Quelques remarques sur le rôle de la géométrie dans l'enseignement secondaire

Valerio Vassallo

Je crois qu'il nécessaire d'exercer les élèves à traiter par eux-mêmes un assez grand nombre de questions géométriques, et l'on peut justifier cette assertion par les remarques qui suivent.

1° L'exposition synthétique des théorèmes d'un cours élémentaire ne développe pas l'esprit de recherche, car rien ou peu n'est laissé à l'initiative de l'étudiant et même du professeur. J'ai expérimenté cette assertion en posant des questions naïves à plusieurs de mes collègues, du secondaire ou du supérieur. Un exemple vaut mieux que mille allusions. On peut parler du fait de partager en deux parties d'aires égales une configuration donnée, par le tracé d'une seule droite ; par exemple un carré, un rectangle ou toute autre figure simple mais régulière. Mais lorsque j'interroge mes collègues sur la manière de partager un quadrilatère quelconque en deux parties de même aire la surprise est d'autant plus grande que la formulation de la question est simple. Rarement les collègues – et moi-même aussi jusqu'à un certain jour – se sont posé la question. Pourtant celle-ci est là, près de nous, lorsque l'on s'interroge sur le partage en partie d'aires égales d'un cercle, un carré, un rectangle... Faire un pas de plus, c'est-à-dire s'intéresser à un quadrilatère quelconque est difficile, même pour des professionnels. Dans ce sens je dis qu'il est souhaitable pour les élèves et pour les professeurs de traiter un grand nombre de problèmes. Pour éviter tout malentendu, il faudra bien rédiger une solution, sous forme de démonstration, du problème posé.

2° L'extrême variété des exercices géométriques et l'absence de toute méthode assez générale ou du moins assez pratique qui conduise d'une manière inévitable à la solution d'une question nouvelle, exigent que les élèves (et les professeurs) se livrent à de nombreuses recherches, s'ils veulent se préparer sérieusement à tenir tête à l'imprévu. C'est cet état d'esprit de recherche et d'ouverture à un champ (presque) infini de problèmes offerts par la géométrie élémentaire que je souhaite mettre au centre de l'attention.

3° Mais pas seulement. Je pense qu'un des attraits de l'école est celui de pouvoir y découvrir et développer son propre talent créateur ou, plus concrètement et plus simplement, ses propres capacités à prendre des initiatives. Pièce centrale mais profondément méconnue du fonctionnement de chaque être humain, la créativité est sollicitée sitôt qu'il s'agit, dans la vie personnelle et professionnelle, de résoudre de nouveaux problèmes ou de s'adapter avec souplesse aux évolutions environnementales. Cette créativité est un des moteurs (avec la curiosité) sinon le moteur premier de la croissance culturelle et de la croissance (lire maturité) d'un individu. Qu'en est-il pourtant de sa compréhension ? Je ne suis pas spécialiste de ce domaine. Je peux toutefois dire que l'exercice de la géométrie peut participer, à travers l'étude de ses nombreuses facettes, au développement de la créativité. Dans l'essai sur « L'invention mathématique » H. Poincaré affirme : « La genèse de l'invention mathématique est un problème qui doit inspirer le plus vif intérêt au psychologue. C'est l'acte dans lequel l'esprit humain semble le moins emprunter au monde extérieur, où il n'agit ou il ne paraît pas agir que par lui-même et sur lui-même, de sorte qu'en étudiant le processus de la pensée géométrique, c'est ce qu'il y a de plus essentiel dans l'esprit humain que nous pouvons espérer d'atteindre».

4° Le champ des méthodes utilisées en géométrie est assez vaste pour encourager son étude. La méthode d'analyse et de synthèse. Cette méthode est très générale, mais par le fait même qu'elle s'applique à un grand nombre de questions, il en résulte qu'elle ne dispense pas de chercher des méthodes particulières, des procédés spéciaux pour traiter rapidement certains groupes d'exercices.

La méthode des lieux géométriques. Il s'agit des méthodes qui, tout en gardant leur formulation géométrique, permettent de faire le lien avec l'algèbre et de comprendre par exemple la naissance de certains objets à la frontière entre la géométrie et l'analyse (je pense par exemple aux courbes et aux surfaces).

L'emploi de figures auxiliaires. C'est une méthode presque indispensable. La plupart des questions exigent le tracé de certains segments, de certains points symétriques par rapport à d'autres ou l'intervention du projeté orthogonal d'un point. Nous sommes, il me semble, au cœur de la créativité dont je parlais plus haut.

L'intervention des transformations, les plus simples, comme les symétries axiales – même en passant par les cas d'égalité ou les cas des similitudes – reste un outil fondamental et élégant qui n'avait pas échappé à Euclide lui-même.

La méthode algébrique offre des ressources qu'on aurait grand tort de négliger ; elle fournit, pour un grand nombre de questions, des solutions parfois peu élégantes, il est vrai, mais toujours faciles à imaginer. L'apparition d'équations algébriques du premier, second... degré peut parfois mettre l'élève plus à l'aise et offrir l'occasion d'apprécier la méthode de résolution des équations algébriques, passant par des formules démontrées auparavant ou par d'astucieuses méthodes liées à la factorisation des polynômes.

L'utilisation des formules de trigonométrie peu aussi intervenir et donner l'occasion dans de nombreux cas d'apprécier certaines formules dont on ne voyait pas l'utilité au moment de leur première rencontre. La trigonométrie joue un grand rôle par exemple dans les calculs des distances inaccessibles et dans bien d'autres cas, comme par exemple dans certains calculs en astronomie.

Les Maxima et les Minima, traités par des moyens à peu près exclusivement géométriques sont un avant-goût d'un travail qui sera fait au Lycée à l'aide de l'analyse et du calcul différentiel en particulier. Les problèmes isopérimétriques offrent un bel exemple de ce que je veux dire.

Il y a des chapitres que l'on n'a pas fini d'explorer dans l'enseignement de la géométrie et qui parfois ont été proposés dans des programmes puis ont disparu. Je pense à des thèmes comme l'étude des polygones et des pavages du plan. A ma plus grande surprise, je découvre que les professeurs savent rarement pourquoi les manuels ne s'intéressent qu'à sept types de quadrilatères (le carré, le losange, le rectangle, le parallélogramme, le cerf-volant, le trapèze isocèle et le quadrilatère asymétrique) ou qu'avec un quadrilatère quelconque (convexe) on peut paver le plan ou bien encore qu'il y a trois classes bien connues d'hexagones qui pavent le plan mais que pour les pentagones, le problème de déterminer ces classes, reste une question encore ouverte.

Les expériences menées dans les classes ou en formation par le groupe de l'IREM de Lille ou par la Cité des Géométries montrent que le goût pour la recherche, pour la recherche des solutions des problèmes de géométrie, chez les jeunes ou les moins jeunes, est très vif. Il y a des classes (surtout des cinquièmes) qui redemandent les séances durant lesquelles ils peuvent se concentrer sur des problèmes de configurations et y apporter des réponses qui sont proches de la mise en place de véritables démonstrations. C'est le moment où les élèves peuvent formuler, grâce à l'aide du professeur, des conjectures et chercher des méthodes pour arriver à les démontrer. Ces mêmes expériences menées aussi dans des lieux inhabituels – personnellement j'ai testé pendant deux ans la fête des jardins dans mon quartier – prouvent que des jeunes ou des adultes restent interrogés, j'oserais même dire fascinés, par des problèmes portant sur des sujets comme les pavages, les bulles de savon ou les problèmes de minima/maxima.

La géométrie est une porte ouverte sur le monde qui nous entoure mais aussi sur un monde intérieur, celui où se mettent en place la construction de l'imaginaire et la capacité de raisonnement de chacun. Il faut avoir le courage de défendre la géométrie mais aussi l'importance du temps et de l'erreur. Les deux sont le sel de la recherche.

Pour réduire les blocages (parfois – disons-le sans crainte - des enseignants aussi et non seulement des élèves) et comprendre les difficultés engendrées par un problème, il faut aussi oser aller au-delà du problème donné et poser un questionnement plus large. En même temps, il faut essayer de ne pas perdre le goût, oui le goût (parfois amer) à la fois de sécher péniblement et, malgré tout, de poursuivre la recherche sur un sujet pour accéder à la joie de trouver un début de réponse ou bien la réponse cherchée. Pour citer Jean-Pierre Kahane (cf le film « La passeggiata », production Cité des Géométries), "Le plaisir a toujours été en mathématiques pour moi très lié à la douleur" et "C’est aussi la dialectique entre la douleur et le plaisir. La douleur de n’avoir pas trouvé et le plaisir de mettre en œuvre quelque chose de nouveau."

Puis, il faut avoir le courage de tester dans les classes les méthodes mises au point lors d'une recherche sur l'enseignement et voir si ces méthodes sont vraiment efficaces. "Efficaces" signifie que le élèves et les professeurs n'ont pas peur d'aller loin dans le questionnement en cours de route sans non plus perdre de vue le cadre qui a été fixé auparavant. Par exemple, comment construire un triangle quelconque ? La question est simple - souvent évacuée dans l'enseignement (pour aller vite, on se donne souvent des triangles choisis d'avance) - mais la réponse est moins banale que ce que l'on pense.

Une configuration - au-delà des questions et problèmes dont elle est l'objet - peut contenir une quantité de remarques et propriétés considérable la concernant. Par exemple, étant donné un triangle quelconque, on construit deux carrés (vers l'extérieur du triangle), un sur chacun de deux côtés du triangle. Cette "simple" extension de la figure initiale, plus celle d'un segment tiré entre deux sommets particuliers des deux carrés, engendre tout un tas de découvertes sur la configuration finale. La configuration étudiée devient alors un objet d'admiration comme un tableau devant lequel on passe du temps pour l'admirer globalement et dans ses détails, mêmes les plus cachés.

La géométrie est un des « lieux » du jardin des mathématiques dans lesquels les regards les plus curieux trouvent leur satisfaction et, parfois, l'apaisement de l'esprit.