La géométrie, pourquoi et comment ?

Daniel PERRIN

Pour des précisions : ma page web

Je vais aborder beaucoup de thèmes, de manière très sommaire. Pour des détails voir :

http ://www.math.u-psud.fr/∼perrin/

Notamment les rubriques : géométrie, conférences, livre de géométrie projective, etc.

Voir aussi le rapport de la commission Kahane :

KAHANE Jean-Pierre, *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob (2002).

L'état des lieux

L'enseignement

Les détracteurs

Pourquoi faire de la géométrie ?

Parce que c'est utile

Penser géométriquement

Apprendre à raisonner

Comment faire de la géométrie ?

Les fondements théoriques : Erlangen

Transitivité et invariants

Des propositions,

de la maternelle à l'université

Introduction :

L'état des lieux

La géométrie au lycée :

un domaine en voie de disparition ?

Avec les nouveaux programmes de lycée, les points suivants ne seront plus connus des bacheliers scientifiques :

Rotation (plane), homothétie, similitude, composition, barycentres, cas d'isométrie et de similitude des triangles, etc.

Il y a déjà longtemps qu'on n'étudie plus les transformations de l'espace, ou les coniques, au lycée.

En classes préparatoires :

un autre géocide se prépare ?

Vont être exterminées :

• les coniques, ou ce qu'il en reste,

• les courbes planes, les surfaces (toute la partie géométrie différentielle),

• les isométries vectorielles et affines en dimension trois,

• peut-être (?) le produit vectoriel

Les arguments pour justifier ce massacre vont de : *c'est poussiéreux* à *c'est chronophage*.

Le coup de grâce,

PISA et les programmes de collège ?

Un syllogisme imparable :

Les performances de la France aux évaluations PISA sont mauvaises.

Or, la géométrie est totalement absente de ces évaluations.

Donc elle ne sert à rien et il faut la supprimer pour se concentrer sur les domaines évalués.

Les positions de quelques détracteurs :

1) La géométrie est une science morte

Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui ... marque la mort, comme champ de recherches, de la géométrie "élémentaire".

Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc.) Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...

(N. Bourbaki)

Les positions des détracteurs :

2) La géométrie est inutile

Il est bien vrai que les formules trigonométriques sont tout à fait indispensables à trois professions éminemment respectables :

1) les astronomes

2) les arpenteurs

3) les auteurs de manuels de trigonométrie.

(J. Dieudonné)

Les positions des détracteurs :

3) La géométrie n'est pas plus formatrice que les autres branches des mathématiques

La géométrie c'est les mathématiques de papa. Je crois qu'on peut donner une formation d'aussi bonne qualité tant en contenus qu'en compétences acquises en enseignant les mathématiques discrètes, les statistiques ou l'algorithmique qu'en enseignant la géométrie d'Euclide

On notera le choix des domaines indiqués qui, outre la géométrie, écarte délibérément l'analyse.

(J. Moisan)

Première partie :

Pourquoi faut-il enseigner la géométrie ?

Pourquoi faut-il enseigner la géométrie :

1) parce qu'elle est utile

Je ne suis pas du tout spécialiste de math. appli., mais il y a des dizaines d'exemples, voir la partie Géométrie du rapport de la commission Kahane.

Je cite en vrac :

L'architecture, l'urbanisme, la topographie, les mesures agraires, l'imagerie, la CAO, l'infographie, le dessin industriel, le design, la robotique, l'astronomie, la mécanique, la physique, la balistique, la menuiserie, la carrosserie (courbes de Bézier), la typographie (idem), la biologie (ADN et double hélice), la tomographie, la recherche opérationnelle, l'optique, la cristallographie, la navigation, la cartographie, le bricolage, etc.

sans oublier ... les mathématiques (et les ratons-laveurs) !

L'utilité de la géométrie :

Voici quatre exemples autour de quatre thèmes :

- Atteindre l'inaccessible
- Un modèle du monde
- L'architecture
- L'imagerie

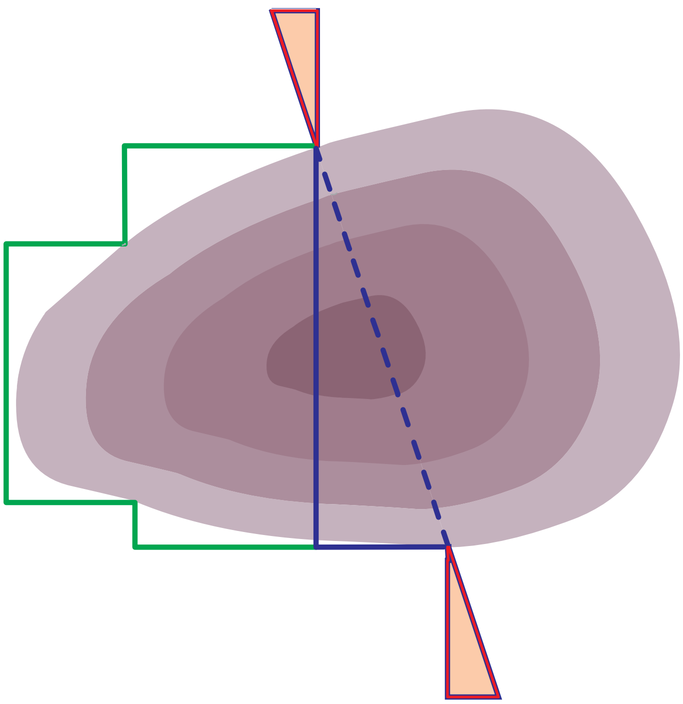
Atteindre l'inaccessible : l'exemple du tunnel de Samos 6-ième siècle av. J.-C.

Samos est une île grecque, proche de la Turquie, dont les habitants ont construit, au 6-ième siècle avant notre ère, un tunnel d'un kilomètre de long à travers le mont Castro.

Ce tunnel permettait d'assurer l'approvisionnement en eau de la ville (fortifiée) de Samos (du nord vers le sud). Il a été construit par l'architecte Eupalinos de Megara, en partant des deux extrémités et en se rejoignant au milieu, avec une erreur négligeable

Une hypothèse sur la méthode a été fournie par Héron d'Alexandrie (premier siècle après J.-C.), voir figure.

Le tunnel de Samos (suite)

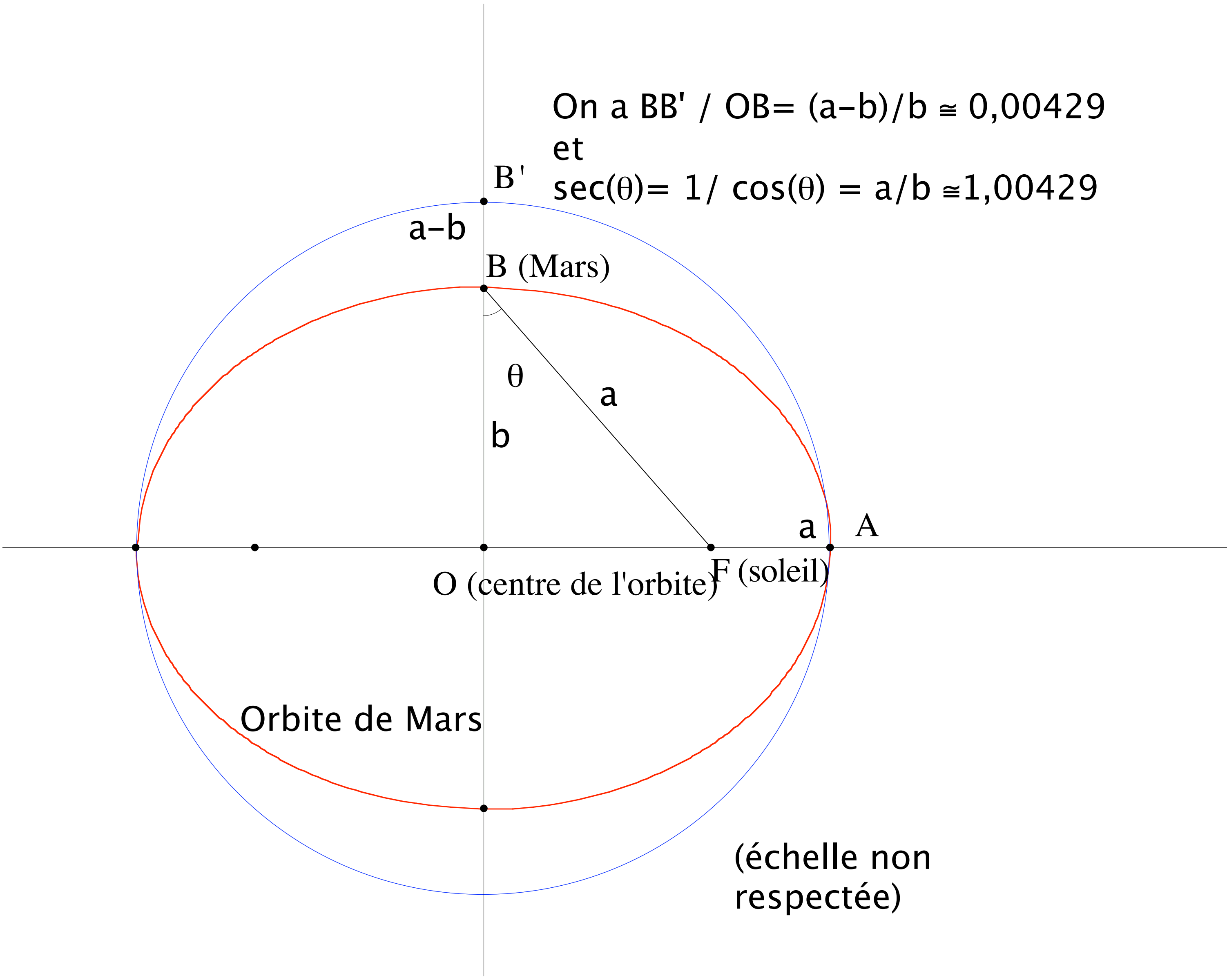


By measuring the net distance traveled in each of two perpendicular directions, the lengths of two legs of a right triangle are determined, and the hypotenuse of the triangle is the proposed line of the tunnel. By laying out smaller similar right triangles at each entrance, markers can be used by each crew to determine the direction for tunneling. (T. Apostol)

La géométrie comme modèle du monde : Kepler, Mars et l'ellipse

Vers 1600, Kepler, grâce aux mesures de Tycho Brahe, sait que les trajectoires des planètes sont des ovales (contrairement à Galilée qui pense que ce sont des cercles). Cela le perturbe beaucoup, il dit avoir rencontré *une charretée de fumier : l'ovale. Ah, si seulement la forme était une ellipse parfaite, on trouverait toutes les réponses dans Archimède et dans Apollonius.*

Le détail qui provoque la découverte est la coïncidence de deux nombres, reliés à la géométrie de l'ellipse !



L'eurêka de Kepler

La géométrie comme outil pour l'architecture

Figure 7 This mesh which possesses a face-face offset at constant distance has been created by an iterative design process which employs subdivision and optimization using both (2) and (3) in an alternating way (image courtesy B. Schneider).

(Geometric Computing for Freeform Architecture, *Journal of Mathematics in Industry*, 2011)

"It is important to know that in many cases optimization without additional geometric knowledge does not succeed."

La géométrie (projective) comme outil pour l'imagerie

Un exemple est celui de la reconstitution d'images par **mosaïque**, à partir de plusieurs images fournies par une caméra, du même point de vue, mais avec des orientations différentes. (On notera parmi les applications possibles, les véhicules autonomes.)

Une telle image est une projection centrale (ou perspective) et pour les recoller, il faut composer les perspectives : on obtient ainsi une homographie d'un plan sur l'autre.

On note, sur la figure suivante, que les rectangles peuvent être transformés en des quadrilatères quelconques.

La géométrie comme outil pour l'imagerie (suite)

FIG. 4 – Quatre images des quais de Grenoble, prises du même point de vue.

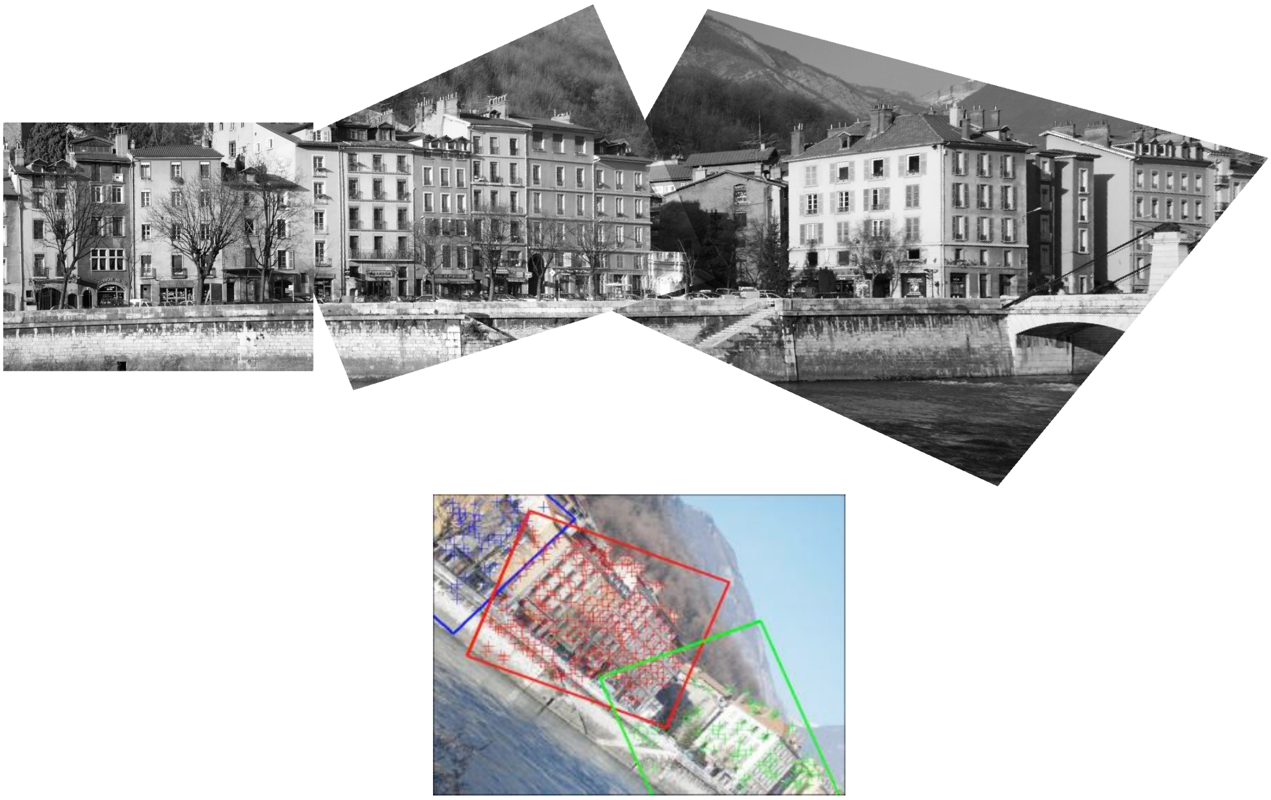


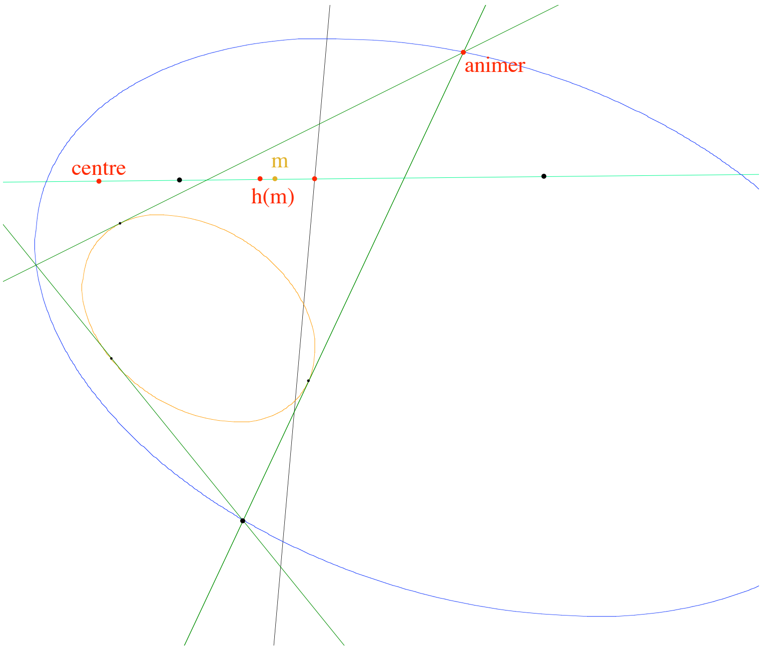
FIG. 5 – Mosaïque obtenue et illustration des positions relatives des trois premières images, vues dans la quatrième.

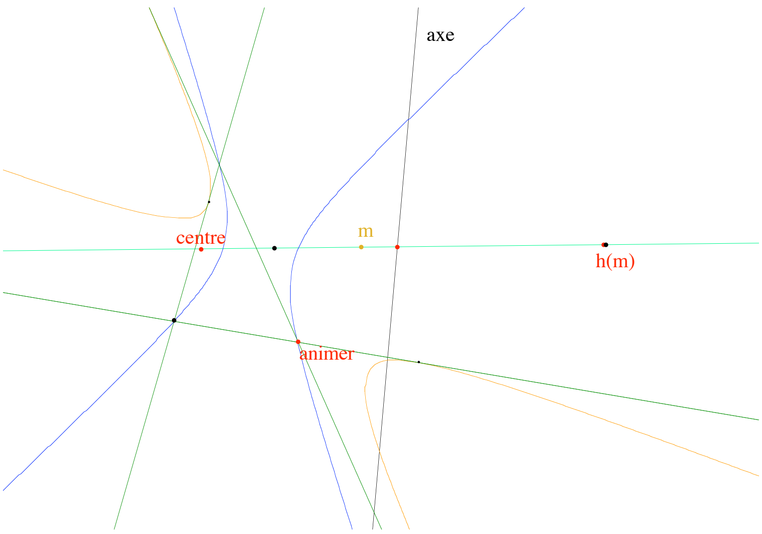
La géométrie comme outil pour l'imagerie (suite)

Bien sûr, il y a maintenant des logiciels, qui permettent de faire de la géométrie, y compris de la géométrie projective, mais dès qu'on les utilise et qu'on veut les améliorer, on se rend compte qu'ils posent autant de questions qu'ils n'en résolvent.

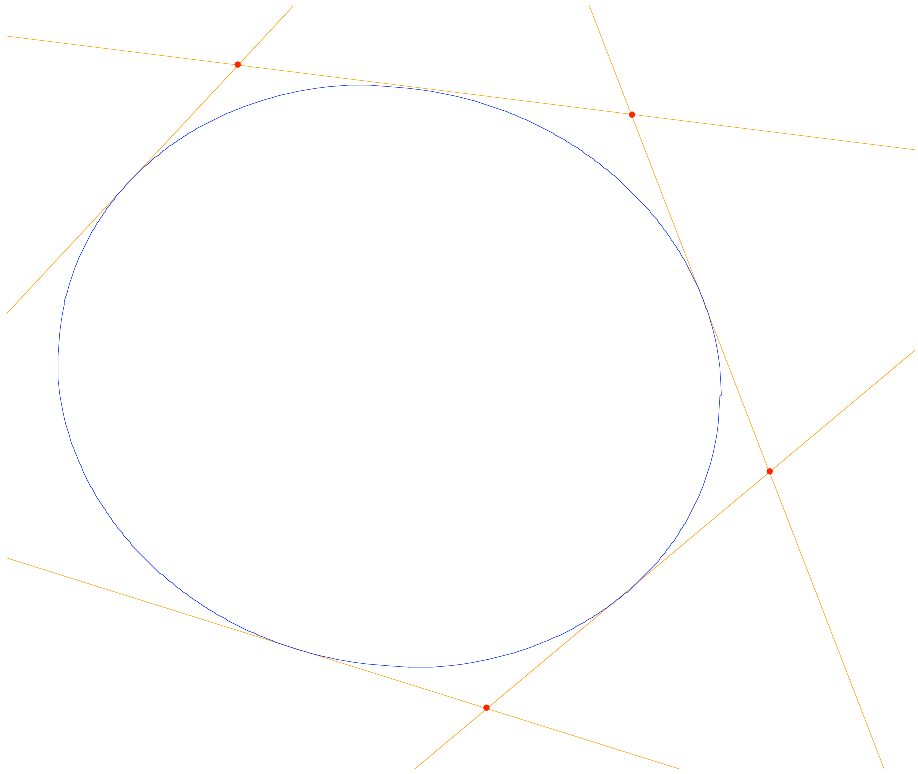
Voici deux exemples.

Exemple 1 : Comment transformer une figure (ici un polygone de Poncelet) par homographie (ici une homologie) ?





Exemple 2 : Tous les logiciels ont une macro qui construit une conique passant par 5 points, mais pour construire une conique tangente à 5 droites ?



La réponse est dans la dualité, ou plutôt la polarité par rapport à une conique.

Pourquoi faut-il enseigner la géométrie :

2) penser géométriquement

C'est un apport dans toutes les disciplines scientifiques, voir encore le rapport Kahane. Voici trois exemples :

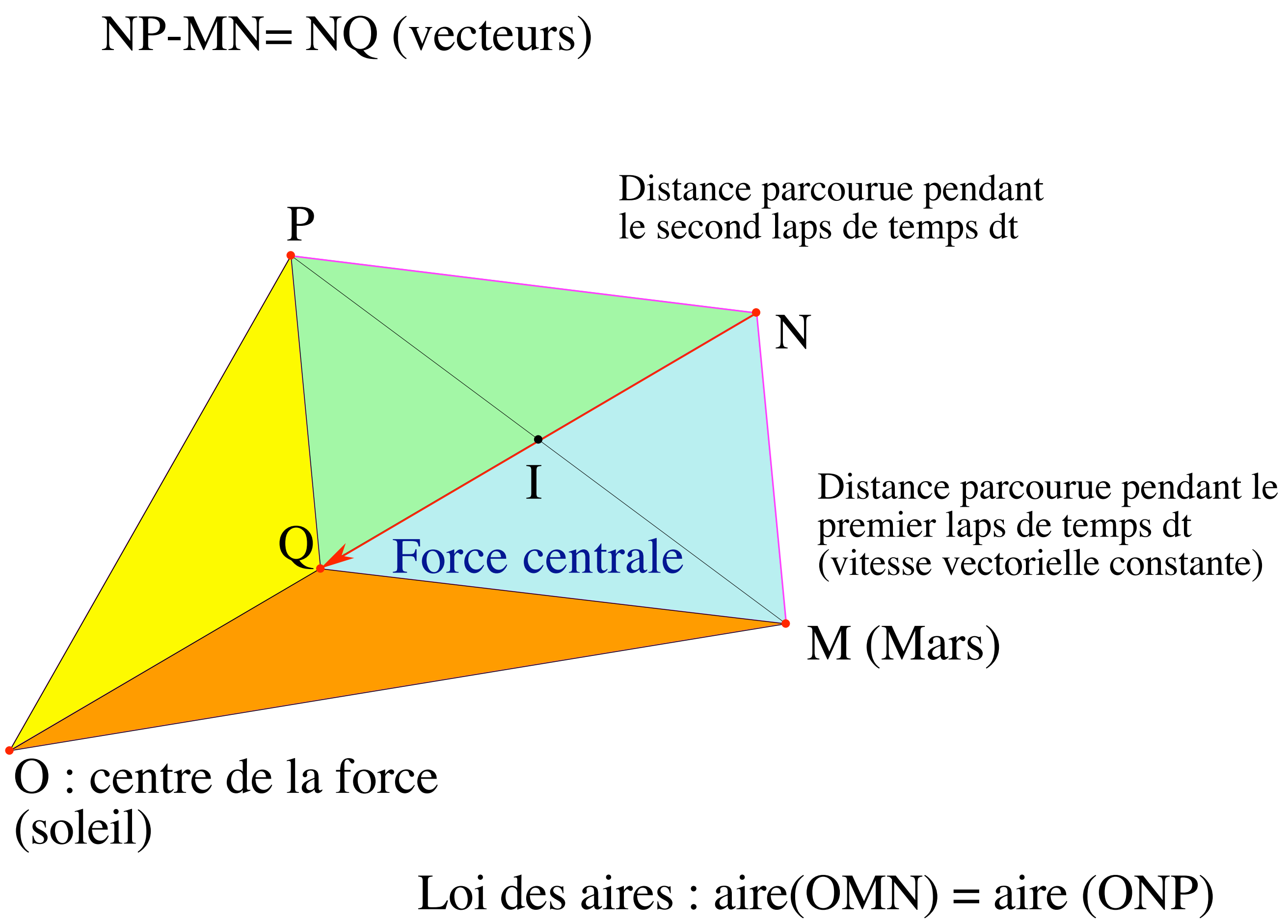
- En physique : la deuxième loi de Kepler
- En analyse : la factorielle
- En algèbre : la résolution des équations du quatrième degré

Penser géométriquement :

la deuxième loi de Kepler

On a vu que les planètes M ont une trajectoire elliptique dont le soleil occupe un foyer O. Le long de cette trajectoire, leur mouvement n'est pas uniforme, mais la deuxième loi de Kepler affirme que les aires balayées par le rayon vecteur OM pendant des laps de temps égaux sont égales.

Newton a prouvé ce résultat à partir de la seule hypothèse de l'existence d'une force d'attraction **centrale**, par un raisonnement géométrique.



C'est le moment d'utiliser le lemme du chevron de *Mathématiques d'École* :

$$\frac{\mathcal{A}(OQM)}{\mathcal{A}(OQP)} = \frac{IM}{IP} = 1.$$

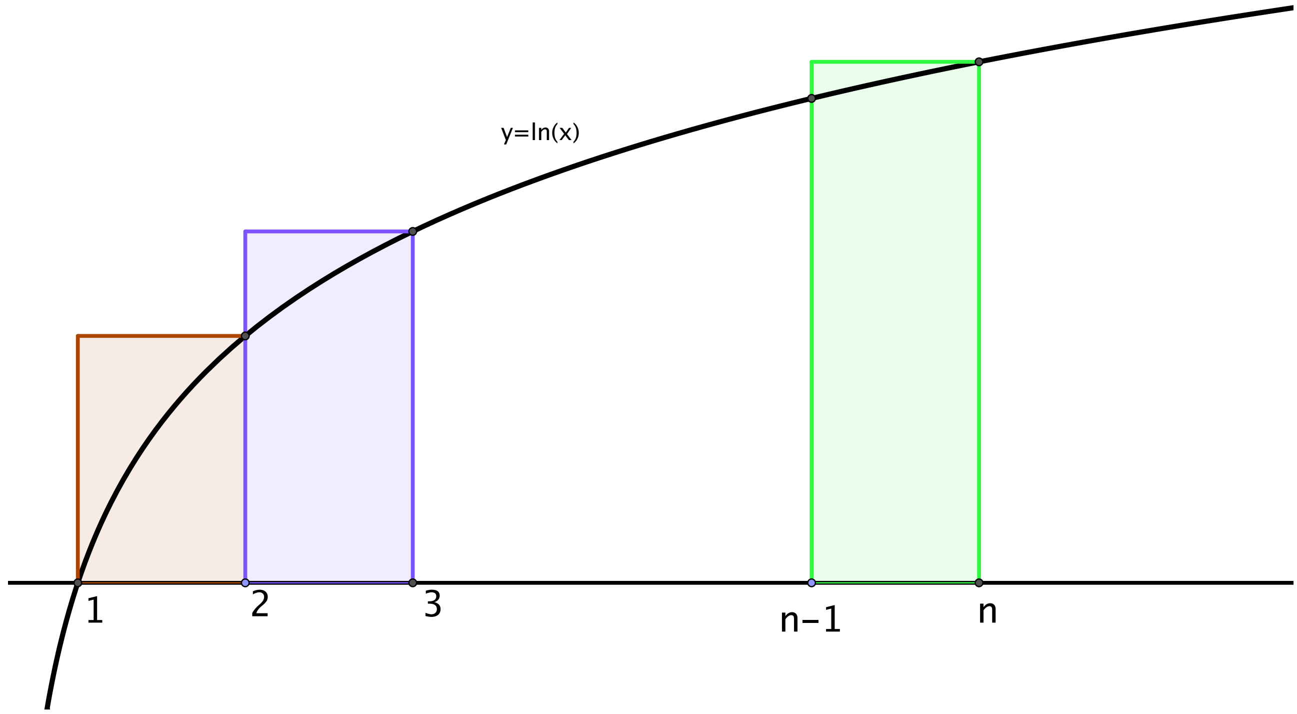
Penser géométriquement :

en analyse

Pour mesurer la croissance de $n!$, il est naturel de passer au logarithme et d'étudier :

$$\ln(n!) = \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n).$$

L'interprétation géométrique de cette somme en donne aussitôt un encadrement qui est un succédané de la formule de Stirling.



$$\ln(n!) = \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n) \geq \int_1^n \ln(t)\,dt$$
$$= [x\ln(x) - x]_1^n = n\ln(n) - n + 1$$

et on en déduit :

$$n! \geq n^n e^{-n} e.$$

Avec les rectangles en-dessous on a une inégalité dans l'autre sens, avec les trapèzes et les points médians on obtient le terme en $\sqrt{n}$.

Penser géométriquement :

en analyse (suite)

Il faut donc que l'élève s'accoutume de bonne heure à sentir la correspondance qu'ont entre elles les opérations de l'analyse et celles de la géométrie ; il faut qu'il se mette en état, d'une part, de pouvoir décrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture.

(G. Monge)

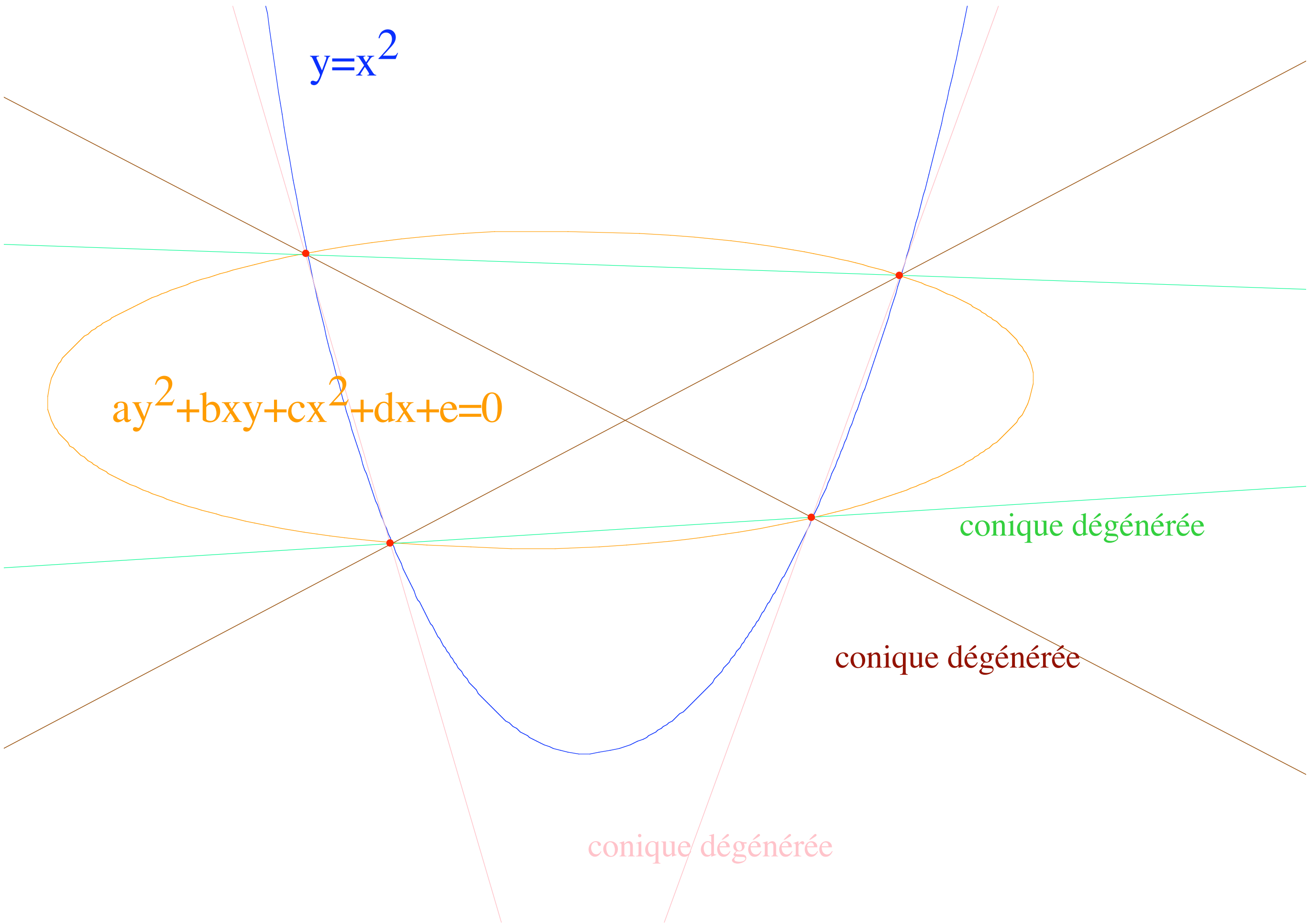
Penser géométriquement :

en algèbre

On sait, depuis Cardan, résoudre les équations algébriques de degré 3 et Ferrari a montré qu'on pouvait en déduire la résolution des équations de degré 4.

On comprend bien mieux la méthode si l'on pense géométriquement.

Pour résoudre $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, on traduit cette équation par $y - x^2 = 0$ et $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + e = 0$: l'intersection de deux coniques. On pense alors en termes de pinceau ...



Si A, B sont les matrices définissant les deux coniques, on doit résoudre d'abord l'équation du troisième degré $\det(A + \lambda B) = 0$ pour trouver les coniques dégénérées du pinceau, puis résoudre deux équations du second degré pour trouver l'intersection d'une conique avec les deux droites d'une dégénérée.

Penser géométriquement :

la prochaine fois, je vous le chanterai

Avec le p'tit père Perrin
Il faut toujours faire des dessins

Chanson des étudiants de CAPES d'Orsay (1992)

Puisqu'on parle de chanter :

Certains disent :

La disparition de chapitres de géométrie un tantinet poussiéreux est souhaitable, mais l'importance de la représentation géométrique en mathématiques garde tout son intérêt et toute sa force.

L'intuition géométrique doit rester un guide essentiel, en Algèbre comme en Analyse.

Mais comment penser géométriquement quand on n'a pas fait de géométrie ?

Comme le dit Aristide Bruant :
Vous vouderiez-t-y que je travaille,
J'pourrais pas, j'ai jamais appris

Pourquoi faut-il enseigner la géométrie 3 :

l'apprentissage du raisonnement

L'objectif affiché dans le rapport de la commission Kahane :

poser des problèmes, observer, réfléchir, raisonner, essayer, se tromper, surmonter ses erreurs

vaut pour la formation de **tous les citoyens**

Les mathématiques, et en mathématiques, la géométrie, contribuent à réaliser cet objectif.

L'apprentissage du raisonnement :

un avis autorisé

J'ai toujours pensé que l'on progressait davantage en séchant sur un problème de géométrie qu'en absorbant toujours plus de connaissances mal digérées.

Alain Connes, médaille Fields 1976

Fort de près de quarante années consacrées à la formation des maîtres, je confirme !

L'apprentissage du raisonnement, quelques principes pour faire VRAIMENT de la géométrie

• Ne pas confondre raisonnement et démonstration.

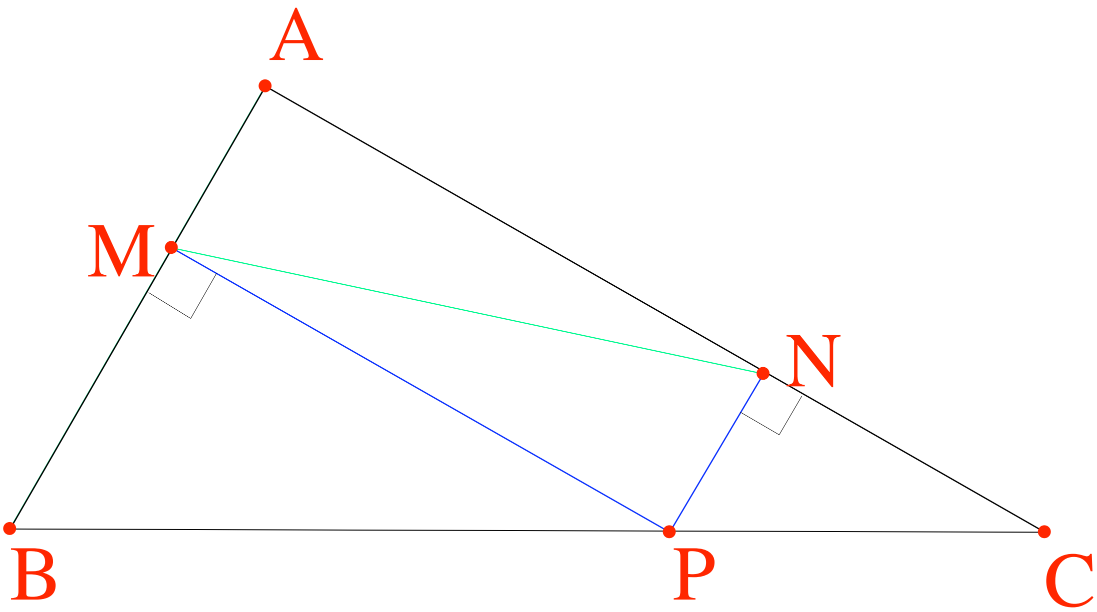
• Privilégier les problèmes ouverts, notamment les problèmes de lieux et de constructions.

• Utiliser les logiciels de géométrie pour expérimenter et conjecturer.

• Encourager l'initiative (par exemple une construction supplémentaire) et l'autonomie (donc tolérer d'autres méthodes que celles prévues et comprendre que l'erreur est partie intégrante de la recherche).

Un exemple de problème ouvert :

Soient ABC un triangle rectangle en A, P un point de l'hypoténuse, M et N ses projections sur les côtés de l'angle droit. Pour quelle position de P la longueur MN est-elle minimale (niveau 5-ième) ? Et si le triangle n'est pas rectangle (plus difficile) ?

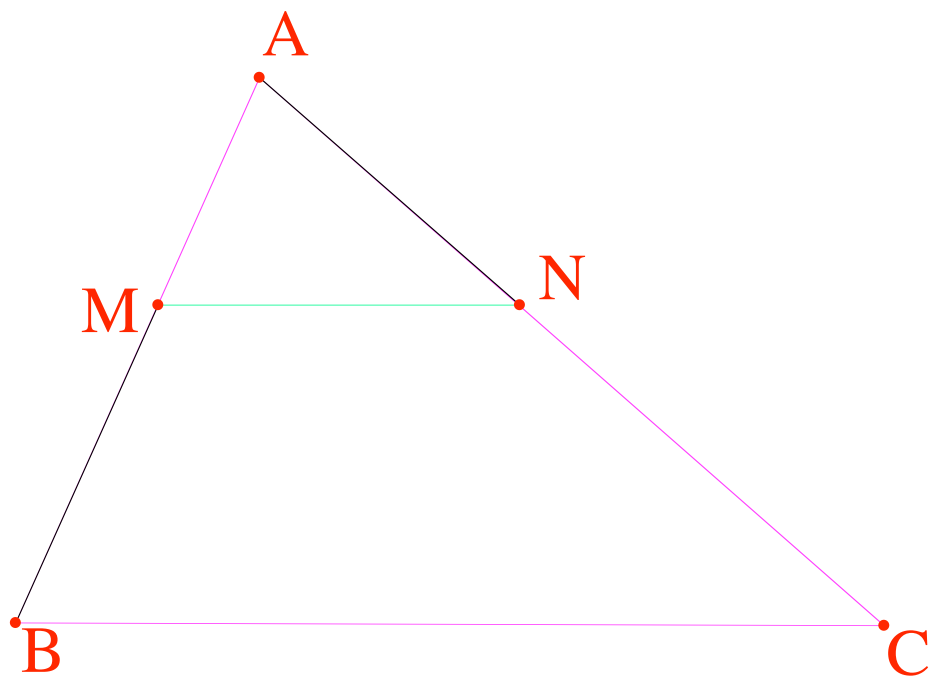


Un autre exemple de problème ouvert :

Soit ABC un triangle. Construire des points $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ tels que les droites (MN) et (BC) soient parallèles et qu'on ait l'égalité de longueurs $AN = MB$.

Voir [DPR] pour une discussion, il y a au moins 9 méthodes.

AN=MB,
(MN) parallèle à (BC)



Deuxième partie :

Comment faire de la géométrie ?

Les fondements théoriques :

le programme d'Erlangen

C'est la thèse de Felix Klein (1872).
Son but : **unifier** les géométries.

Principe : Une géométrie c'est la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X.

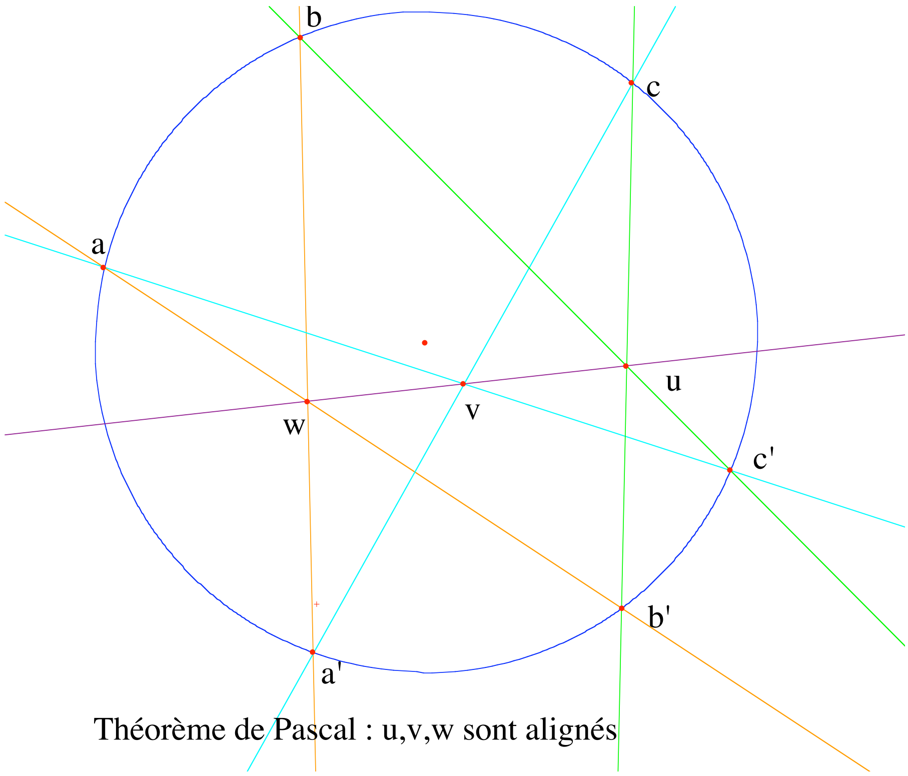
Exemples : Le plan affine euclidien et le groupe des isométries euclidiennes, le plan affine et les bijections affines, le plan projectif et les homographies.

Erlangen et la classification des résultats

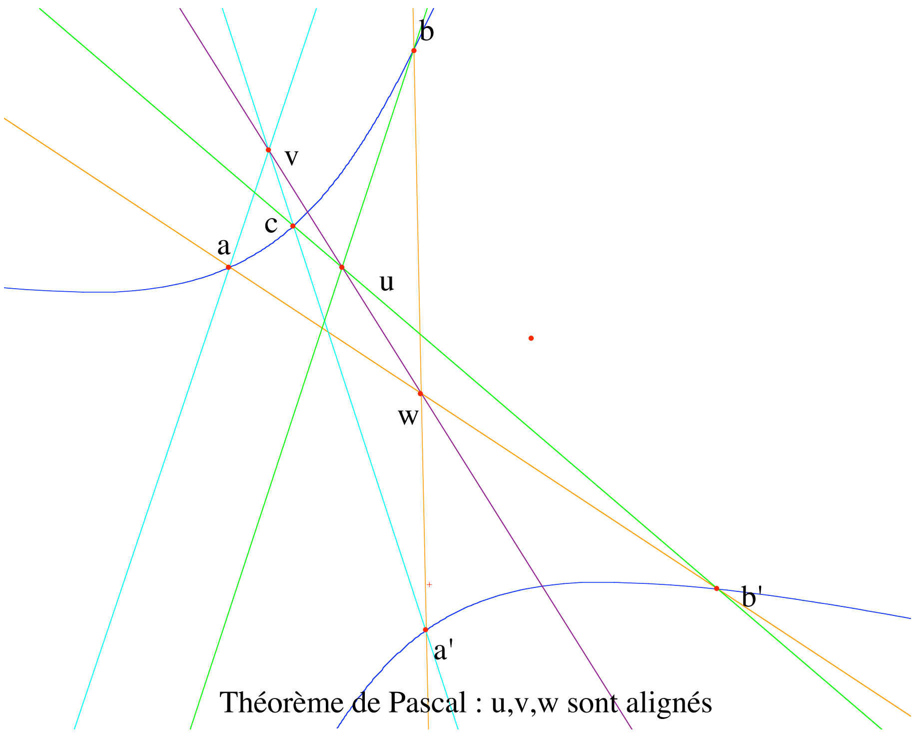
Chaque théorème possède une **niche écologique** privilégiée : pour Pythagore c'est la géométrie euclidienne, pour Thalès, la géométrie affine, pour Pappus la géométrie projective.

Quand on a repéré cette niche, un moyen de prouver un théorème est de le ramener à un cas particulier en utilisant la **transitivité**. Exemple : le théorème de Pascal. On peut l'énoncer avec un cercle, il ressemble à un théorème euclidien, avec une ellipse, il semble affine, avec une conique quelconque : en réalité il est projectif.

On peut alors le démontrer par transitivité en montrant que toute conique est image d'un cercle par une homographie.



Théorème de Pascal : u,v,w sont alignés



Théorème de Pascal : u,v,w sont alignés

Utilisation de la transitivité

l'exemple de la géométrie affine

Principe :

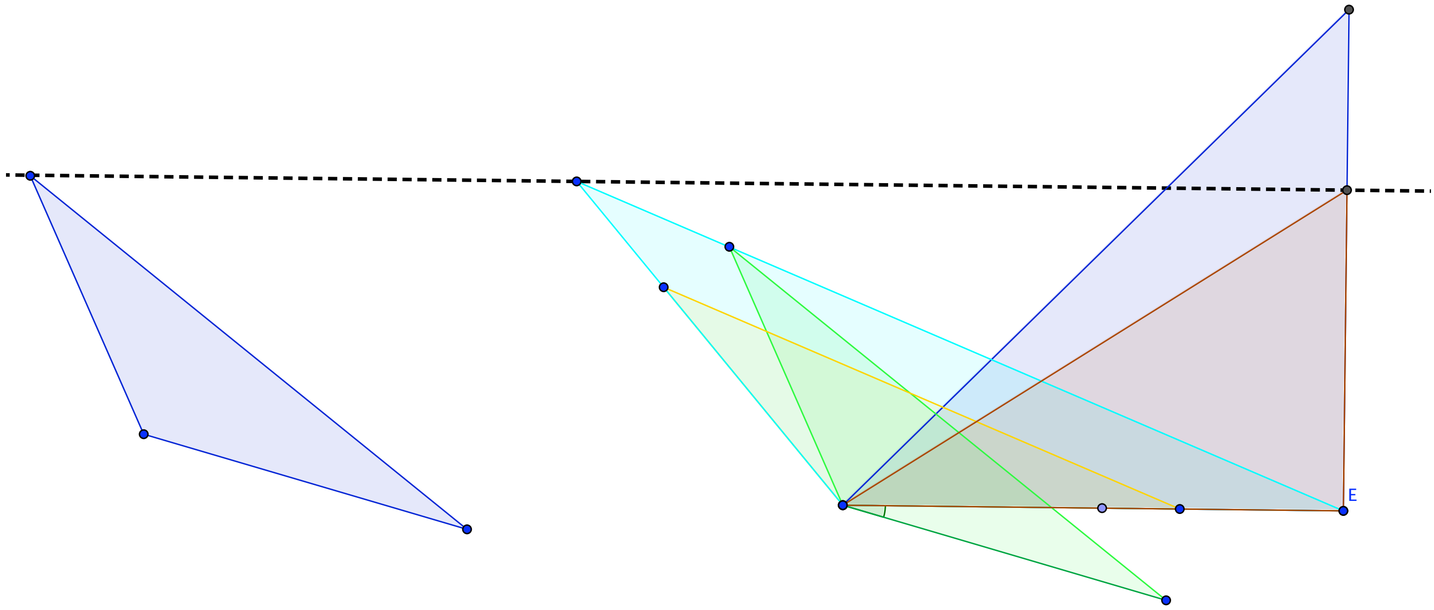
1) On repère que le problème est un problème affine.

2) On effectue une transformation affine pour transformer le problème en un problème plus simple. On utilise pour cela des propriétés de **transitivité**, par exemple :
le groupe affine est transitif sur les triangles ou sur les parallélogrammes.

3) On résout le problème simplifié et on revient au cas initial.

Le groupe affine

est transitif sur les triangles



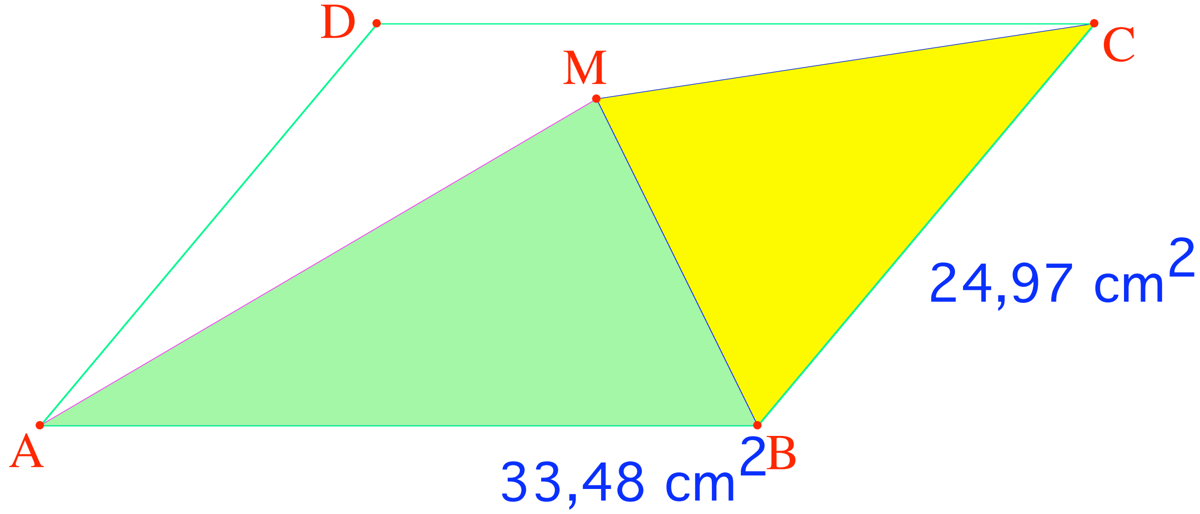
On passe d'un triangle quelconque (à gauche) à un autre (ici un triangle rectangle isocèle) par une suite de transformations affines : translation, rotation, homothétie, transvection, affinité.

Un exemple :

Le problème du parallélogramme

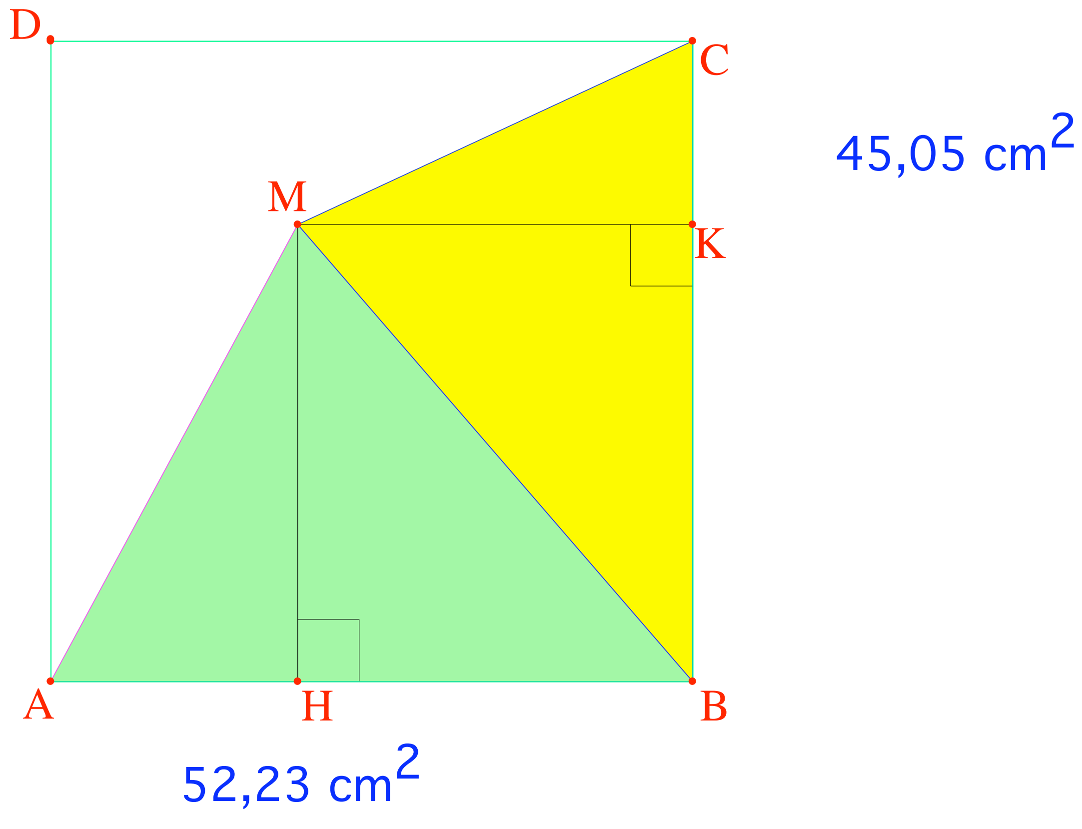
L'exercice suivant est extrait du document d'accompagnement des anciens programmes de seconde (2000).

Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point intérieur. Comment doit-on choisir M pour que les aires des triangles AMB et BMC soient égales ?



Le problème du parallélogramme (suite)

Comme le problème est affine et que tous les triangles sont équivalents sous le groupe affine, on peut supposer que $ABCD$ est un carré.



Cette fois, les côtés AB et BC sont égaux donc $\mathcal{A}(AMB) = \mathcal{A}(BMC) \Longleftrightarrow MH = MK \Longleftrightarrow M$ est sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

Le problème du parallélogramme (fin)

Attention, la notion de bissectrice n'est pas affine, donc la solution n'est pas la bissectrice du parallélogramme. Mais comme la bissectrice est aussi la diagonale du carré et que cette propriété est ensembliste, donc conservée par toute bijection, c'est la diagonale de $ABCD$ qui est solution.

Ce type de réflexion théorique est un objectif important de la **formation des maîtres** *car il donne au professeur un "temps d'avance" sur ses élèves.*

Les invariants comme mesure du défaut de transitivité

Lorsque le groupe G n'est pas transitif sur X, on cherche à déterminer ses **orbites** (l'orbite de $x \in X$ est l'ensemble des transformés $g.x$).

Pour cela, on associe à $x \in X$ des **invariants** :

$$\Phi_1(x), \ldots, \Phi_d(x)$$

numériques en général.

Dire que Φ_k est invariant signifie que l'on a

$$\Phi_k(g.x) = \Phi_k(x),$$

autrement dit, si x et $y = g.x$ sont dans la même orbite ils ont mêmes invariants.

Un bon système d'invariants assure aussi la réciproque : si les invariants sont les mêmes, les objets sont dans la même orbite.

Les invariants de la géométrie élémentaire

• Si X est l'ensemble des couples de points du plan affine euclidien, G le groupe des isométries, un invariant du couple (A, B) est la **longueur** AB.

• Pour les couples de demi-droites un invariant est leur **angle**.

• Un invariant de la géométrie affine est l'**aire** (ou les rapports d'aires).

Tous ces invariants jouent un rôle essentiel dès qu'on fait de la géométrie. Un "méta-théorème" dit même que tous les théorèmes d'une géométrie peuvent être prouvés en utilisant ses invariants.

L'invariant angle et ses accessoires

Pour être utilisés de manière efficace, les invariants ont besoin d'accessoires. Dans le cas des angles :

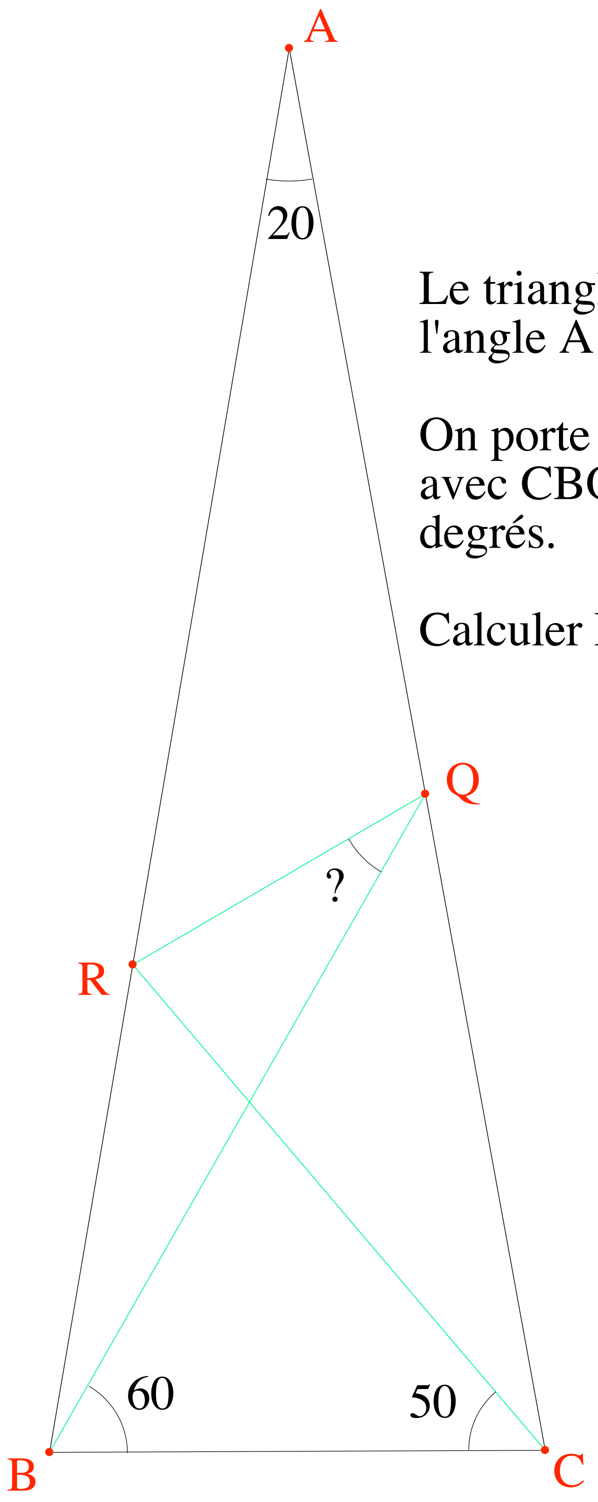
• Les notions de complémentaire et supplémentaire

• La somme des angles d'un triangle

• Les propriétés relatives aux parallèles (angles alternes-internes, etc.)

• Le théorème de l'angle inscrit et sa réciproque

Un exemple, pas si facile, pour vous distraire.



Le triangle ABC est isocèle en A avec l'angle A égal à 20 degrés.

On porte Q sur [AC] et R sur [AB] avec CBQ= 60 degrés et BCR= 50 degrés.

Calculer BQR.

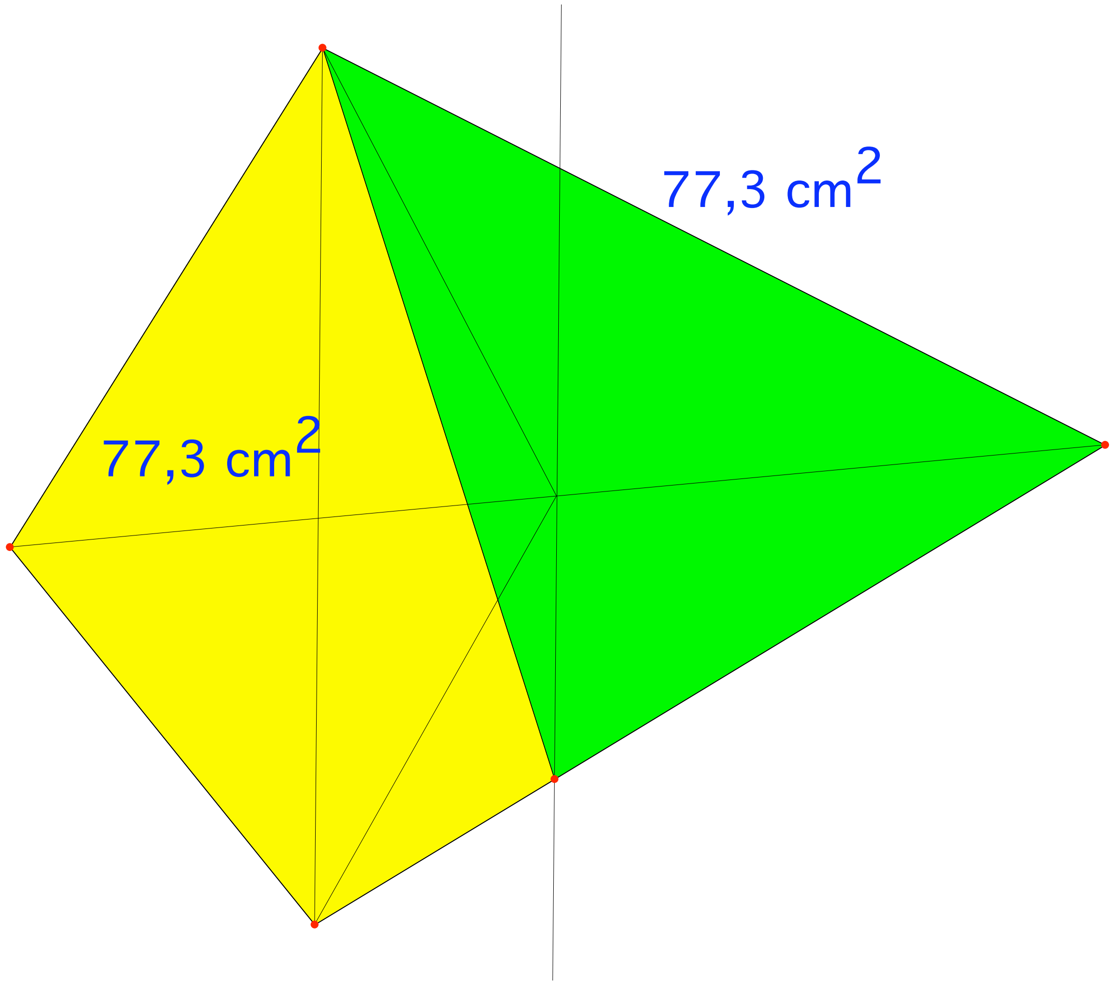
L'invariant aire et ses accessoires : les lemmes "du collège"

Voir par exemple *Mathématiques d'École*, mais la plupart de ces lemmes sont déjà dans Euclide.

- Parallélogramme, médiane, trapèze
- Proportions et chevron

Un exercice et sa solution :

Partager un quadrilatère convexe en deux parties d'aires égales par une droite issue d'un sommet.



La solution utilise le lemme de la médiane et celui du trapèze et de multiples variantes sont possibles.

Les fondements théoriques de l'usage des cas d'isométrie et de similitude : critères de transitivité

Les cas d'isométrie décrivent les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des autres éléments que ceux utilisés) **sans être obligé d'exhiber cette isométrie**.

Comme auraient pu dire Francis Blanche et Pierre Dacq :

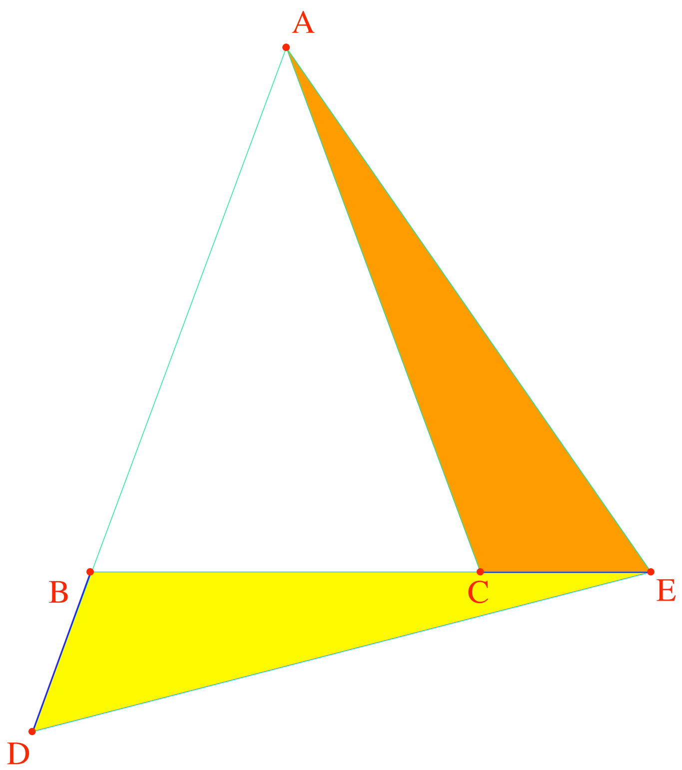
– *Pouvez-vous envoyer ce triangle ABC sur $A'B'C'$?*

– *Oui*

–*Il peut le faire !*

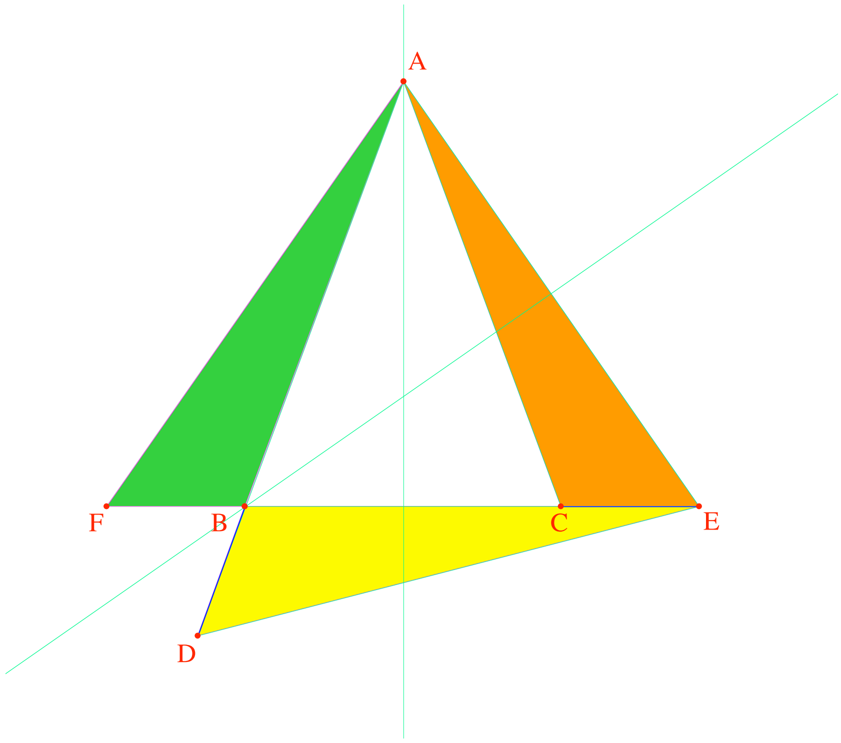
Un exemple, avec les cas d'isométrie

Le triangle ABC est isocèle en A avec $AB > BC$. On a $BD = CE = AC - BC$. Montrer qu'on a $AE = DE$.



Les triangles ACE et EBD sont isométriques car on a $CE = BD$, $AC = BC + CE = EB$ et les angles en C et B sont égaux comme supplémentaires des angles à la base de ABC.

Avec les transformations



On construit F symétrique de E par rapport à la médiane-hauteur de ABC. On a donc $AE = AF$.

On utilise ensuite la symétrie par rapport à la bissectrice de $\widehat{ABC}$. On montre qu'elle envoie F en D (car $CE = BF = BD$), et A en E (car on a $BA = BE$), mais il faut faire attention aux positions des points.

On en déduit $AF = DE$ et la conclusion.

Les fondements didactiques de l'usage des cas d'isométrie : discussion

Par rapport à la preuve avec les cas d'isométrie, celle qui utilise les transformations présente plusieurs inconvénients :

1) Elle est moins visuelle : les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.

2) Il faut déjà repérer quelles sont les transformations pertinentes.

3) Elle nécessite une construction supplémentaire (le point F).

4) Elle est plus délicate à rédiger à cause des questions de position.

Les cas d'isométrie :

conclusion

Avec les nouveaux projets de programmes, un exercice comme le précédent ne pourrait plus être donné nulle part :

• il n'y a plus les cas d'isométrie,

• il n'y aura bientôt plus les transformations (bien entendu, il reste les symétries axiales, mais le mot *composition* devient prohibé, même en TS ...)

S'il n'y a plus les transformations, il est d'autant plus essentiel de remettre les cas d'isométrie au collège car ils permettront de tenter de continuer de :

- **faire de la géométrie**
- **faire de la géométrie**
- **faire de la géométrie**
- **faire de la géométrie**
- **faire de la géométrie**
- **faire de la géométrie**
- **faire de la géométrie**
- **faire de la géométrie**
- **faire de la géométrie.**

- **Ah, j'oubliais : faire de la géométrie.**

Comment faire de la géométrie ?

• **Au collège, une priorité, réhabiliter Euclide** :

Mieux utiliser les invariants (longueurs, et surtout angles et aires) et réintroduire les cas d'isométrie des triangles dès le collège.

• **Au lycée, dépasser Euclide ?** :

Introduire (avec modération) les invariants orientés (vecteurs et angles) et le produit scalaire.

Introduire un usage raisonné de la notion de groupe (en fin de lycée) sur l'exemple des transformations.

Comment faire de la géométrie ?

• **En licence ou en prépa** :

Revisiter la géométrie à l'aide de l'algèbre linéaire et des formes quadratiques. En contrepartie elle fournit à ces notions un cadre intuitif.

• **En formation des maîtres** :

En vue de l'enseignement au collège, proposer une discussion sur l'axiomatique et l'histoire.

• **En école d'ingénieurs (?)** :

Selon les spécificités, introduire (un peu) de géométrie algorithmique ou projective ou différentielle ou algébrique, etc.

Références

[DPR] DUPERRET Jean-Claude, PERRIN Daniel, RICHETON Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 2001.

KAHANE Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob (2002).

KLEIN Felix, *Le programme d'Erlangen*, Jacques Gabay (1991).

PERRIN Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini (2005).

PERRIN Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations.* Repères IREM, 53, p. 91-110, 2003.

PERRIN Daniel, *La géométrie, un domaine hors-programme ?* dans le Bull. APMEP 496 (2011).