre un objet avec le doigt, comme on le fait pour désigner un chien ou un chat, sans pour autant le caractériser. Il est nécessaire d'assumer cette ostension en étant conscient que l'objet montré est typique et non prototypique. Ainsi « ce triangle » particulier s'inscrit dans le processus de création de la classe « triangle » qui va réunir tous les triangles quelle que soit leur forme. Cela n'exclut pas que, petit à petit, les élèves pourront définir les objets par des propriétés. Ces dernières reposeront elles-mêmes, dans un premier temps, sur une éducation du regard de l'élève sur la figure. Ce dernier doit s'habituer à la décrire en prenant en compte des sous-figures et des sous-objets, comme les points (sommets) ou les segments (côtés). L'importance de ce travail de déconstruction et de reconstruction dimensionnelle est fondamentale dans l'initiation à la géométrie comme le souligne Raymond Duval². Cette phase va être intimement liée à l'activité de construction effective des objets. Ce travail d'éducation du regard avait notamment fait l'objet d'activités spécifiques au Cycle II (la situation *du petit moulin*³). Il est poursuivi ici mais avec une insistance plus marquée sur les propriétés géométriques des objets qui vont progressivement guider le regard de l'élève.

Construire pour expérimenter

Lorsqu'on interroge les jeunes élèves sur ce qu'est pour eux la géométrie, leurs réponses la fait apparaître comme le domaine des tracés, des constructions et de l'usage plus ou moins délicat d'instruments comme l'équerre et la règle graduée avec son cortège de mesures ou encore le compas. Et de fait, préparer le travail géométrique c'est aussi, c'est d'abord, développer l'activité du géomètre constructeur. Cette géométrie passe par l'appropriation des instruments et en ce sens l'activité sur le cercle est exemplaire du type d'évolution qui conduit au concept géométrique. Le compas et son usage vont se lier intimement à la notion de cercle dans un processus qualifié d'instrumentalisation. L'appropriation des outils de la géométrie suppose une maîtrise à la fois gestuelle et conceptuelle de l'outil. Savoir utiliser un compas, c'est bien sûr d'abord savoir le manipuler (le DVD concernant le cycle 2 montre que cela est un travail à part entière), mais c'est aussi connaître ses usages et donc en savoir un peu plus sur le cercle et sur le report de longueur. Cette fois, l'activité de construction mise en mot va enrichir la visualisation et l'entrée perceptive.

Mais un autre aspect apparaît, construire peut servir à prouver: il s'agit, bien sûr, d'une preuve constructive d'existence. Euclide appelait « problèmes » ces exercices qu'une construction résolvait. En Géométrie I, la preuve dont il s'agit est une preuve expérimentale qui suppose la mise en place d'un travail sur l'approximation. C'est cette nécessité qu'expriment les enseignants lorsqu'ils parlent

de la rigueur et de la précision des tracés. Mais qu'est-ce qu'une précision non mesurée ? La nécessité de mesurer les grandeurs qui était apparue au Cycle II, doit, au Cycle III, être questionnée par les propriétés des objets. Mesures et propriétés se complètent et se contrôlent et la seule perception même instrumentée n'est plus garante de la vérité, d'où l'introduction et l'usage de dessins à main levée qui permettent la mise en valeur des propriétés pertinentes pour résoudre les différents problèmes géométriques proposés dans notre série d'activités sur le cercle. Ainsi, se met en place un travail de mise à distance à la fois perceptive et théorique qui va trouver son achèvement dans le travail de preuve par le discours et par les mots. Cette mise à distance théorique s'accompagne d'une mise à distance bien réelle des objets sur lesquels travaillent les élèves : ainsi le fait de devoir raisonner sur un cercle dessiné au tableau sans pouvoir se déplacer pour mesurer, permet aux élèves de mobiliser les propriétés du cercle nécessaires à la preuve.

Raisonner pour prouver

Il n'est pas de géométrie sans mots, disions-nous, car ils sont nécessaires pour argumenter et convaincre : convaincre l'autre bien sûr mais soi-même aussi. Tout le travail effectué autour de la visualisation et de la construction participe de cette mise en place du travail géométrique. La familiarité avec les objets développe l'intuition du géomètre en herbe. Grâce à elle, l'enfant se bâtit une théorie première des objets. C'est un avantage parce que cela lui permet de dire des choses, de croire que certaines propriétés existent et sont vraies et ainsi de mettre en place des théorèmes en acte. Cela peut être un inconvénient parce que ce qu'il a ainsi conçu pourra être faux ou surtout parce que cette intuition va lutter contre la nécessité de prouver. L'intuition est fondamentale en géométrie car c'est sur elle que se fonde tout le développement de la pensée géométrique. Mais un autre versant théorique, appuyé sur le raisonnement déductif, est bien sûr tout aussi fondamental. On ne voit souvent derrière le raisonnement que la pure déduction identifiée à la démonstration et qui n'a formellement pas sa place à l'école.

Par les situations proposées dans « *le cercle sans tourner en rond* », nous avons voulu présenter une possibilité d'entrer dans la Géométrie II (celle qui sera exigée au collège) par des îlots démonstratifs. La résolution des problèmes s'appuie sur des arguments déductifs liés aux propriétés géométriques qui ont été élaborées. Mais il s'agit bien d'un passage progressif de la Géométrie I à la Géométrie II, puisque la validation peut également se faire par une construction et/ou par le recours à la mesure.

Il est important de pouvoir valider et prouver de différentes manières en Géométrie I. Il faut garder une vision assez ouverte sur l'idée de preuve et de validation tout en insistant sur l'importance du discours articulé sur des propriétés, et donc sur la nécessité d'avoir des mots précis pour étayer la preuve. C'est ce qui va favoriser l'argumentation, et plus tard le raisonnement démonstratif.

Des situations et des outils pour mettre en place le travail géométrique

De manière classique, l'enseignement de la géométrie à l'école primaire a su constituer un espace propice au travail géométrique en proposant trois grands types d'activités sur les objets géométriques. Dans les instructions officielles ces activités sont décrites par des verbes : décrire, construire, reproduire et représenter. Ces activités sont étroitement liées les unes aux autres.

Les activités de description doivent permettre de dégager le vocabulaire et les propriétés spécifiques liées aux figures de façon à les reconnaître, les construire ou à les représenter.

Les activités de construction et de reproduction mettent en œuvre la maîtrise par les élèves des instruments de dessin et vont pouvoir s'appuyer sur des textes, sur l'observation et l'analyse des objets ou sur leur schématisation.

Enfin les activités de représentation concernent plus directement le passage de l'espace au plan mais aussi tout le travail d'évocation et d'abstraction à partir de l'objet grâce aux procédés de codage ou de schémas traditionnels.

Ces activités ne se conçoivent pas à l'école élémentaire sans une étroite relation avec les supports et les outils de dessin géométrique. Le professeur va pouvoir jouer sur leur diversité pour provoquer des

procédures de résolution différentes dans les activités précédentes. Il s'agit donc pleinement de variables didactiques.

Ainsi les supports papier comme le papier quadrillé et le papier pointé (mailles de formes diverses) sont des supports d'emploi facile pour tracer des droites perpendiculaires, des droites parallèles. Ils permettent de reporter ou de comparer certaines longueurs de segments dont les extrémités sont les nœuds du réseau. Ils permettent aussi des activités de repérage et on peut les utiliser pour approcher la notion de transformation géométrique. Néanmoins, leur utilisation masque le recours aux propriétés géométriques dans les activités de construction ou de reproduction. Les élèves peuvent réussir à reproduire et à construire des figures géométriques sur du papier quadrillé et échouer à ces mêmes activités sur papier uni. Celui-ci engage davantage les élèves dans une analyse géométrique de l'objet. Dans les activités de construction, il oblige notamment les élèves à utiliser les propriétés géométriques des objets.

Quant aux instruments, le compas servira à reporter des longueurs, tracer des cercles et des arcs de cercle, la règle non graduée permettra de tracer des droites passant par deux points, de vérifier l'alignement de trois points ou plus, de tracer des segments dont les extrémités sont connues, la règle graduée permettra de tracer des segments de longueur donnée ou de mesurer approximativement la longueur d'un segment déjà tracé. L'équerre servira à tracer des angles droits et des droites perpendiculaires. Elle aidera à vérifier qu'un angle est droit ou que deux droites sont perpendiculaires. Ainsi, tous ces instruments portent et développent l'idée de propriétés dans l'action de construction et montrent que celle-ci est étroitement liée au raisonnement et à la visualisation dans la mise en place d'un espace de travail géométrique riche et harmonieux. En ce sens, le cercle est un des objets géométriques les plus riches qu'offre l'école élémentaire puisqu'il intègre toutes les facettes des figures géométriques et des instruments de construction que nous venons d'évoquer.

Mais la réalité des pratiques quotidiennes à l'école primaire

L'enseignement de la géométrie n'est pas « la tasse de thé » des enseignants de l'école primaire.

En effet :

1. ceux-ci se sentent moins à l'aise dans les contenus géométriques que dans les activités numériques,
2. ils ont souvent une idée d'un enseignement type « leçon de choses »,
3. ils développent une dimension statique des objets géométriques au détriment d'une dimension dynamique.
4. Ils disent proposer peu d'activités riches qui nécessiteraient beaucoup de matériel et beaucoup plus de temps de préparation.

Paradoxalement à cela, on observe une très grande motivation des élèves lors d'activités de géométrie de qualité. L'acquisition de concentration et de rigueur peut se faire par des activités de reproduction de figures complexes qui mobilisent sans soucis tous les élèves.

Le rôle du langage prend une dimension importante et la richesse de la géométrie prend toute sa place dans des projets de classe alliant différentes disciplines comme *géométrie et arts visuels*, *géométrie et technologie* (construction de musée des formes, construction de jeux de géométrie de l'espace), *géométrie et géographie* (construction de maquettes), *géométrie et littérature* (albums géométriques) etc...

Le rôle de la formation des maîtres

La formation des enseignants dans ce domaine est cruciale, encore plus que dans le domaine numérique.

Les enseignants du primaire ont trop fréquemment des souvenirs douloureux avec la géométrie du collège qui a souvent été pour eux un *non retour* vers les mathématiques, voire un blocage définitif.

Dans le cadre de la formation, nous avons à leur redonner du sens, du plaisir et des connaissances géométriques. Le recours à l'histoire et l'épistémologie est une aide importante et le recours aux activités géométriques (aussi bien en 2D qu'en 3D) est essentiel à la construction de compétences professionnelles nécessaires pour leurs futurs élèves.

Actuellement à la COPIRELEM, après avoir fini notre chantier sur l'enseignement du calcul mental à l'école primaire (*brochure disponible au colloque de juin 2012*), nous nous sommes attelés au chantier des connaissances géométriques nécessaires et indispensables pour un étudiant qui se destine à devenir professeur des écoles.

Dans ce cadre de réflexion, nous construisons des parcours possibles de situations didactiques de formation permettant de redonner du sens aux savoirs géométriques et de modifier des représentations négatives de son enseignant.

Pour finir dans cette contribution, je voudrais vous faire partager un grand moment de bonheur que j'ai ressenti l'an dernier avec mes étudiants landais de M1.

J'avais la responsabilité du groupe M1 en grande difficulté en maths, ce qui était vraiment le cas, et en début d'année universitaire, je m'étais demandée ce que j'arriverai à faire vu la moue inscrite sur leur visage aux premiers cours.

En février 2011, je propose un module de 24h que j'intitule « *la géométrie dans tous ses états* ». Beaucoup des étudiants les plus en difficultés s'y sont inscrits et ont développés des compétences géométriques que jamais ils n'auraient soupçonnées.

L'évaluation du module était la réalisation d'une exposition interactive, contenant les différents thèmes du travail (transformations du plan, pavages et frises), géométrie dans l'espace (les solides).

Ce qui m'a le plus touché c'est de voir le bonheur de mes étudiants animer les différentes activités réalisées lors de l'inauguration de cette exposition avec tous les autres étudiants et enseignants du site. Pour eux, une autre vision de la géométrie était construite.