

Présentation d'une A.E.R. co-disciplinaire
permettant de travailler les stratégies de
lecture, l'argumentation, la modélisation et
d'introduire les relations trigonométriques

CII didactique Lyon le 03/06/2013

Le contexte

- Une classe de 3^{ème} hétérogène en collège E.C.L.A.I.R. (45% d'orientation en 2^{nde} GT)
- Cette A.E.R. fait partie d'un P.E.R. de mathématiques sur le calcul de grandeurs inaccessibles.
- Ce P.E.R. s'inspire très largement des travaux des groupes de Marseille, Bordeaux et Poitiers.

Le contexte

- Cette A.E.R. a débuté en janvier.
- Le P.E.R. engagé depuis fin septembre a permis de faire émerger ou de réactiver :
 - Des raisons d'être de la géométrie :
 - Calculer des grandeurs inaccessibles et vérifier l'exactitude d'une mesure
 - Construire ou reproduire des figures astreintes à des conditions
 - Comparer des grandeurs
 - Exprimer une grandeur en fonction d'une autre (lien avec les fonctions)
 - Des raisons d'être de la géométrie des triangles
 - Polygone « le plus simple » et permettant d'étudier les autres polygones par décomposition
 - Permettant de modéliser de nombreuses situations, notamment le triangle rectangle (verticalité, horizontalité...)
 - Permettant de calculer des grandeurs inaccessibles

Le contexte

- Le P.E.R. engagé depuis fin septembre a permis de faire émerger ou de réactiver :
 - Les « types » de grandeurs étudiées en géométrie euclidienne au collège :
 - Longueurs
 - Aires
 - Volumes
 - Angles
 - Certaines techniques relatives au type de tâche « calculer une longueur » :
 - Egalité de Pythagore
 - Théorème de Thalès
 - Utilisation des propriétés des symétries
 - Utilisation des propriétés des polygones particuliers
 - Utilisation des propriétés des droites particulières
 - Utilisation des propriétés du cercle

Le contexte

- Le P.E.R. a également permis :
 - D'établir des liens entre divers types de tâches :
 - Calculer une aire/un volume et calculer une longueur
 - Montrer que 2 droites sont parallèles et calculer une longueur/aire/volume
 - Montrer que 2 droites sont perpendiculaires et calculer une longueur/aire/volume

Le contexte

- Le questionnement :
 - Qu'étudie-t-on en géométrie et pourquoi ?
 - Pourquoi passe-t-on autant de temps à étudier le triangle ? Triangle rectangle ?
 - Peut-on calculer des grandeurs inaccessibles ?
 - Existe-t-il des relations entre les différentes grandeurs permettant de calculer des grandeurs inaccessibles ?

Le contexte

- Des phases d'institutionnalisation organisées sous la forme d'un « inventaire des techniques relatives à un type de tâches » et mettant en lien les différents types de tâches :
 - « Nuage des techniques » - carte mentale
 - « Nuage des types de tâches » - carte mentale
 - Aide au chaînage arrière

Les objectifs de l'A.E.R.

- Objectifs transversaux :
 - Maîtrise de la langue (lire, dire, écrire)
 - L'argumentation
- Objectifs en mathématiques :
 - Travailler les capacités de résolution de problèmes :
 - Stratégies de lecture pour extraire l'information
 - mobiliser différents raisonnements – absurde, chaînage arrière, inductif, déductif - et identifier des stratégies de recherche « figure clé »...
 - Travailler la démonstration :
 - Comprendre sa formalisation
 - comprendre sa portée universelle
 - Comprendre que la validité du résultat obtenu dépend de la validité des hypothèses de départ
 - Motiver la recherche d'une relation entre les côtés d'un triangle rectangle et ses angles aigus puis trouver les relations trigonométriques

Le scénario et le questionnement

- **Phase 1 : en cours de français**

- Le professeur de français (Pf) distribue un texte aux élèves
- Pf : « Je vous propose d'étudier ce texte, vous allez commencer par le lire. »
- Après une lecture individuelle silencieuse puis une lecture par un élève à haute voix, Pf engage un débat : « de quoi parle ce texte ? », « que nous apprend-il ? ».
- Les stratégies de lecture mobilisées par les élèves sont celles qui sont travaillées en français : repérage des reprises nominales, des connecteurs temporels, des connecteurs logiques, des verbes et de leur temps...
- Les élèves ont beaucoup de difficultés à reformuler les propositions des autres élèves, une compréhension très hétérogène du texte
- Pf: « Pour mieux comprendre ce texte vous allez le relire en essayant d'imaginer chaque phrase dans votre tête et vous allez le dessiner »
- Les élèves réalisent leur première production qui est ramassée par Pf et transmise au professeur de sciences Ps

Le scénario et le questionnement

- **Phase 2 : en cours de sciences**

- Ps distribue le même texte aux élèves et leur demande de le lire
- E : « Mais on a déjà lu ce texte en français ! »
- Ps : « donc vous pouvez me dire de quel type est ce texte ? »
- E : « c'est un texte narratif »
- Ps : « De quoi parle-t-il ? »
- E : « d'Eratosthène un savant grec », « de caravanes », « de stades », « de la Terre », « du Soleil »...
- Ps : « De quel domaine parle-t-il ? »
- E : « de science »
- Ps : « Que nous apprend-il d'un point de vue scientifique ? »
- Les élèves évoquent maladroitement la mesure de la Terre, le Soleil, ses rayons, l'ombre mais rien n'est clairement dit sur les véritables hypothèses scientifiques mentionnées dans le texte
- P: « Vous allez donc relire ce texte mais cette fois comme un texte scientifique »
- Les élèves relisent le texte en cherchant à repérer les données scientifiques évoquées dans le texte. La stratégie de lecture change, ils cherchent des nombres, des unités, un certain lexique

Le scénario et le questionnement

- **Phase 2 : en cours de sciences**

- Un débat s'engage, les problématiques de la forme de la Terre et de la position des rayons du Soleil émergent.
- Une phase expérimentale est proposée aux élèves pour tester les différentes hypothèses mentionnées dans le texte : Terre plate/ronde, rayons du Soleil parallèles/non parallèles
- Ps redistribue les dessins réalisés en français : « vos dessins permettaient-ils de comprendre qu'on avait à faire à un texte scientifique ? » « Que manquait-il ? »
- Ps : « Vous allez donc maintenant réaliser des schémas explicatifs et pas seulement illustratifs »
- Les élèves réalisent leur deuxième production qui est ramassée par Ps et transmise au professeur de mathématiques Pm

Le scénario et le questionnement

- **Phase 3 : en cours de mathématiques**

- Pm distribue le même texte aux élèves et leur demande de le lire
- E : « Mais on a déjà lu ce texte en français et en sciences ! »
- Pm distribue les schémas explicatifs aux élèves
- Pm : « donc vous pouvez me dire de quel type est ce texte ? »
- E : « c'est un texte narratif et scientifique »
- Pm : « De quoi parle-t-il ? »
- Les réponses sont déjà plus structurées et font explicitement référence aux hypothèses scientifiques évoquées dans le texte et schématisées mais des incompréhensions persistent ([reprise des raisonnements faits en sciences](#))
- Pm : « De quel(s) domaine(s) parle-t-il ? »
- E : « de science », « d'astronomie », « d'histoire »
- Pm : « Vous oubliez un domaine, donc vous allez relire ce texte pour le trouver ! »
- E : « On est en maths donc ça doit parler de maths ! »
- Pm : « Donc relisez ce texte et dites-moi dans quel(s) passage(s) il parle de mathématiques ? » les élèves sont placés en groupes

Le scénario et le questionnement

- **Phase 3 : en cours de mathématiques**
 - Les élèves mobilisent la même stratégie de lecture qu'en sciences mais le lexique cherché n'est pas tout à fait le même, ils repèrent :
 - Mesurer, méthode, théorie, calculer, angles, perpendiculaires, rayons, parallèlement, calcula, calcul, distance, un cinquantième de cercle, $7^{\circ}12'$...
 - Pm : « Vous avez repéré du vocabulaire mathématique, c'est bien mais je voudrais que vous repériez les phrases qui parlent de l'activité mathématique d'Eratosthène »
 - Un débat s'engage mais les réponses sont peu convaincantes.
 - Pm : « Qu'est-ce que c'est : faire des mathématiques ? »
 - E : « Chercher des problèmes », « raisonner »
 - Pm : « Alors cherchez des raisonnements mathématiques dans ce texte ! »

Le scénario et le questionnement

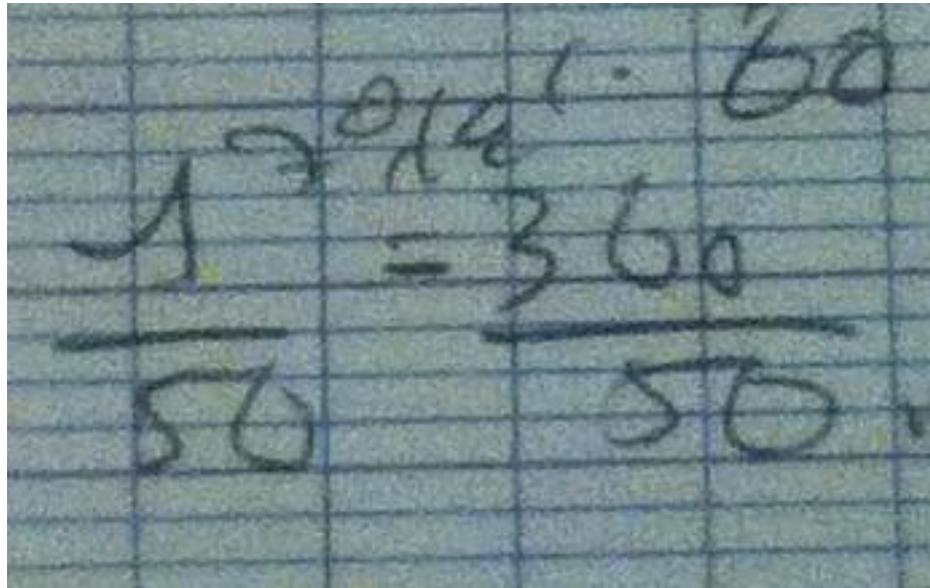
- **Phase 3 : en cours de mathématiques**
 - Les élèves repèrent et retrouvent :
 - Le calcul de la distance entre Syène et Alexandrie
 - Les élèves repèrent mais ne sont pas capables de retrouver le calcul « d'une simplicité enfantine » évoqué à la fin du texte.
 - Pm : « Nous allons donc chercher le raisonnement qui a permis à Eratosthène de faire ce calcul enfantin et de calculer la mesure de la Terre »

Le scénario et le questionnement

- **Phase 3 : en cours de mathématiques**
 - Les élèves travaillent en groupes et des questions leur sont distribuées en fonction de leur avancée :
 - Quelle(s) grandeur(s) cherche à calculer Eratosthène ?
 - Quelle(s) grandeur(s) a-t-il déjà réussi à mesurer ou calculer ?
 - Mise en commun des avancées des groupes :
 - Problème de conversion $7^{\circ}12' = 7,2^{\circ}$ et du lien avec $360^{\circ}/50$
 - Problème du calcul du rayon ou de la circonférence et de leur lien.

Le scénario et le questionnement

- **Phase 3 : en cours de mathématiques**



Handwritten mathematical work on grid paper. The work shows a division problem: $170 \div 50 = 3.60$. The numbers are written in pencil. There is a horizontal line under the 50 in the divisor and another horizontal line under the 50 in the dividend. The result 3.60 is written above the line. There are some faint markings and a small '1' above the 7 in 170.

Le scénario et le questionnement

- Phase 3 : en cours de mathématiques

Une minute d'arc \approx "une minute d'angle"

$$1' = \frac{1^\circ}{60}$$
$$12' = \frac{12^\circ}{60}$$

Il y a proportionnalité.

Donc si je veux calculer la circonférence de la Terre (Périmètre) j'utilise la proportionnalité entre l'angle au centre d'un cercle et l'arc de cercle correspondant.

$$\frac{1^\circ}{360^\circ} = \frac{12'}{360^\circ} = \frac{12}{360}$$
$$\frac{1^\circ}{360^\circ} = \frac{12}{P}$$

800 km

Périmètre ?

Le scénario et le questionnement

- **Phase 3 : en cours de mathématiques**
 - Mais la recherche est bloquée car le lien entre l'angle et la circonférence n'apparaît pas sur leurs schémas !

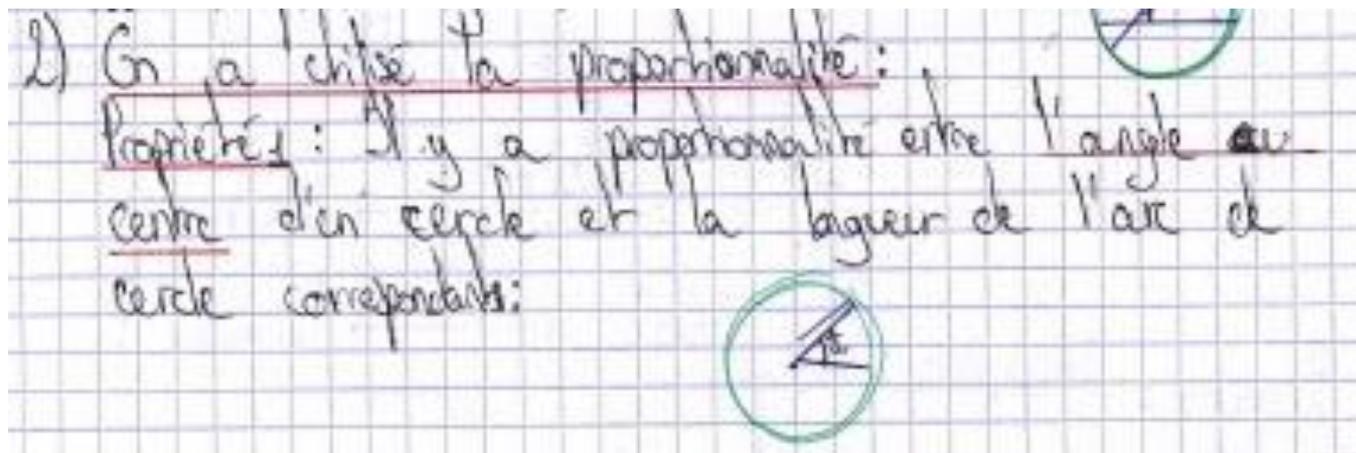
Le scénario et le questionnement

- **Phase 3 : en cours de mathématiques**

- Pm : « les dessins et schémas que vous avez faits en français et en sciences vous permettent-ils de retrouver le raisonnement d'Eratosthène ? »
- E : « non »
- Pm : « Pour retrouver ce raisonnement vous devez donc réaliser d'autres schémas, que doivent-ils contenir ? »
- E : « les données », « ce que cherche Eratosthène »
- Pm : « **Vous allez donc faire de nouveaux schémas représentant la situation évoquée dans ce texte mais le plus simplement possible et en indiquant toutes les informations données qui vous semblent nécessaires pour faire les raisonnements mathématiques repérés** »
- Chaque groupe cherche une « modélisation » :
 - Quelle(s) relation(s) connais-tu entre le parallélisme et les angles ?
 - Quelle(s) relation(s) connais-tu entre les angles et les longueurs ?

Le scénario et le questionnement

- **Phase 3 : en cours de mathématiques**
 - Une mise en commun permet d'aboutir à une modélisation facilitant le raisonnement.
 - Les élèves reprennent leur travail de groupe et trouvent le raisonnement (angles alternes-internes égaux et proportionnalité entre angle au centre et arc de cercle correspondant)
 - Lors du bilan de cette première partie une première relation entre longueur et angle est institutionnalisée



Le scénario et le questionnement

- **Phase 3 : en cours de mathématiques**
 - Pm lance la 2^{ème} partie de l'activité : « **Mais comment Eratosthène a pu calculer l'angle de 7°12' ?** »
 - Temps de recherche en groupe, l'idée d'extraire une figure clé émerge dans certains groupes
 - Aide : « Quelle(s) figure(s) clé peut-on extraire de notre modélisation pour nous aider dans notre recherche ? »
 - Aide : « Faites une nouvelle modélisation de la situation centrée sur le gnomon »
 - Aide : « Que pouvait mesurer Eratosthène le 21 juin à midi? »
 - E : « La hauteur du gnomon », « la longueur de l'ombre »
 - Pm : « Le texte nous donne-t-il ces données ? »
 - E : « Non »

Le scénario et le questionnement

- **Phase 3 : en cours de mathématiques**
 - Une recherche au CDI est faite en lien avec la documentaliste les élèves obtiennent des informations sur ce gnomon, il s'agissait de l'obélisque de la place d'Alexandrie, elle mesurait 50 coudées et l'ombre mesurée par Eratosthène 6 coudées $\frac{1}{3}$.
 - Au cours suivant Pm : « Est-il possible avec 2 longueurs de calculer un angle ? » (dans mon collège le cosinus n'est en général pas abordé en 4^{ème})
 - Cette question introduit le travail sur la trigonométrie : la recherche d'une relation entre les longueurs et les angles aigus d'un triangle rectangle est faite expérimentalement sur papier puis avec Geogebra, le lien avec les agrandissements et réductions est établi par les élèves puis l'idée de calculer des rapports émerge...
 - Une fois le calcul de l'angle élucidé, Pm demande aux élèves de rédiger une narration de recherche.
 - Les élèves réalisent leur 3^{ème} production qui est ramassée et évaluée conjointement par Pm et Pf.

Le scénario et le questionnement

- **Phase 4 : en cours de français et de mathématiques**
 - Pf et Pm demandent aux élèves de rédiger le discours qu'Eratosthène aurait pu tenir devant les savants de la bibliothèque d'Alexandrie pour les convaincre de la validité de son résultat.
 - Un débat autour de l'argumentation et de la dialectique persuader/convaincre s'engage
 - Collectivement un plan en trois parties est dégagé :
 1. (Persuader un auditoire) Eratosthène doit mettre en confiance les savants, construire le début de son discours sur les connaissances partagées par tous ;
 2. (Convaincre un auditoire) Il doit raisonner en s'appuyant sur des expériences pour convaincre les savants que les hypothèses scientifiques qu'il a retenues dans son modèle sont valides : sphéricité de la Terre et arrivée des rayons du Soleil parallèlement sur Terre ;
 3. (Prouver de manière universelle) Il doit faire un raisonnement mathématique pour démontrer que la mesure de l'angle est bien d'un cinquantième d'un cercle et que la circonférence de la terre fait bien 50 fois la distance entre Syène et Alexandrie.

Méthodologie pour la phase de production

- **Rédaction de la narration de recherche et du discours**
 1. Les élèves rédigent leur travail sur feuille
 2. Première correction (langue + structure)
 3. Les élèves corrigent de nouveau sur feuille
 4. Deuxième correction (organisation de la pensée, raisonnement)
 5. Les élèves saisissent leur travail dans un traitement de texte
 6. Série de corrections numériques (langue, organisation de la pensée, raisonnement - en rouge les fautes à corriger et en bleu les propositions d'amélioration ou les manques) jusqu'à obtention d'un travail satisfaisant.
- **Objectifs :**
 - Le travail numérique permet aux élèves d'améliorer progressivement leur travail avec un coût énergétique moindre que sur papier
 - Il permet de garder une trace des erreurs et corrections

Méthodologie pour la phase de production

- **Exemples de discours**

- Exemple ([version 1](#))
- Exemples (version intermédiaire) [1](#) - [2](#)
- Exemples (versions finales) [1](#) - [2](#) - [3](#)