La géométrie (plane) du CP à la 5ème
Quelques réflexions
pour le comité scientifique des IREM
8 juin 2012

Marie-Jeanne Perrin

LDAR Laboratoire de Didactique André Revuz

Laboratoire de Didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Avertissement

- Cette présentation reprend certaines vues de plusieurs conférences adressées à différents publics (d'où sa longueur).
- J'y ai ajouté quelques vues plus synthétiques permettant de structurer l'ensemble en annonçant les grandes lignes des vues plus détaillées qui suivent. Ces vues ont une couleur de titre inversée comme celle-ci.
- J'ai mis un fond bleu ciel aux vues ajoutés pour le CS-IREM (comme le plan qui suit vue 4).
- J'ai mis un fond orange pâle à certaines vues plus détaillées extraites d'une conférence adressée à des P.E. (professeurs des écoles).
- Cet exposé s'appuie sur le travail d'un groupe de recherches de l'IUFM Nord Pas-de-Calais qui a réfléchi à ces questions depuis plus de dix ans. On peut trouver des développements de cette présentation dans plusieurs articles issus du travail de ce groupe (principales références sur la vue suivante).

Quelques références
(en rouge les plus récentes, plus près de cet exposé)

- Duval R., Godin M., Perrin-Glorian M.-J. (2005), Reproduction de figures à l'école élémentaire in Castela et Houdement (éds) *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, p. 5-89, ARDM, IREM Paris 7.
- Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n° 10, 5-53.
- Duval R. et Godin M. (2006) : Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N* n°76, 7-27.
- Offre B., Perrin-Glorian M.-J. et Verbaere O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2 *Petit x* n°72, 6-39 et *Grand N* n°77, 7-34.
- Keskessa, B., Perrin-Glorian M.J.& Delplace J.R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N,* n°79, 33-60.
- Perrin-Glorian M.J., Mathé A.C., Leclercq R. (2012) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments à paraître dans *Repères-IREM.*
- Perrin-Glorian M.J. (2012) Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? À paraître bulletin APMEP, avec version plus complète sur le site de l'APMEP.

Plan

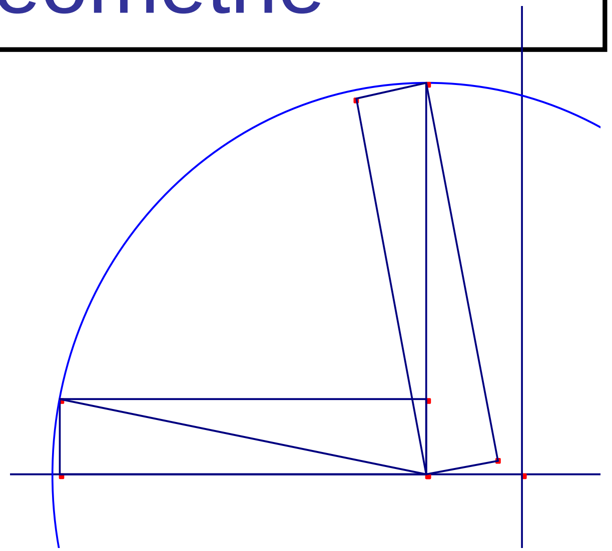
- Pourquoi enseigner la géométrie à tous ?
- Géométrie et monde sensible
- Des tracés aux instruments à l'entrée en 6ème à la flexibilité du regard sur la figure dans une démonstration
- La figure géométrique de la maternelle au collège
- Réflexion sur les instruments
  - Tracé, report de longueur ou mesure
- Reproduction, construction, restauration de figures

Pourquoi enseigner la géométrie à tous à l'école et au collège ?

- L'enseignement obligatoire s'adresse à tous : en particulier formation théorique des professionnels et des futurs professeurs des écoles
- La géométrie euclidienne est un modèle théorique d'une géométrie pratique qui traite de nos rapports à l'espace proche. Finalité pratique et théorique sont intimement liées et ne s'opposent pas forcément
- Domaine essentiel pour l'apprentissage de l'abstraction (et pas seulement dans la

Finalités pratique / théorique de l’enseignement de la géométrie

- Une finalité pratique : moyen de contrôle de l’espace et de traitement de problèmes qui se posent dans l’espace (objets de l’espace et espace des déplacements).
  - Pour tout le monde
  - Pour les professionnels.
- La théorie peut dispenser de l’expérience :
  - le déménageur, le vitrier (faire une vitre en forme de parallélogramme)
- La théorie permet d’expliquer les résultats de l’expérience
- Si la théorie donne une solution, la réalisation effective (et même la possibilité de cette réalisation) dépend des instruments ;



Le meuble monté au sol pourra-t-il se redresser sans abîmer le plafond ?

- Inversement, on peut disposer d’une solution satisfaisante dans la pratique même si la théorie ne donne qu’une solution approchée voire démontre l’inexistence d’une solution exacte.

Finalités pratique / théorique de l'enseignement de la géométrie

- Une finalité théorique :
  - pour assurer les fondements de la géométrie pratique et trouver des solutions aux problèmes qu'elle pose.
  - comme source de problèmes non aisément algorithmisables favorisant le développement du raisonnement déductif.
- Ces deux finalités ne sont pas étrangères :
  - Le modèle théorique, quel qu'il soit, doit permettre de rendre compte des problèmes pratiques et les axiomes ne sont pas choisis n'importe comment.
  - « Certes le géomètre peut refuser de comparer son expérience avec celle du physicien. Il peut s'enfermer dans des systèmes axiomatiques, en posant comme donnés a priori les axiomes et la logique de la déduction. Il évitera ainsi, de justesse, le problème de l'espace (…) mais il n'aura rien fait pour l'éclairer. » Gonseth, 1945, I-8.

La vision géométrique – Discret / continu

- L’utilisation de l’intuition géométrique dans d’autres domaines demande que cette intuition soit créée, quel que soit le point de vue considéré, pratique ou théorique.
- La vision géométrique permet de structurer des informations complexes dans plusieurs directions (2 ou 3 dimensions) alors que le calcul est en général linéaire (même si on peut envisager des boucles).
- La géométrie donne un accès précoce à la continuité, ce qui permet par exemple des jeux de cadres numérique/ géométrique pour étendre l’ensemble des nombres.
- Les rapports discret / continu se rencontrent et se travaillent dans les grandeurs géométriques.
- Conservation, comparaison des aires et des volumes. Procédures géométriques qui permettent de comprendre la grandeur.

Domaine essentiel pour l'apprentissage de l'abstraction

- Des sociologues et linguistes qui s'intéressent à l'échec scolaire et à la production d'inégalités par l'école en regardant ce qui se passe dans la classe, relèvent, en appui sur Bernstein, la difficulté pour ces élèves de milieux défavorisés
  - D'accéder à un langage second et à la secondarisation des tâches (i.e. discours dépendant du contexte / discours décontextualisé, universel)
- La géométrie et, plus particulièrement l'analyse des figures, me paraît un domaine privilégié de l'apprentissage de la secondarisation :
  - Derrière la figure qu'on a sous les yeux, il faut voir d'autres figures possibles, il faut pouvoir enrichir, appauvrir la figure pour voir quelque chose qu'on ne voyait pas au premier coup d'œil.
  - C'est pourquoi je pense que, assez tôt, il faut travailler sur la figure déterminée par des lignes et des points plutôt que par des mesures : travailler la déconstruction dimensionnelle.
  - La géométrie demande de penser généralement sur des objets présents physiquement et cela peut s'apprendre tôt.

L
D
A
R
L
a
b
o
r
a
t
o
ir
e
d
e
D
i
d
a
c
ti
q
u
e

Géométrie et monde sensible

- Filiation assumée ou rapport évité ?
  - La première leçon de géométrie en 5ème vers 1950
  - La première leçon de géométrie en 6ème en 2009
- Qu'est-ce qui fait entrer dans une démarche théorique ?
  - Importance de la généralité : est-ce que c'est toujours vrai ?
  - Toutes les axiomatiques ne se valent pas en ce qui concerne les rapports théorie / pratique

Ldar
Laboratoire de Didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

André Revuz

L
D
A
R

Laboratoire de Didactique

Géométrie et monde sensible : Filiation assumée ou rapport évité ?

- Manuel de 5ème des années 50

Propriétés de la droite.

9. Perçons deux trous dans deux faces opposées d'une boîte en carton, puis introduisons dans ces trous une aiguille à tricoter fine et bien droite; nous réalisons une droite passant par deux points A et B (*fig.* 8).

La condition de passer par ces points n'immobilise pas l'aiguille; nous pouvons la déplacer soit en la faisant glisser soit en la faisant pivoter entre les doigts. Or, si nous observons l'aiguille entre A et B, elle paraît fixe; pendant ces mouvements elle coïncide constamment avec la droite AB.

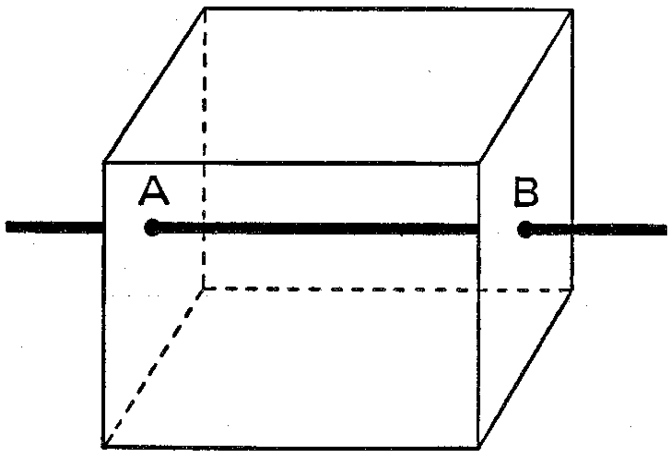


FIG. 8.

Si, au lieu d'une aiguille rectiligne, nous avions pris une tige curviligne, le pivotement aurait engendré entre A et B un fuseau dû aux positions successives de cette tige (*fig.* 9).

Nous admettrons que les résultats de ces expériences sont vrais pour une droite géométrique, et nous énoncerons :

Par deux points distincts il passe une droite et une seule.

André Revuz

Cette propriété est caractéristique de la droite, c'est-à-dire qu'elle n'appartient qu'à la droite.

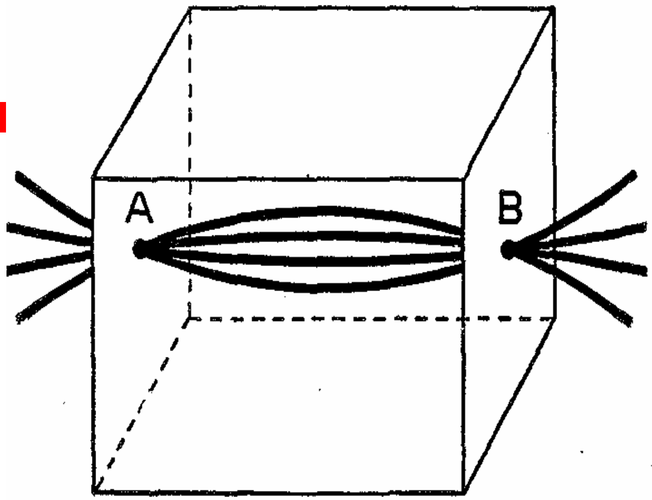


Fig. 9.

Elle peut encore s'énoncer :

Deux points déterminent une droite.

On en déduit les conséquences suivantes :

Deux droites qui ont deux points communs coïncident;

deux droites distinctes peuvent se rencontrer, au plus, en un point;

pour nommer une droite, il suffit de nommer deux de ses points.

10. Application : *Vérification d'une règle par retournement.*

On marque sur une feuille de papier deux points A et B, puis au moyen de la

Fig. 10. — L'arête de la règle est juste.

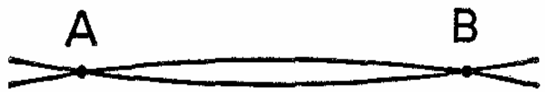


Fig. 11. — L'arête de la règle est fausse.

règle à vérifier on joint AB. On retourne la règle, puis utilisant le même bord on recommence le tracé.

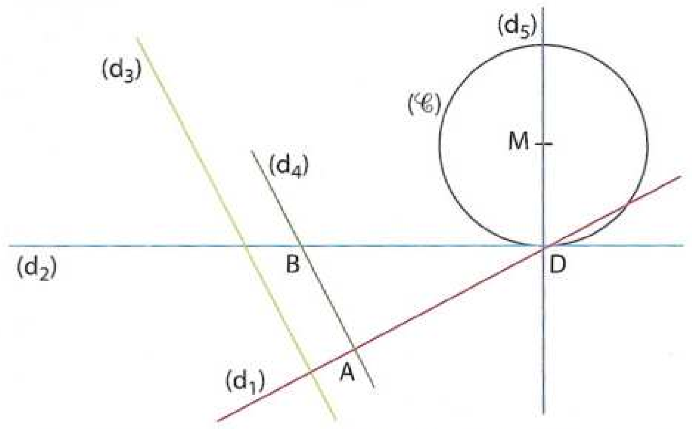
La règle est juste si les deux tracés se recouvrent exactement (*fig.* 10 et 11).

Il est indispensable de vérifier successivement les deux bords d'une règle plate.

Géométrie et monde sensible : Filiation assumée ou rapport évité ?

- Première activité de géométrie d'un manuel de sixième de 2009
- Mais d'autres manuels ont un point de vue différent (exemple Hélice, Didier)

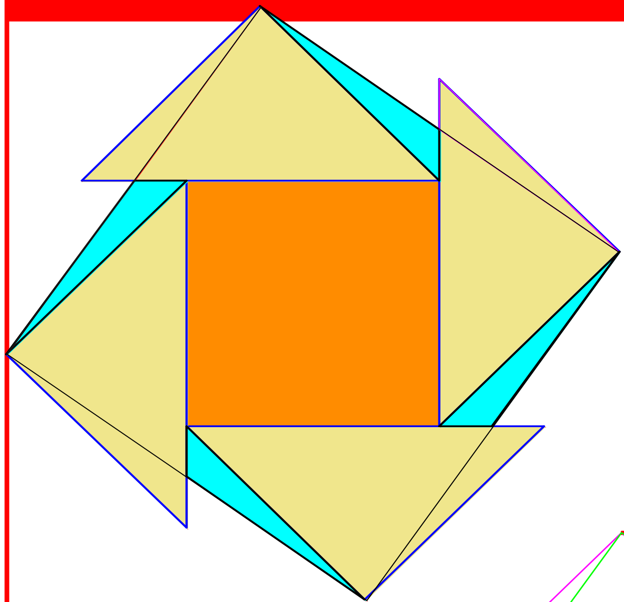
Pour revoir *Pour chaque question, trouve la ou les bonnes réponses en utilisant la figure ci-dessous.*



	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Quelles droites semblent perpendiculaires ?	(d_1) et (d_2)	(d_1) et (d_3)	(d_2) et (d_4)
2	Quelles droites semblent parallèles ?	(d_2) et (d_5)	(d_3) et (d_4)	(d_3) et (d_5)
3	La mesure du segment [AB] est :	supérieure à celle du segment [MD]	inférieure à celle du segment [MD]	égale à celle du segment [MD]
4	Un rayon du cercle $(\mathscr{C})$ de centre M est :	le segment [MD]	la droite (d_1)	la droite (d_5)
5	Quelles sont les affirmations qui semblent vraies ?	ABD est un triangle équilatéral	ABD est un triangle isocèle	ABD est un triangle rectangle

Problème pratique ou problème théorique ?

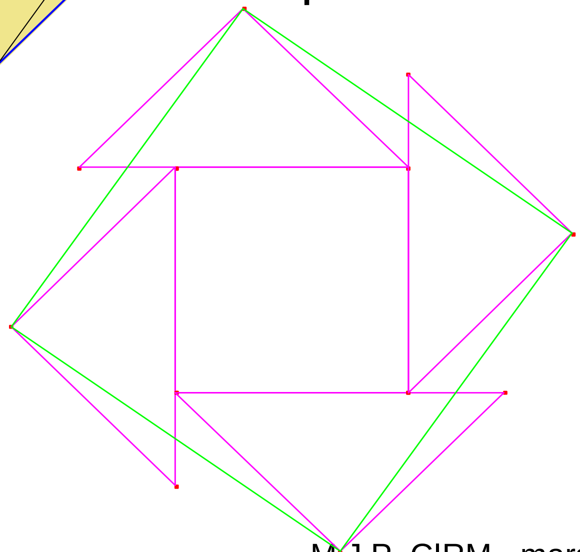
Raisonner théoriquement sur des objets concrets



La nécessité de démontrer passe par le souci de généralité :

Exemple Fabriquer un carré trois fois plus grand qu'un carré donné Abu-l'Wafa

Raisonnement appuyé sur l'expérience mais la finalité est théorique dès qu'on se pose la question : Est-ce qu'on a bien un carré et est-ce que cela marcherait pour n'importe quel carré ?



A-t-on les outils théoriques pour faire une démonstration qui prolonge la résolution du problème pratique ? Différents regards sur la figure sollicités.

Les axiomatiques ne sont pas équivalentes de ce point de vue.

André Revuz

Le raisonnement, la preuve, la démonstration

- Qu'est-ce qui est plus important ?
  - Rédiger une démonstration correcte
  - Comprendre la nécessité qui fait que cela ne peut pas être autrement
- Les deux sans doute, mais dans quel ordre ?
- Quel rôle peut jouer la construction de figures ?
- L'utilisation des instruments de géométrie n'est-elle qu'un problème technique ?

André Revuz

Des tracés aux instruments à l'entrée en 6ème à la flexibilité du regard sur la figure dans une démonstration

- Le chemin vers l'abstraction commence dès le début

- bien en amont des exigences de la démonstration

- et dans l'usage des instruments qui ne va pas de soi et doit se construire…

- Des évaluations 6ème …
- au regard sur la figure dans une démonstration en 4ème …
- ou après

Peut-on penser une meilleure continuité dans l'enseignement obligatoire de la géométrie ?

- Beaucoup de travaux l'ont montré, il y a une rupture nécessaire dans le regard qu'on porte sur les figures (par rapport à celui qu'on porte sur un dessin) quand on les envisage du point de vue de la démonstration. Cependant, à quel moment cette rupture doit-elle se faire ? Doit-on faire une rupture ou construire progressivement un regard géométrique sur les figures ?
- Faut-il dès le début du collège, considérer la figure d'un point de vue symbolique (codage, texte) et apprendre à se méfier de ce que disent les instruments ?
- Ne peut-on envisager une construction progressive d'un point de vue théorique, appuyée sur la recherche de propriétés générales et l'enrichissement continu des connaissances théoriques ?
- Quelle place donner aux instruments dans la construction d'un point de vue théorique ?
- Quelle place donner aux mesures ? L'usage fréquent des mesures, qui fixe la figure (taille et forme), n'enlève-t-il de la généralité et de la richesse aux problèmes concernant les dessins géométriques ?

Des exemples pris dans les évaluations 6ème

Exemples proposés à des élèves de CM2 d'une REP lilloise en juin (Grand N 77)

- On a commencé une figure. Complète cette figure en suivant les instructions.

1) Trace le cercle qui a pour centre le point B et qui passe par le point E.
2) Trace la droite qui est perpendiculaire à la droite (AC) et qui passe par le point E.

Résultats 1995

Réussite au niveau national

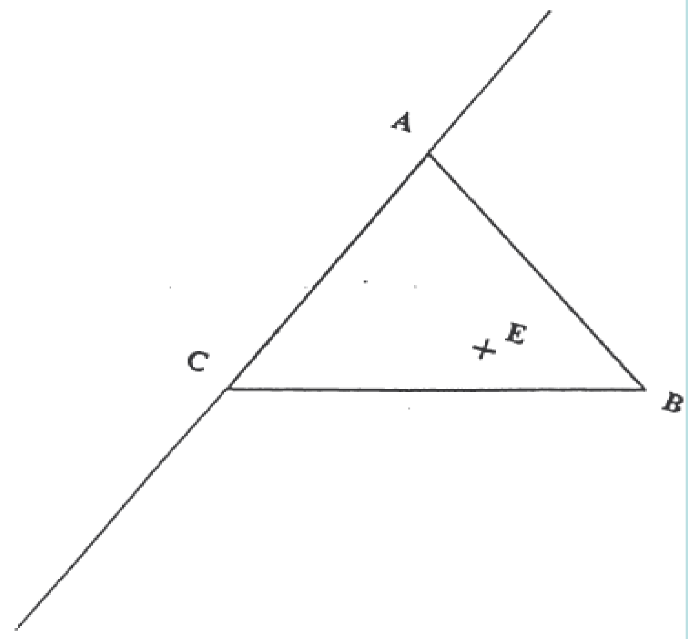
Cercle 81%

Perpendiculaire 42,3%

Sans se limiter à un segment 16,9%

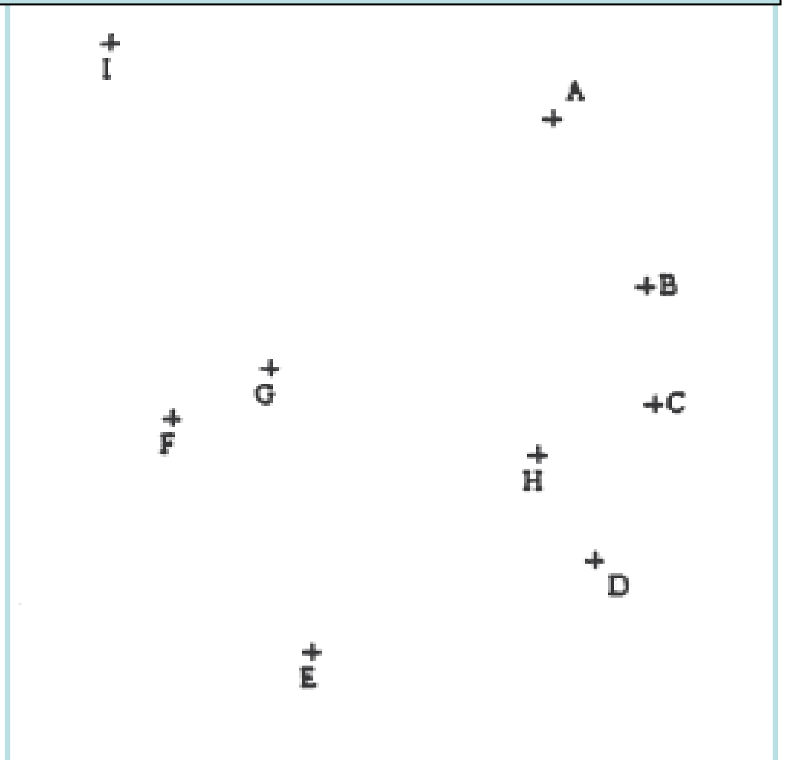
Angle droit : Propriété d'un objet

Droites perpendiculaires : Relation entre deux objets, voire trois



Des exemples pris dans les évaluations 6ème

- Les points A, B, C, D sont sur un même cercle. Le centre de ce cercle est l'un des points de la figure.
- En utilisant la règle graduée, trouve le centre de ce cercle.
- Explique comment tu as trouvé.



Résultats d'un collège de REP de l'académie de Lille en 1999

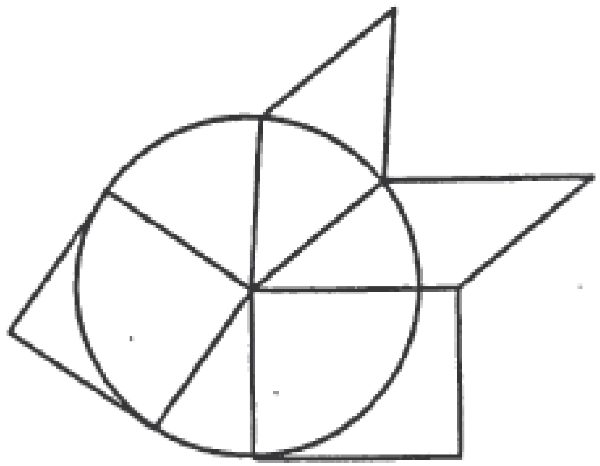
Aucune réussite : 65% des élèves échouent, les autres s'abstiennent

Des élèves de fin CM2 : « je ne comprends pas, on nous parle de cercle et on nous dit d'utiliser la règle »

Des exemples pris dans les évaluations 6ème

- Observe attentivement la figure suivante
- Repasse en couleur les traits de cette figure qui forment un carré
- Repasse en couleur d'autres traits de cette figure qui forment un losange.

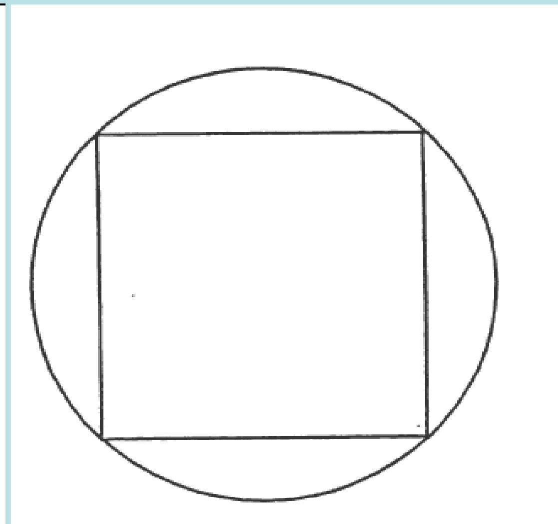
Résultats d'un collège de REP de la région NPdC en 1999
Carré : réussite 22% échec 75%
Losange : réussite 30% échec 65%

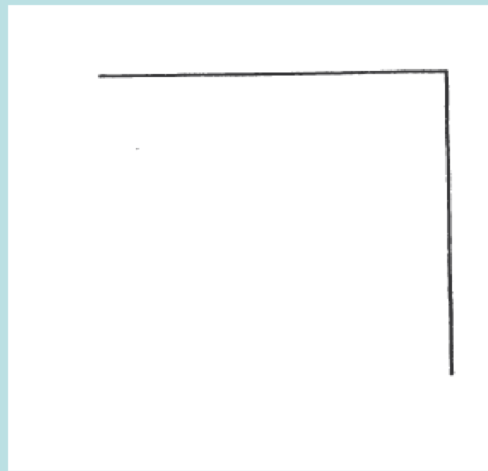


LDAR Laboratoire de Didactique

Des exemples pris dans les évaluations 6ème

- Voici une figure composée d'un carré et d'un cercle.
- Tu dois la reproduire, la construction est déjà commencée.
- Deux côtés du carré sont déjà tracés



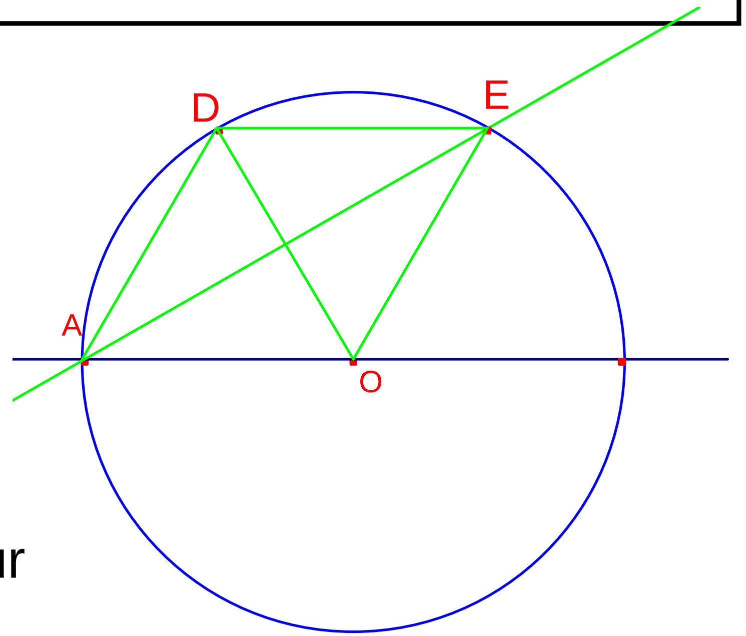


Résultats niveau national en 1997
Réussite 63,6%
Carré terminé 94,3%

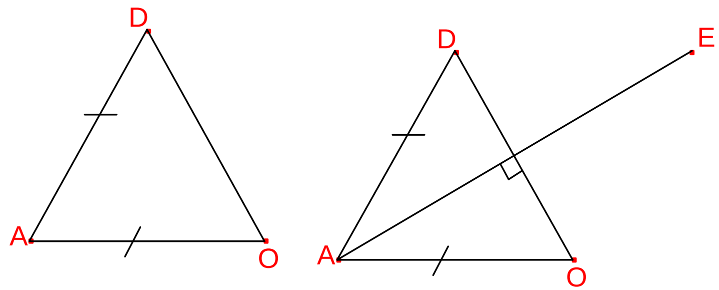
André Revuz

Le regard à porter sur les figures dans une démonstration
Un exemple de problème de collège

- Soit C un cercle de centre O et de diamètre [AB] et un point D sur ce cercle, tel que AD = AO.
- La perpendiculaire à (DO) passant par A recoupe le cercle C au point E.
- Montrer que le quadrilatère ADEO est un losange.

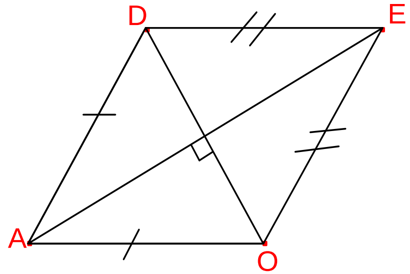


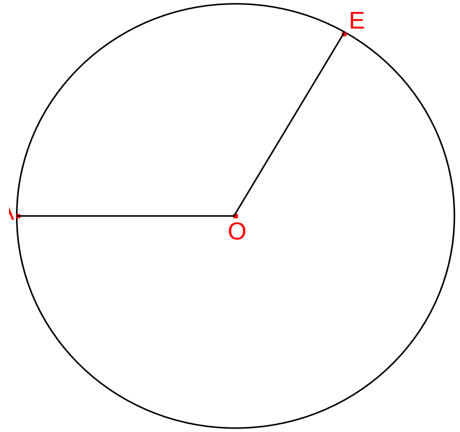
- Exemple de démonstration (et regards sur la figure) :
  - AD=AO
  - donc A sur la médiatrice de [DO].
  - Mais (AE) perpendiculaire à [DO]
  - Une seule perpendiculaire à [DO] passant par A.
  - Donc E sur la médiatrice de [DO]



André Revuz

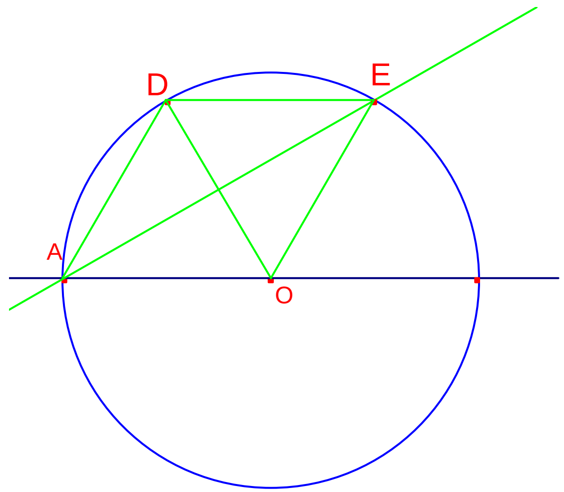
Regards sur la figure pendant la démonstration





- E sur la médiatrice de [DO]
- Donc ED = EO
- Mais A et E sont sur le cercle de centre O
- Donc OA et OE sont des rayons du même cercle et OA = OE
- Finalement AD = AO = OE = ED

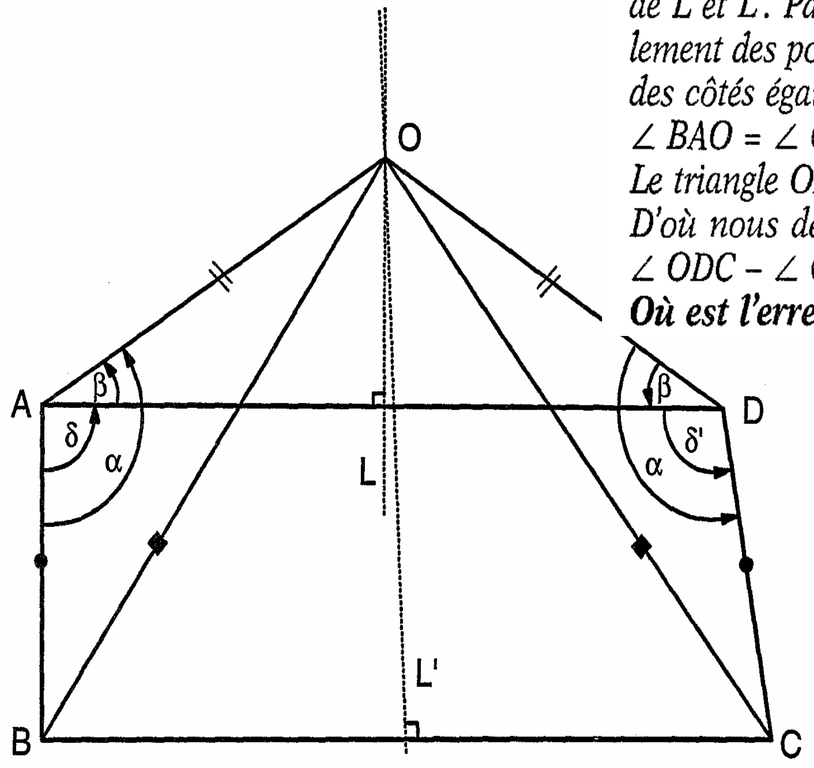
- Figures superposées : triangle, losange, cercle
- Relations entre points, droites, cercles, segments à isoler.



Peut-on raisonner juste sur une figure fausse ?

Extrait de « La bosse des maths » de S. Dehaene p. 273

Démonstration : *Soit un quadrilatère ABCD tel que les côtés AB et CD soient égaux et que l'angle* $\delta = \angle BAD$ *soit droit. L'angle* $\delta' = \angle ADC$ *est arbitraire. Nous allons pourtant prouver qu'il égale l'angle droit* δ.
Soit L la médiatrice du segment AD et L' celle du segment BC. Soit O l'intersection de L et L'. Par construction, O est équidistant des points A et D (OA = OD) et également des points B et C (OB = OC). Comme AB = CD, les triangles OAB et ODC ont des côtés égaux et sont donc semblables. Donc leurs angles sont égaux :
$\angle BAO = \angle ODC = \alpha$.
Le triangle OAD étant isocèle, on a également $\angle DAO = \angle ODA = \beta$.
D'où nous déduisons $\delta = \angle BAD = \angle BAO - \angle DAO = \alpha - \beta$ *; et* $\delta' = \angle ADC = \angle ODC - \angle ODA = \alpha - \beta$ *; soit* $\delta = \delta'$*. Ce qu'il fallait démontrer.*
Où est l'erreur ? *Réponse page 295 !*



La figure représente un objet théorique mais elle porte aussi des propriétés visuelles particulières qui peuvent traduire d'autres propriétés géométriques non prévues *a priori* éventuellement contradictoires avec l'objet théorique étudié et dont il est difficile de faire abstraction.

André Revuz

L
D
A
R
L
a
b
o
r
a
t
o
ir
e
d
e
D
i
d
a
c
ti
q
u
e

La figure qu'est-ce que c'est ?
Évolution du CP à …

- Formes, gabarits, figures
- Figures remarquables
- Figures juxtaposées / superposées

Laboratoire de Didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

André Revuz

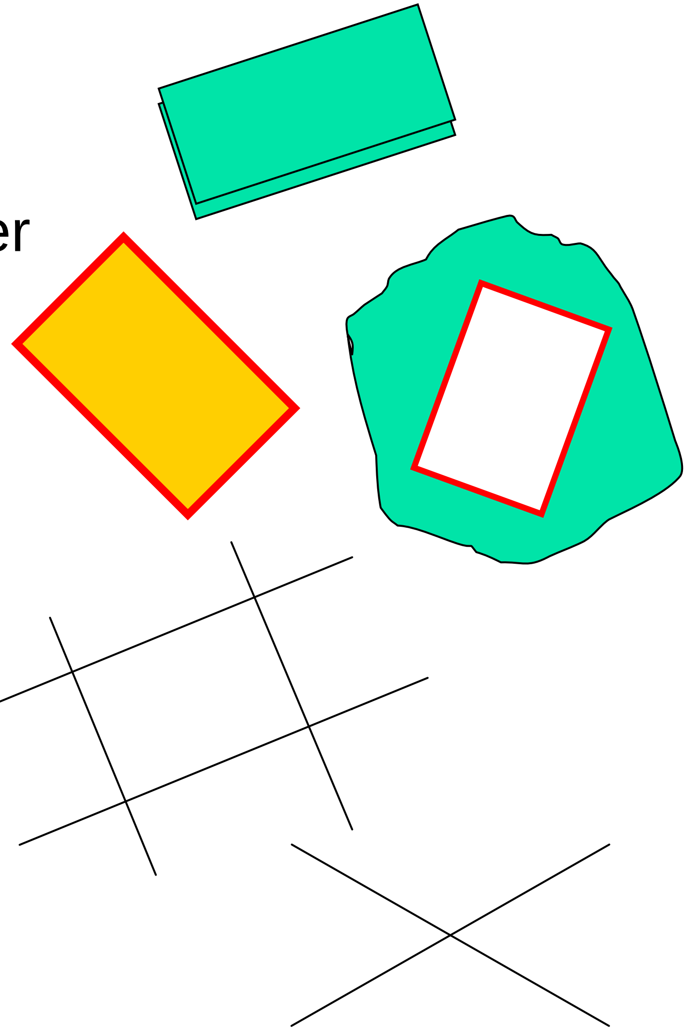
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Mais une figure, qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce qu'un rectangle ?

Quelques réponses possibles du CP à la 6ème

- Une forme de bois ou de plastique qu'on peut déplacer, manipuler, comparer à d'autres…
- Un contour qu'on peut tracer sur le papier avec un gabarit ou un pochoir dont on peut colorier l'intérieur… une surface fermée
- Un réseau de 4 droites (ou segments) deux à deux parallèles ou perpendiculaires.
- Des relations entre des segments (les côtés ou les diagonales) des points (les sommets, le centre), des droites (les supports des segments, les axes de symétrie), entre des points…
- Des propriétés caractéristiques (CNS)



Formes et gabarits

- Géométrie comme moyen de décrire et produire les formes et les grandeurs qui leur sont associées.
- Penser une continuité de la grande section (GS) à la 6ème incluse
- Formes et gabarits
  - Forme d'un solide de l'espace / forme d'une surface dans le plan (exemple : forme des faces du solide)
  - Objets très plats qu'on peut déplacer : gabarits
  - Polysémie du terme « forme » : 3 difficultés
    - Un gabarit a deux faces qui n'ont pas nécessairement la même forme (au sens de surfaces du plan superposables)
    - Forme rectangle, forme triangle : on n'a plus superposition
    - Deux rectangles, triangles… n'ont pas nécessairement la même forme : conservation des angles et des rapports de longueurs.
- Attention la longueur n'est pas un nombre mais une grandeur

Formes et figures

- Formes et figures
  - figure : ensemble de tracés sur papier ou sur écran d'ordinateur, à main levée ou avec des instruments
  - La notion de figure évolue de la GS à la $6^{ème}$
    - Au cycle 1, la figure est une forme (surface) dessinée ou le contour de cette forme, ce que nous appellerons une figure simple
    - Au cycle 2, la figure s'enrichit de lignes autres que le contour
    - Au cycle 3 et au collège, une figure est aussi une configuration de points. Elle est déterminée par des points et des lignes qui joignent certains d'entre eux. Les lignes (segments ou arcs de cercle) peuvent être tracées avec des instruments.
  - La langue mathématique, pour nommer ou décrire une figure, valorise la configuration de points alors que l'émergence de ce regard particulier est tardive

Figures « remarquables » ou « singulières »

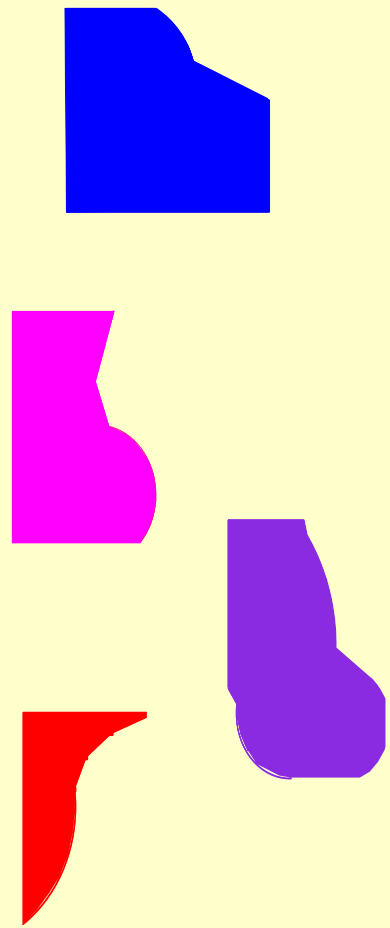
- Certaines figures sont suffisamment remarquables pour disposer d'un nom dans la langue courante et figurer (ou avoir figuré) dans les programmes de l'école primaire : disque (ou cercle), carré, rectangle, parallélogramme, losange, cerf-volant, triangle (scalène), triangle rectangle, triangle équilatéral, triangle isocèle.
- Pouvons-nous imaginer une approche en termes de surfaces, c'est-à-dire les caractériser à partir d'actions réalisables sur des gabarits qui les représentent ?
  Nous pouvons envisager deux types d'opérations : celles qui permettent de les ramener dans leur contour (superposition) ou celles qui permettent de les assembler et les décomposer (assemblage). Nous pouvons aussi imaginer des gabarits dont on peut distinguer les deux faces et les côtés (couleur).

LDAR Laboratoire de Didactique

Figures remarquables

Défi 2

- Découpez un carré dans du papier
- Déchirez un coin de ce carré, il reste un gabarit déchiré avec lequel vous pouvez reproduire le carré
- Déchirez le un peu plus de façon qu'il ne reste que deux angles droits. Reproduire à nouveau le carré.
- Déchirez encore un coin de façon qu'il reste un morceau de deux côtés opposés. Reproduire à nouveau le carré
- Reprenez le premier coin. De quelle information complémentaire avez-vous besoin pour reproduire le carré ?



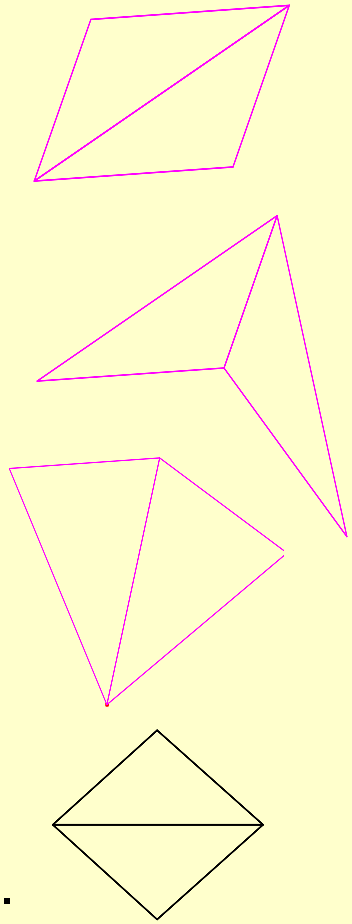
André Revuz

Figures remarquables : comment peut-on les superposer à leur empreinte ?

- Actions de superposition sans retournement
  - Carré : 4 possibilités
  - Triangle équilatéral : 3 possibilités
  - Rectangle, parallélogramme, losange : 2 possibilités
  - Triangle (scalène, isocèle, rectangle), cerf-volant : 1
  - Disque : une infinité
- Actions de superposition avec retournement
  - Carré : 8
  - Triangle équilatéral : 6
  - Rectangle, losange : 4
  - Parallélogramme : 2
  - Triangle isocèle, cerf-volant : 2
  - Triangle scalène ou rectangle : 1
  - Disque : une infinité

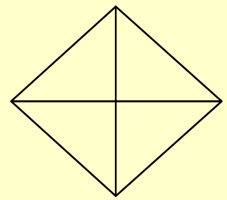
Figures remarquables

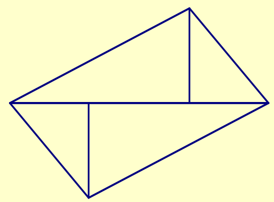
- Quelques remarques sur les actions de superposition
  - Que se passe-t-il pour les côtés dans les actions précédentes ?
  - Pour certaines formes le nombre de possibilités a été multiplié par deux par retournement
- Actions d’assemblage (avec possibilité de retournement)
  - Avec deux triangles scalènes identiques, on peut fabriquer un parallélogramme ou un cerf-volant
  - Avec deux triangles rectangles identiques, on peut fabriquer un rectangle ou un triangle isocèle
  - Avec deux triangles isocèles identiques on peut fabriquer un losange ou un cerf-volant
  - Avec deux triangles rectangles isocèles identiques, on peut fabriquer un carré ou un triangle isocèle rectangle.



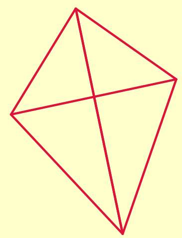
Figures remarquables

- Décomposition en triangles avec le moins de triangles possible
  - Carré : deux triangles rectangles isocèles identiques
  - Rectangle : deux triangles rectangles identiques
  - Parallélogramme : deux triangles scalènes identiques
  - Losange : deux triangles isocèles identiques
  - Cerf-volant : deux triangles scalènes identiques ou deux triangles isocèles différents



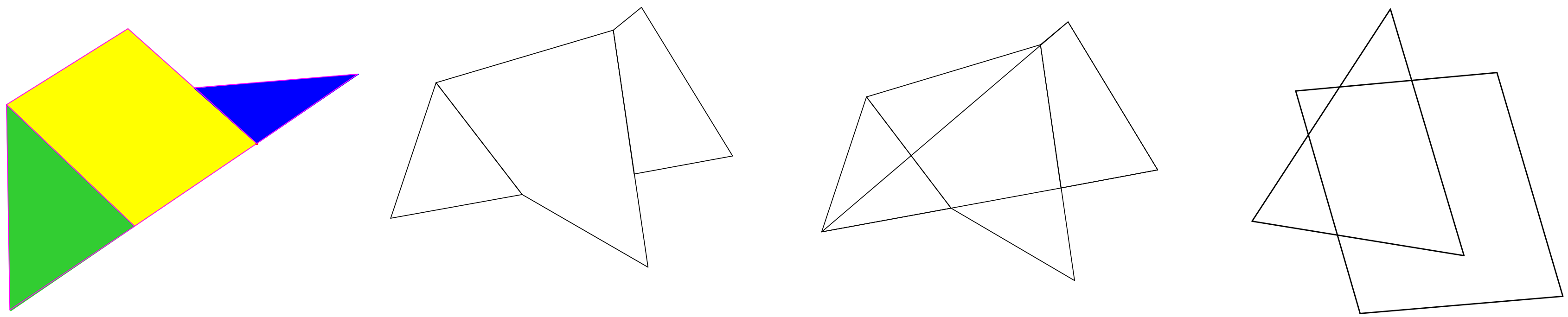


- Décomposition en triangles rectangles avec le moins de formats possible
  - Carré, rectangle : deux triangles rectangles identiques
  - Losange : 4 triangles rectangles identiques
  - Parallélogramme, cerf-volant : 4 triangles rectangles, 2 formats



Figures juxtaposées / superposées

- On peut, dès le cycle 2, reproduire des figures composées d'assemblages par juxtaposition de figures simples en se servant de gabarits : il faut repérer des propriétés perceptives des bords de ces gabarits ou des angles et les contrôler par des actions sur les objets (juxtaposition bord à bord par exemple).
- Une figure composée peut théoriquement être considérée comme un assemblage de figures simples aussi bien par superposition que par juxtaposition. Cependant, un assemblage apparaît spontanément comme une superposition ou une juxtaposition au premier coup d'œil selon certaines caractéristiques visuelles de l'assemblage et des figures qui le constituent et il n'est pas facile de passer de la vision de l'une à celle de l'autre (Duval et Godin, 2006, Grand N 76).



L
D
A
R

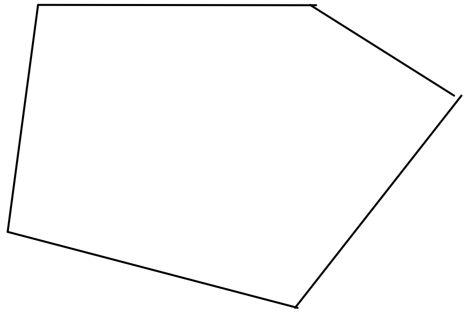
L*aboratoire de* D*idactique*

Reproduire une figure.
Réflexion sur les instruments

- Instruments permettant de transporter des informations D2 / D1 sur la figure
- Instruments de tracé et propriétés géométriques
- Instruments de report / instruments de mesure

Problème d'introduction

- Pour réfléchir aux liens à faire entre les différents regards qu'on peut porter sur une figure
- Défi 1 : Un petit problème pour planter le décor
- Voici un polygone (un pentagone).



- Tracez en un du même genre sur votre feuille et
  - 1) reproduisez le avec comme seuls instruments une règle non graduée et un petit morceau de papier aux bords arrondis.
  - 2) imaginez différents moyens de le reproduire et indiquez les instruments utilisés

L
D
A
R

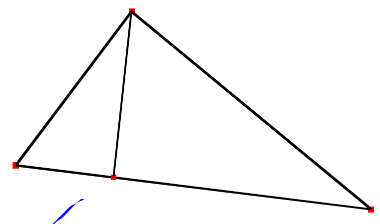
L
a
b
o
r
a
t
o
ir
e

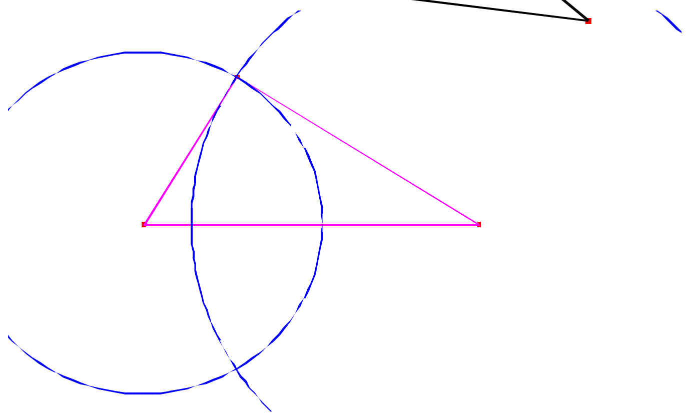
d
e

D
i
d
a
c
ti
q
u
e

Reproduire un polygone sur papier uni

- Avec un gabarit
- Avec du papier calque
- Avec un gabarit déchiré et une règle étagère 2, étagère 3
- Avec un gabarit un peu plus déchiré et un instrument de report de longueur : triangle abîmé, étagère
- Avec un morceau de papier informe et une règle
- Avec une règle, un instrument de report des angles et un instrument de report des longueurs
- Avec une règle et une équerre (3 longueurs)
- Avec une règle et un compas (3 longueurs)
- Triangulation d'un polygone





- Les animations auxquelles fait appel cette vue se trouvent sur le site www.aider-ses-eleves.com

André Revuz

LDAR Laboratoire de Didactique

Première réflexion sur les instruments

- Des instruments qui permettent de transporter la forme et la taille (grandeur) de la figure : gabarit, pochoir, calque
- Des instruments qui permettent de transporter des informations de dimension 2 sur la figure mais pas toute l'information : gabarit déchiré, morceau de papier, règle « informable » (sur laquelle on peut écrire), équerre « informable », instrument de report d'angle (comme secteur angulaire)
- Des instruments qui ne permettent que de transporter des informations de dimension 1 ou des relations entre éléments de dimension 1 ou 0 : règle non graduée non informable, instrument de report de longueur, équerre non informable, compas, fausse équerre, demi-disque informable.
- Les instruments permettent de tracer ou de reporter des morceaux de surfaces, de lignes, ou des grandeurs. Ils permettent de vérifier ou prévoir des superpositions (totales ou partielles) sans les réaliser effectivement.

André Revuz

L'usage des instruments usuels

- Les instruments du commerce regroupent plusieurs fonctions et permettent ainsi de réaliser une économie gestuelle et/ou conceptuelle dans l'exécution de certaines tâches familières et répétées (construction des figures remarquables) :
  - Règle graduée : tracer des traits droits (droites, segments) ; vérifier un alignement ; mesurer des longueurs. Mais aussi tracer des angles droits en utilisant soit sa forme de rectangle soit la graduation et la transparence.
  - Equerre : toutes les fonctions de la règle graduée mais aussi possibilité d'utiliser les autres angles pour les comparaisons d'angles ou pour tracer des parallèles.
  - Compas : tracer des cercles ou des arcs de cercle ; reporter ou comparer des longueurs sans les mesurer.
  - Rapporteur : mesurer ou reporter des angles

Instruments usuels et propriétés géométriques

- Les instruments permettent de reproduire des caractéristiques visuelles des figures qui correspondent à des propriétés géométriques :
  - L'alignement (droite, segment) : règle non graduée
  - Les distances ou longueurs (sans mesure) : réglet, compas à pointes sèches
  - Les angles droits : l'équerre opaque sans graduation
  - La courbure constante (cercle) : compas
  - Le milieu, la moitié d'une distance : bande de papier qu'on peut plier
  - Les angles : fausse équerre, rapporteur non gradué : demi-disque ou rectangle pointé informable
- Ces propriétés sont amalgamées dans les instruments du commerce, l'apprentissage nécessite de les distinguer.

Instruments et propriétés
Report /mesure

- Angle droit et droites perpendiculaires
  - Angle droit : morceau de surface, coin d'un polygone
  - Droites perpendiculaires : relation entre deux droites
  - Droite perpendiculaire à une droite par un point
  - Voir article Offre Perrin Verbaere, Grand N 77
- Report de longueur sur une droite déjà tracée / tracé d'un arc de cercle :
  - compas permettant de tracer ou compas à pointes sèches, compas rétractable
  - Intersection d'une droite et d'un cercle, intersection de deux cercles
- Reporter des grandeurs / mesurer
  - La mesure est un appui important pour les nombres
  - Les concepts géométriques s'appuient plutôt sur l'alignement et les grandeurs
  - Il faudra des interactions numérique/ géométrique (Thalès, Pythagore…) mais nécessité d'une construction solide de chaque cadre.

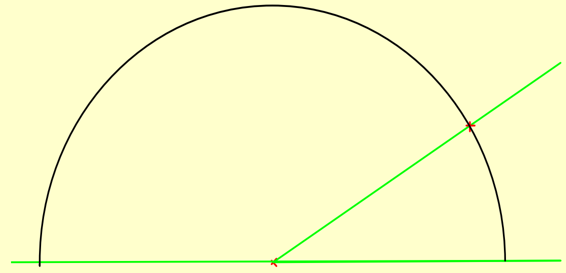
Instrument de mesure / instrument de report

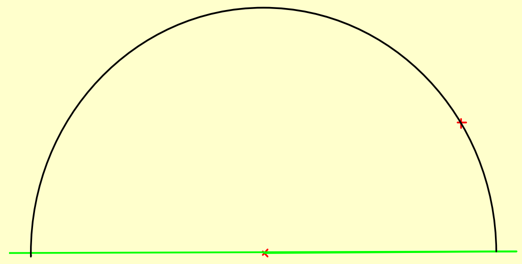
- Règle graduée / règle non graduée et réglet, instrument pour prendre le milieu (ex : bande de papier souple avec un bord droit), instrument de partage de longueurs (papier ligné)
  - Nous appelons réglet un instrument de report de longueur avec un bord rectiligne sur lequel on peut prendre des repères, par exemple une bande de papier avec un bord rectiligne. Il ne permet pas de mesurer ni de tracer directement (comme le compas).
- Rapporteur / instrument de report d'angles
  - Présence ou non de mesure (qui ajoute le passage par les nombres) ; repérage d'un point, intersection d'une demi-droite et d'un cercle (ou demi-cercle.
  - Demi-disque avec centre et possibilité de marquer (voir les côtés de l'angle comme des demi-droites)
  - Papier transparent avec une demi-droite repérée : repérer des demi-droites
  - Papier transparent avec cercle dessiné et demi-droite issue du centre

LDAR Laboratoire de Didactique

Retour sur l'usage des instruments usuels

- Rapporteur comme instrument de mesure
  - On repère et on reporte des points qui sont l'intersection d'une demi-droite et d'un cercle (ou demi-cercle).
  - Le cercle est matérialisé par le rapporteur mais il n'est pas dessiné ; seul le centre apparaît comme sommet de l'angle, intersection de deux demi-droites
  - Quand on mesure, la demi-droite est dessinée, visible si le rapporteur est transparent
  - Quand on trace un angle de mesure donnée, il faut reporter un point (le point d'intersection du cercle et de la demi-droite) par une graduation puis tracer la demi-droite





André Revuz

Reproduction / Restauration de figures

Restauration de figure : c'est reproduire une figure superposable à une figure donnée mais avec des conditions spécifiques

- Soit on dispose déjà d'une partie de la figure
- Soit on dispose d'instruments qui permettent de transporter des informations D2 sur la figure
- On a des instruments de report et de tracé mais pas d'instrument de mesure.

Introduction d'un coût sur les instruments

Reproduction, restauration, description, construction de figures

- Les activités géométriques de l'école élémentaire et du début du collège comprennent toujours une figure, soit dans les données du problème, soit dans le but, soit les deux, soit au moins comme intermédiaire incontournable.
  - Si le but est une démonstration, et si la figure n'est pas fournie, on demande toujours de la produire
- Il y a parfois un texte mais pas toujours.
  - Le texte peut intervenir comme une donnée quand il faut construire une figure à partir d'une description ou d'un programme de construction.
  - Il peut intervenir comme une production quand il faut décrire une figure ou en donner un programme de construction.

Reproduction, restauration, description, construction de figures

La place de la figure dans les activités géométriques

- Figure → figure : reproduction, restauration
- Figure → texte : description, programme de construction
- Texte (ou schéma) → figure : construction
- Texte (et figure) → texte : démonstration

- Dans la reproduction et la restauration, le langage n'intervient pas nécessairement dans la réalisation de la tâche elle-même. Cependant il intervient dans la communication (entre élèves ou entre professeur et élèves) ainsi que dans la communication avec soi-même et dans l'objectivation

André Revuz

Reproduction / restauration de figures

- Reproduction ou restauration d'une figure ont la même finalité : obtenir une figure qui soit superposable à une figure modèle présente et accessible, au moins comme moyen de contrôle (le modèle peut être donné à une taille différente).
- Reproduction et restauration se distinguent par les conditions des actions possibles pour atteindre cette finalité.

- Pour la reproduction d'une figure, les instruments mis à la disposition des élèves sont uniquement des instruments de tracé à choisir dans la liste : règle, réglet, compas, équerre (plus le rapporteur en sixième), et l'élève pour reproduire la figure dispose d'une feuille blanche et vierge.
- Dans les autres cas nous parlerons de restauration

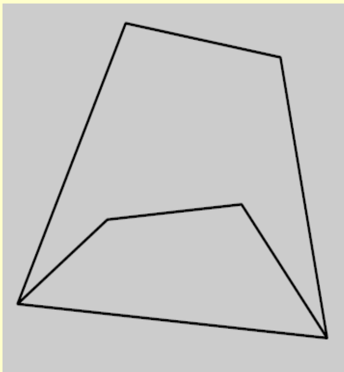
Restauration de figures

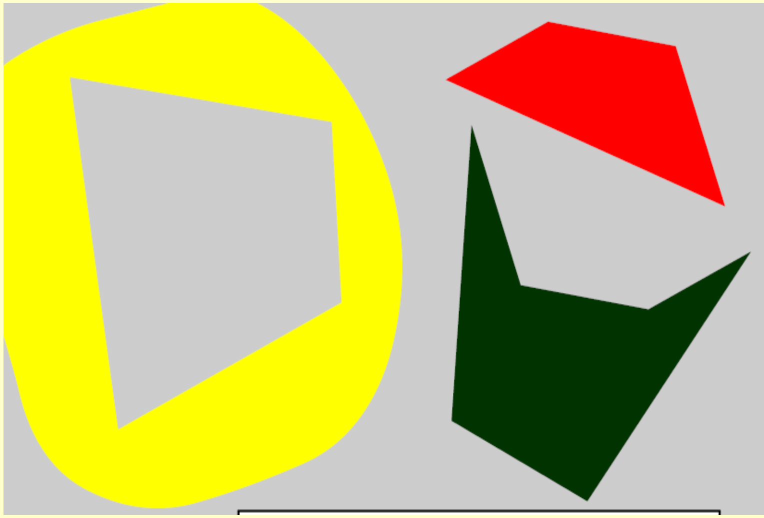
Deux cas typiques :

- Les instruments disponibles sont les instruments de tracé comme pour la reproduction : règle, réglet, équerre, compas mais l'élève dispose déjà d'une amorce (D2) de la figure qu'il s'agit de terminer
  - la reproduction de figures sur papier quadrillé est une activité de restauration, nous y reviendrons à propos des supports.
- Les instruments disponibles sont des instruments de tracé classiques mais aussi des instruments permettant de transporter des informations D2 sur la figure (par exemple un gabarit ou un morceau de gabarit dont le contour est une partie significative de la figure à reproduire).

Restauration de figures

- Au cycle 2, on commence par s'intéresser à des figures simples puis à jouer entre des assemblages par juxtaposition ou superposition de figures simples pour faire apparaître des lignes de construction qui ne sont pas apparentes sur la figure finale.
- Exemples
  - Le gabarit déchiré
  - Assemblage on supprime un élément (pochoir, gabarit) voir site



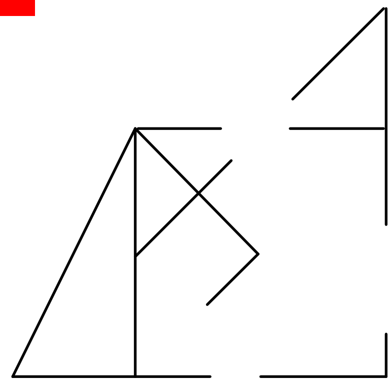


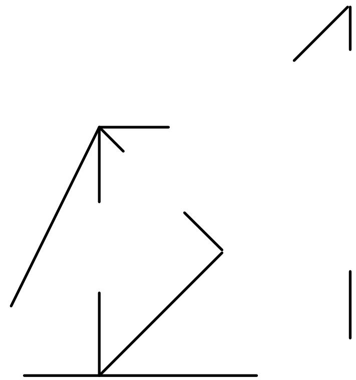
LDAR

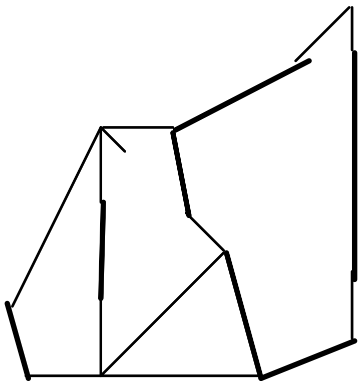
Laboratoire de Didactique

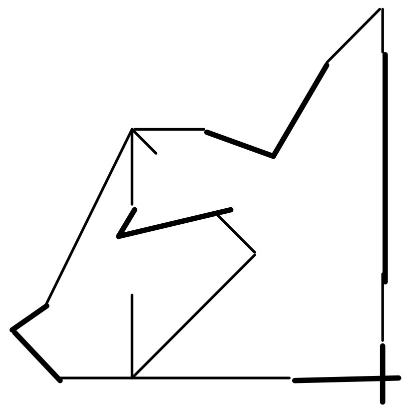
Restauration de figures

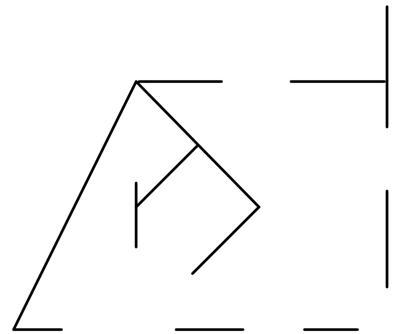
- Au cycle 2
- Figure partiellement effacée ; gabarits à disposition ou non ; figure modèle coloriée ou non







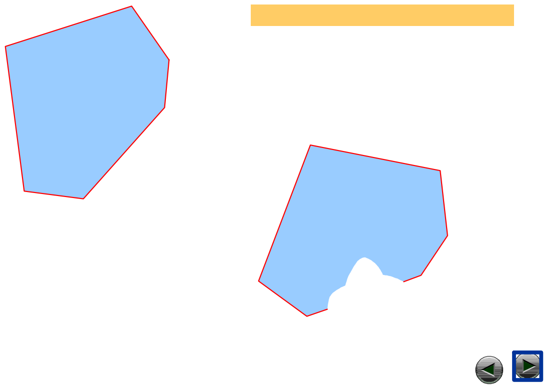


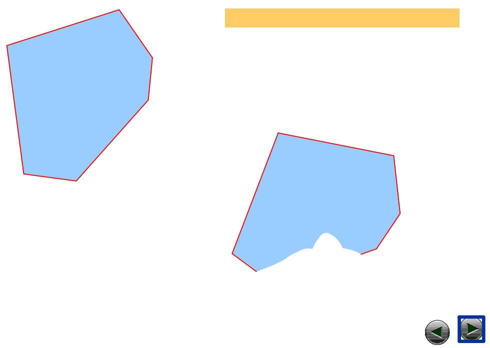


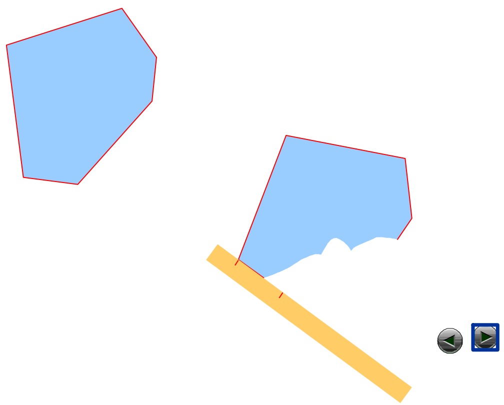
André Revuz

Restauration de figures

- Au cycle 3, un objectif est de faire passer les élèves de la capacité de restaurer une figure à celle de reproduire une figure.
- L'objectif est de faire émerger des concepts géométriques pour rendre compte de caractéristiques visuelles. Pour reproduire la figure, il faut l'enrichir de tracés qui n'apparaissent pas mais sont indispensables pour la reproduction (alignements, rapports de longueur).
- Variables didactiques : choix de la figure, choix de l'amorce, taille du modèle, choix des instruments disponibles…





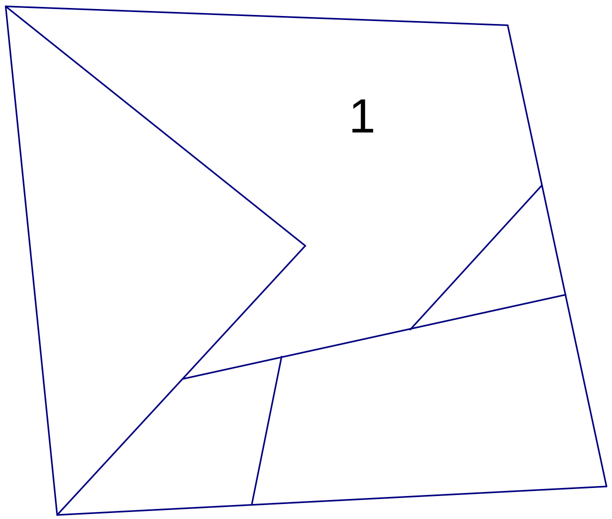


André Revuz

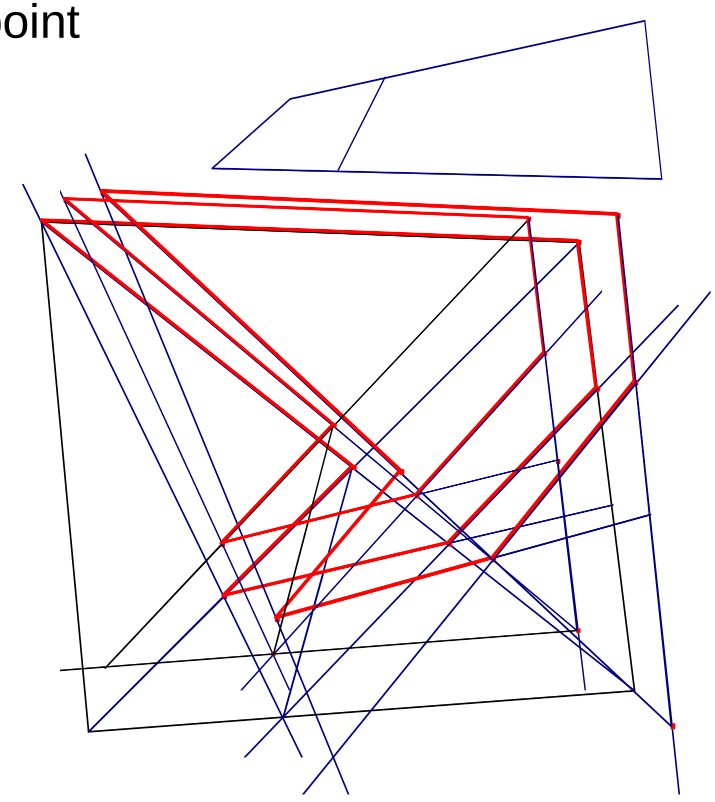
L D A R
L a b o r a t o i r e d e D i d a c t i q u e

Restauration de figures

- Exemple : favoriser le repérage d'alignements ; le moins de reports de longueur possible (voir article Grand N 79)
- Donner un coût aux instruments : tracé à la règle gratuit ; report de longueur : 5 points. On peut même différencier
  - Prolongement d'un segment existant : 1 point
  - Nouveau tracé à la règle : 0 point



Défi 3
Restaurer la figure complète à partir de la pièce 1

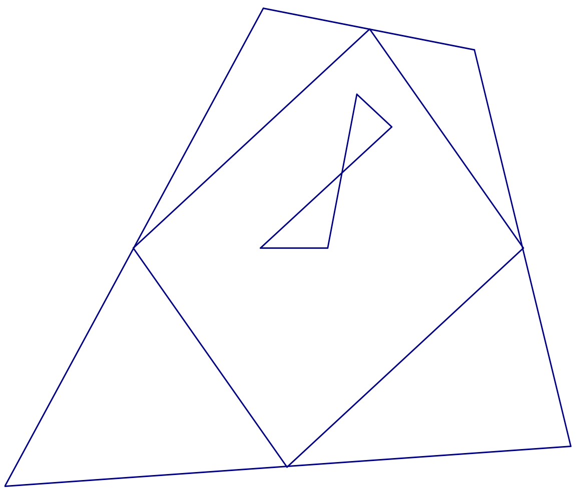


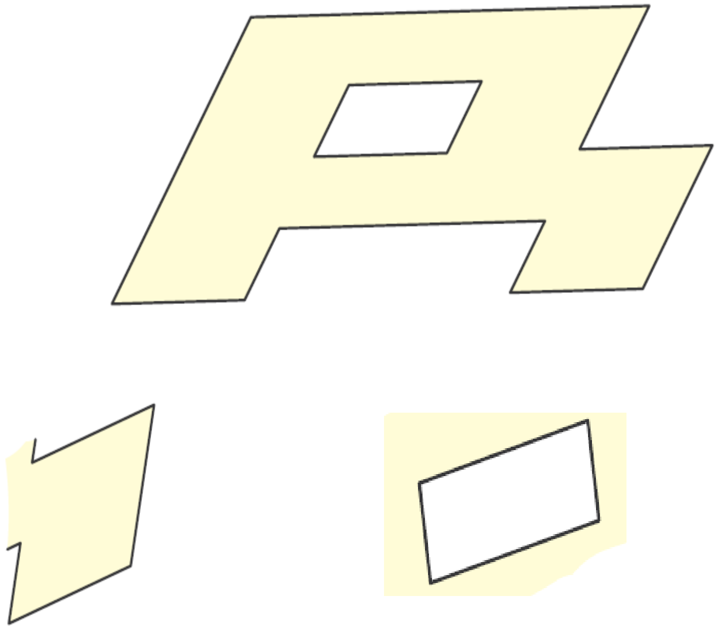
André Revuz

Restauration de figures

- Exemple favorisant le repérage d'alignements et l'utilisation de rapports internes : L'usage de la règle informable est gratuit tant qu'on ne franchit pas la ligne séparant le modèle de l'amorce. Il coûte 2 points (ou 5 points) quand on franchit la ligne.

Reproduire la figure. Le cadre est fourni comme amorce

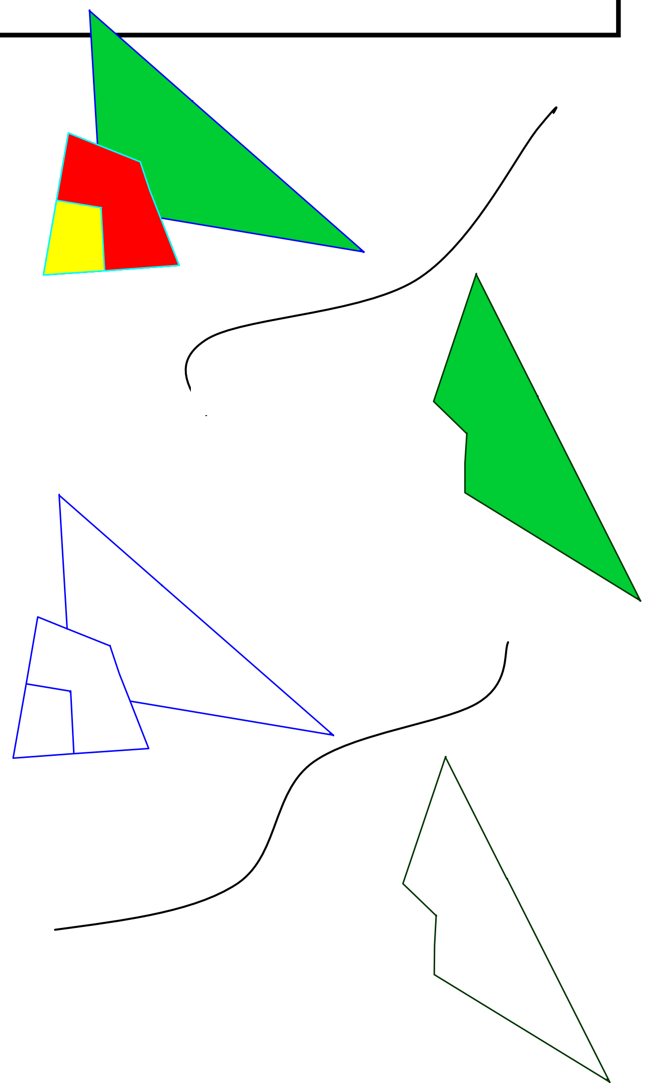




Exemple de restauration utilisé en CE2

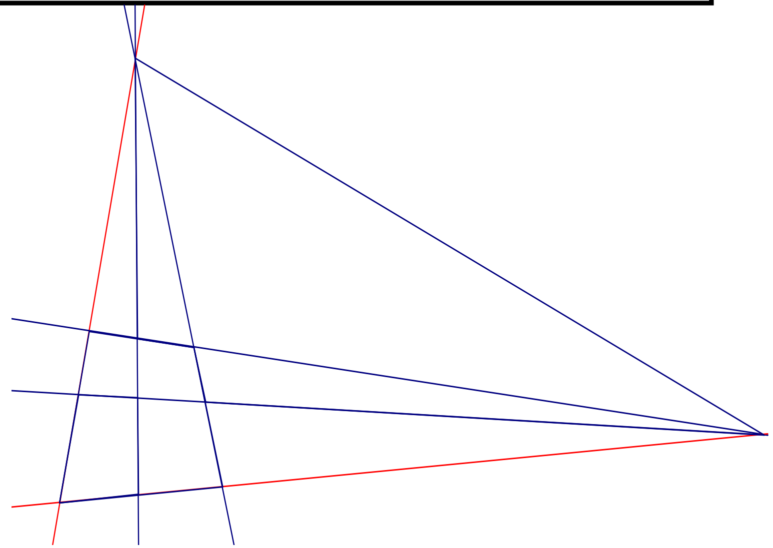
- L'analyse d'une restauration suppose l'analyse de la figure, l'analyse des relations amorce-figure, l'analyse des relations figure-amorce-instrument.
- La reconnaissance d'un problème de restauration commence par la reconnaissance d'une figure comme sous-figure d'une autre. Cela peut être visuellement, pris comme une donnée, vérifié en utilisant un transparent, en utilisant des instruments.
- Le choix de donner à la figure et à l'amorce des orientations différentes écarte la possibilité d'une démarche par translation.
- Ici la restauration de la figure ne nécessite que des alignements et des reports de longueur. Un barème
  - *1 euro pour une règle pour tracer un trait,*
  - *5 euros pour un report de longueur*

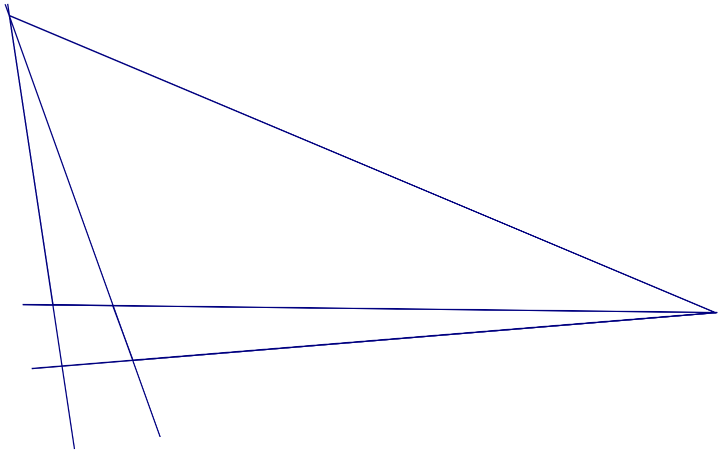
  favorise la recherche d'alignements sur le modèle.



Exemple de restauration utilisé en CE2

- Détermination sur le modèle de relations entre l'amorce, le modèle et la figure-différence.
- Déconstruction, de ces relations et des figures, en unités visuelles (ou en propriétés géométriques) compatibles avec les instruments disponibles, ici des droites et des longueurs.
- Reconstruction de la figure-différence (par enrichissement de la figure-amorce) à l'aide des instruments disponibles. Les droites bleues peuvent être tracées sur l'amorce par prolongement de segments existants.
  Il faudra trouver le moyen de tracer les droites rouges

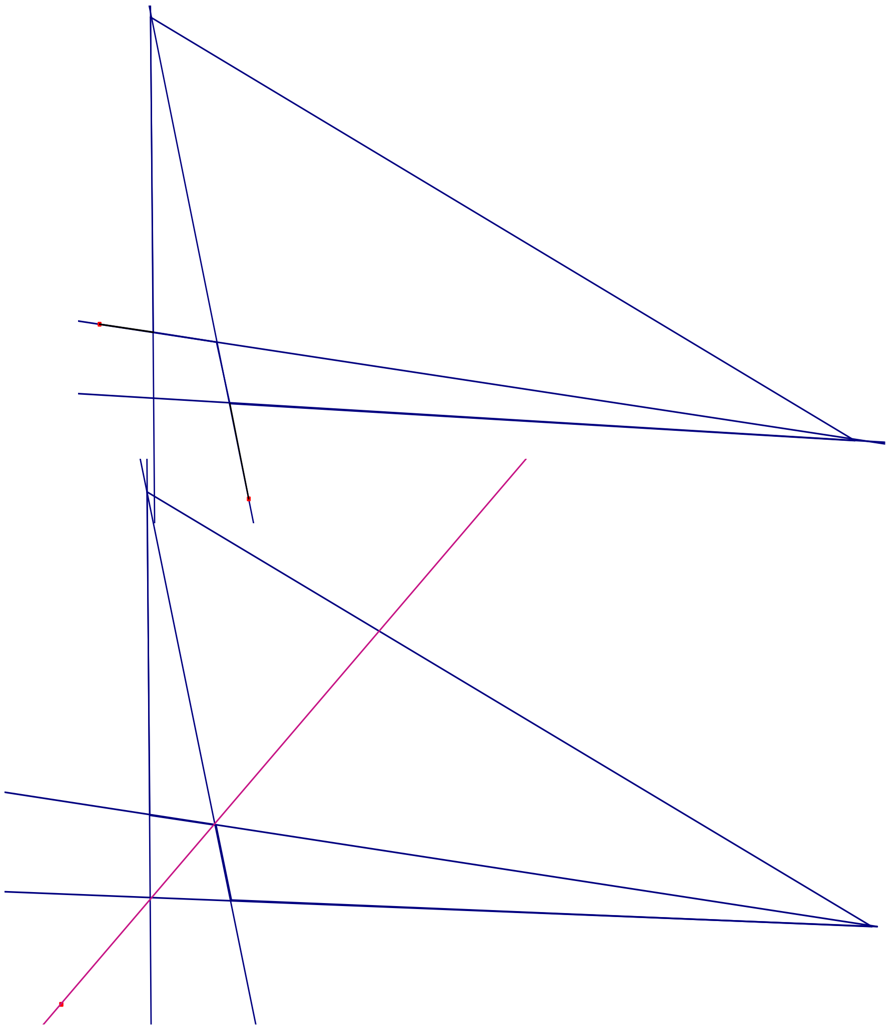




André Revuz

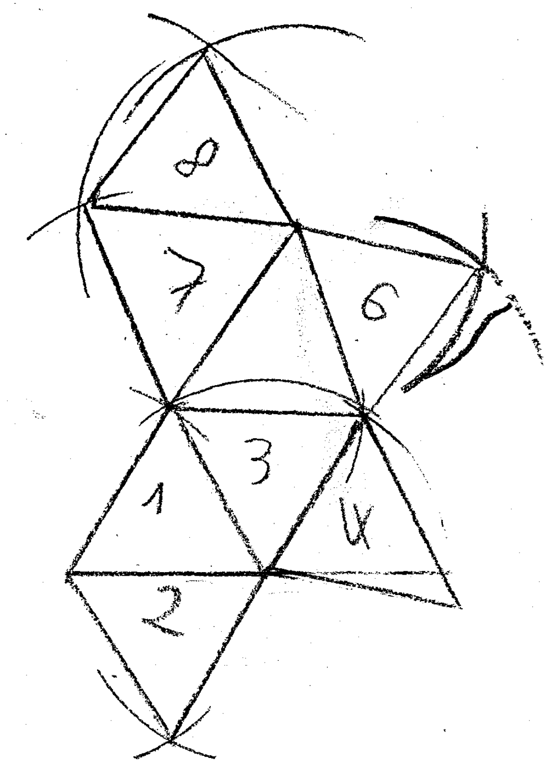
Exemple de restauration utilisé en CE2

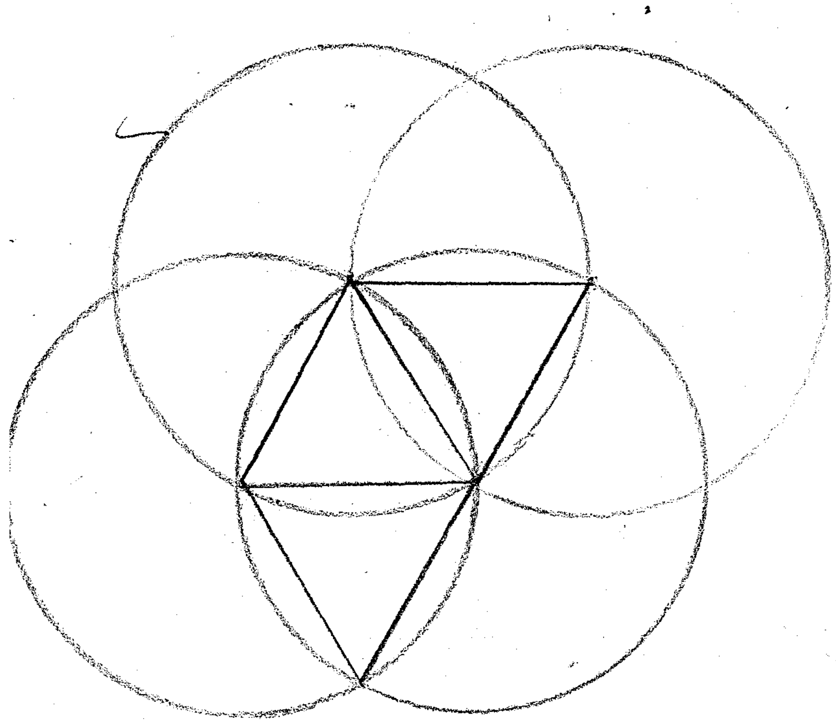
- Pour tracer chaque droite rouge il faut un point supplémentaire qu'on peut obtenir par un report de longueur sur une droite déjà tracée.
- On peut se contenter d'un report si on pense au point d'intersection des droites rouges qui est sur une droite déjà tracée.
- Validation en utilisant un transparent conçu par le maître et mis à disposition de l'élève au moment opportun.
- Coût qui s'exprime par une écriture additive engendrée au fur et à mesure de l'enrichissement de l'amorce. 1+1+5+…



Restaurer le patron d'un octaèdre régulier

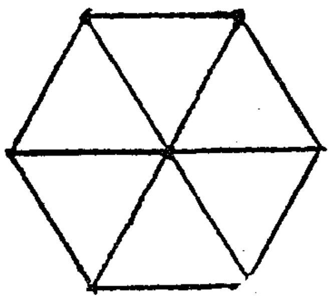
- Le patron de l'octaèdre (à partir d'un côté). Triangles juxtaposés.
- Comment économiser les instruments ? Un même cercle peut servir pour plusieurs triangles…

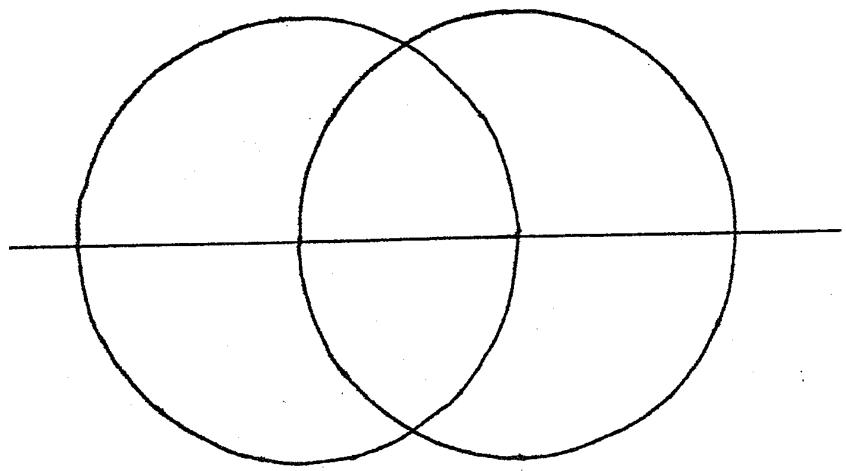




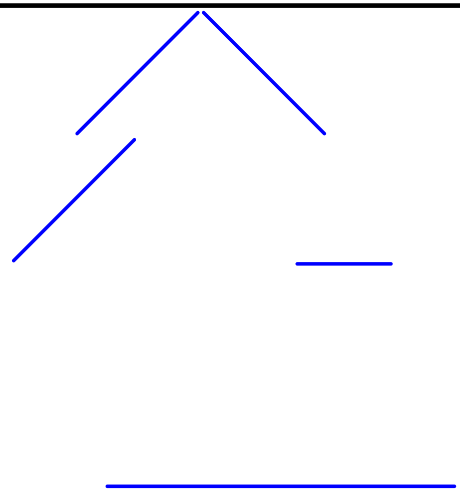
Restaurer un hexagone régulier

- Restaurer un hexagone à partir d'une amorce (deux cercles)
  - Compas : 5 euros
  - Règle : gratuit
  - Report de longueur : 2 euros
- Avec la symétrie, on en déduit la construction d'un milieu à la règle et au comp





Autre exemple



- Compléter le sapin pour qu'il soit symétrique. Trouver son axe de symétrie.
- Barème

Instruments	**Coût en euros**
transparent	700
trait passant par deux points de la figure	0
trait obtenu par prolongement d'un trait de la figure	1
report de longueur	5
Equerre	700