UN CAMINO EN PROBABILIDADES

Este léxico recopila, de manera no exhaustiva, conceptos o nociones que serán encontrados en el marco de la enseñanza de las probabilidades en Tercer curso. Hemos optado por una clasificación que respeta un encadenamiento lógico de unas nociones con otras y que, por ello, no es alfabético.
Para cada entrada, dependiendo del caso, hemos presentado su etimología, su uso en el lenguaje común y en el contexto matemático.
Los asteriscos señalan en el texto las diferentes entradas.

ALEATORIO

Aleatorio viene del latín *alea*, dado, juego de dados, juego de azar, azar (Diccionario Gaffiot)

En el lenguaje común, se denomina *aleatorio*, a un fenómeno considerado que depende del azar.

En matemáticas, el cálculo de probabilidades* deriva de tentativas de gestión de fenómenos *aleatorios* y sólo podemos hablar de probabilidades* cuando nos encontramos en el marco de tales.

~~~ o ~~~

AZAR

La palabra *azar* proviene del árabe *az-zahr*, que significa *juego de dados*.

En el lenguaje común, las expresiones que emplean la palabra *azar* son múltiples y cuenta con diferentes acepciones, entre las cuales: incertitud, peligro, suerte, mal suerte, accidente, coincidencia, destino, ausencia de anticipación, ausencia de intención… Es un azar del cual padecemos los efectos.

Determinadas corrientes de pensamiento ponen en duda la existencia del azar.
«*El azar, son leyes que no conocemos*», Émile BOREL
«*El azar no existe todo tiene una causa y una razón de ser*», Ostad ELAHI
«*No hay azar, sólo hay encuentros*», Paul ÉLUARD
«*Por todas partes donde el azar parece jugar en la superficie, siempre se encuentra bajo el imperio de leyes internas ocultas, y sólo hay que descubrirlas*», Friedrich ENGELS
«*Algo no se llama contingente si no en razón de la insuficiencia de nuestro conocimiento*», Baruch SPINOZA
«*Azar es el nombre que Dios toma cuando no quiere que le reconozcamos*», Albert EINSTEIN

El azar se niega en el pensamiento determinista: cualquier fenómeno tiene una o varias casas provenientes de fenómenos anteriores; es la insuficiencia de nuestros conocimientos o de nuestra incapacidad para considerar múltiples parámetros que hace que un fenómeno sea calificado de aleatorio*.

En matemáticas, según Dominique LAHANIER-REUTER (Conceptions du Hasard et enseignement des probailités et statistiques, PUF, 1999), podemos diferenciar en la actualidad cinco concepciones de azar.
El *azar del sorteo* se convierte en estudio a mediados del siglo XVII en los trabajos de PASCAL y FERMAT; tiene por problema fundador el problema de los puntos (planteado por vez primera en 1494). Las situaciones modelizadas son las de los juegos de azar, es decir, fenómenos aleatorios* discretos para los cuales podemos hacer la descripción exhaustiva de todos los casos posibles*. El azar no está definido, es una de las reglas del juego, es movilizable a voluntad. El marco de estudio es la aritmética (enumeración, combinatoria, recurrencia finita).

Los siguientes tres conceptos (*azar benigno, azar lento y azar salvaje*) tienen por marco teórico el análisis y hacen referencia a los *teoremas límites*:

- las leyes de los *grandes números* que establecen la convergencia en ley del promedio de *n* variables independientes de igual esperanza matemática;
- el *teorema del límite central* que establece la convergencia en ley de esta media hacia una ley normal cuando las *n* variables tienen además la misma varianza.

El recurso a las herramientas de análisis permite establecer la relación entre las observaciones de un fenómeno aleatorio* a nivel microscópico y macroscópico.

El *azar* benigno, evocado en los trabajos de BERNOULLI (1713), DE MOIVRE (1733) y LAPLACE (1812), obedece a estos teoremas límites. Interviene dentro de experimentos aleatorios* reproducibles en las mismas condiciones; bajo un número restringido de pruebas, los resultados pueden parecer anárquicos pero si el número de pruebas es suficientemente grande, surgen regularidades. Permite un posicionamiento determinista del fenómeno aleatorio* a nivel macroscópico. Va a ser una ayuda, una herramienta en el campo científico. A veces hay un interés por interpretar ciertos fenómenos en las condiciones iniciales muy
~~~

complejas como fenómenos aleatorios*, de manera que se pueda utilizar la teoría de las probabilidades para estudiarlos.

El *azar lento,* bautizado así por MANDELBROT (comienzos del siglo XX) concierne los fenómenos aleatorios* que obedecen a los teoremas limitados pero de manera tan lenta que aportan poca información a nivel macroscópico sobre el conocimiento global del fenómeno estudiado.

El *azar* salvaje, primeramente estudiado por LÉVY (1937) y LORENZ (1960), abarca los fenómenos que no obedecen a los teoremas límites, aquellos cuya esperanza es infinita (proceso de Cauchy) o aquellos que son muy sensibles a las condiciones iniciales como los fenómenos bursátiles, las turbulencias, los fenómenos meteorológicos, aquellos que desembocan en la teoría de caos... Sus fluctuaciones son aleatorias* sin ser benignas. Lo aleatorio* a nivel microscópico perdura a nivel macroscópico.

En estas tres concepciones, el azar ya no se percibe como un principio exterior, una regla del juego, sino como una característica de los fenómenos observables que el matemático trata de modelizar.

El *azar formal,* estudiado desde los años 60, tiene por marco teórico la teoría de la información. El azar se convierte en un objeto de investigación. El proyecto consiste en estudiar la estructura interna de las series aleatorias* (contingentes) y de medir la cantidad de azar que contienen. Definimos la complejidad de una serie como la longitud mínima en número de bits del programa cuya ejecución producirá esta serie y decimos que una serie es aleatoria* si su complejidad es "aproximadamente igual" a su longitud. Este es el campo de las paradojas; tras el teorema de Gödell, es imposible exhibir una serie aleatoria*.

Consideramos actualmente que el ser humano es incapaz de producir por sí mismo el azar. La producción de azar pasa por la utilización de un generador de azar. Éste puede ser un objeto habitual (moneda, dado, urna…) utilizado respetando un protocolo experimental* adaptado. Esto puede ser también una funcionalidad de un instrumento TIC (RANDOM en la calculadora o ALEA en una hoja de cálculo); en este caso, los números suministrados son pseudoaleatorios: han sido producidos por algoritmos de forma periódica con periodos extremadamente largos e imperceptibles a nuestra escala.

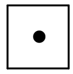
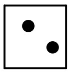
A menudo, en los enunciados de los ejercicios de matemáticas, la expresión consagrada *lanzar un objeto al azar,* tiene como interpretación *cada objeto tiene la misma probabilidad* de ser elegido*. De este modo, la palabra *azar* se asocia a la equiprobabilidad, lo que puede suponer un obstáculo didáctico: se observa a menudo que los alumnos que, redactando una lista de eventualidades, atribuyendo a cada una la misma probabilidad*.

~~~ o ~~~

EXPERIENTO ALEATORIO

Un experimento aleatorio es un proceso donde el azar* interviene para producir un resultado entre otros resultados posibles.
En la descripción de un experimento aleatorio, podemos distinguir tres niveles.

- El primer nivel es el del *experimento real.* Por ejemplo, lanzamos al aire una moneda de 1 € y observamos su comportamiento: la moneda puede caer del lado de sello, o sobre el lado de cara, o sobre el canto, o rodar y meterse debajo de un mueble (en eses caso el juego se detiene), etc.; así pues, podemos considerar numerosos resultados del experimento, algunos rebuscados pero no imposibles. Otro ejemplo consiste en lanzar al aire un dado cúbico rojo y observar su comportamiento: el dado puede caer en una de sus seis caras, o golpearse con un obstáculo y permanecer en equilibrio sobre una de sus aristas (dado de lado), o romperse (cf. EKELAND), etc.; de nuevo en este caso podemos considerar numerosos resultados posibles.
- El segundo nivel, el del *experimento pseudo-concreto,* es una primera etapa en la simplificación y la modelización de la realidad. De los objetos que generan azar*, solamente mantenemos determinadas propiedades. De la multitud de resultados posibles, solamente guardamos los que son considerados como pertinentes desde un punto de vista probabilista y que van a ser objeto de estudio, los interpretamos en términos de salida*.
  Por ejemplo, lanzamos al aire una moneda (da igual su valor y su material) y observamos lo que ocurre. Entre todos los resultados posibles citados, solamente conservamos los casos en los que muestra Cara o Sello, situaciones que interpretamos en términos de salidas* codificadas "Cara" o "Sello". De la misma manera, podemos lanzar un dado cúbico (da igual su material y su color) y
~~~

observar el número de puntos de la cara superior. El resultado  se interpreta por la salida* 1, el resultado  se interpreta por la salida* 2, etc.

- El tercer nivel es el del *modelo* matemático.* Los objetos, generadores de azar*, son idealizados: la moneda está equilibrada (¿qué quiere decir esto? ¿existe una moneda así?), el dado es homogéneo y regular (¿existe un dado así?). Introducimos un conjunto de *eventualidades,* estando cada una afectada de un número positivo comprendido entre 0 y 1 (estos números deben cumplir determinadas propiedades que serán precisadas más adelante). Estas eventualidades representan, en general, en el modelo abstracto las salidas* consideradas en el modelo psudoconcreto. El conjunto de eventualidades se denomina *universo* o *conjunto fundamental* o incluso *referencial,* se anota Ω o E.
  Por ejemplo, podemos modelizar el lanzamiento de una moneda equilibrada, a través de la elección de eventualidades P y F, cada una afectada de $\frac{1}{2}$. Para modelizar el lanzamiento de un dado cúbico regular, podemos elegir como conjunto de eventualidades $\{1,2,3,4,5,6\}$ y afectar a cada una el número $\frac{1}{6}$.

Hablamos de un experimento aleatorio con varias *pruebas* cuando la realización del experimento comprende varias etapas. Por ejemplo, lanzar a Cara o Cruz, después lanzar una ficha en una urna es un experimento aleatorio con dos pruebas.

Al menos por el pensamiento, el experimento aleatorio es reproducible en las mismas condiciones. Es susceptible de ser descrita por medio de un protocolo experimental* del que es indisociable.

~~~ ○ ~~~

PROTOCOLO EXPERIMENTAL

El *protocolo experimental* es el conjunto de instrucciones a seguir para poder afirmar que hemos realizado el experimento aleatorio *. Éste debe:

- describir claramente y con precisión las condiciones de realización del experimento para caracterizarlo; es lo que permite "repetir el experimento en las mismas condiciones".
- presentar la lista de salidas* (de acuerdo al programa de Tercer curso, consideramos que esta lista comporta una cantidad finita de elementos).

El respeto del protocolo garantiza que una salida* de un experimento no puede ser ni prevista, ni calculada, ni influenciada: a nuestra escala, depende del azar*. Es la reproducibilidad del protocolo lo que permite reproducir el experimento; es la no predictibilidad del resultado lo que confiere al experimento su carácter aleatorio*.

~~~ ○ ~~~

SALIDA

Hablamos de *salida* en le representación pseudoconcreta de un experimento aleatorio*. Por ejemplo, para el lanzamiento de un dado, las salidas retenidas son 1, 2, 3, 4, 5 y 6 (excluyendo el dado de lado).
Cuando hemos repetido un experimento aleatorio* n veces, los n resultados interpretados en términos de salidas constituyen una muestra* de tamaño n.

~~~ ○ ~~~

MUESTRA

En el lenguaje común, la palabra *muestra* puede hacer fácilmente referencia a una escala de medida, a una pequeña cantidad de una mercancía que mostramos para dar una idea del conjunto o incluso a una fracción de una población destinada a ser estudiada por sondeo.

En matemáticas, una muestra de tamaño n es un n-pleto constituido de salidas* de n repeticiones independientes del mismo experimento aleatorio* (en completo rigor, es un n-pleto de variables aleatorias).
Los n valores constituyen una serie estadística.

~~~ ○ ~~~

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Para una muestra*, la *distribución de frecuencias relativas* es dadab por las salidas* y de sus frecuencias relativas respectivas.

Distribución de frecuencias relativas en un conjunto finito:

Salidas	s_1	s_2	•••	s_r	
Frecuencias relativas	f_1	f_2	•••	f_r	1

Para un mismo experimento aleatorio*, dos muestras* del mismo tamaño no tienen necesariamente la misma distribución de frecuencias relativas: es la *fluctuación de muestreo*.

~~~ ○ ~~~

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

El método probabilista requiere una modelización del experimento aleatorio* que desemboca en la definición de un modelo*. El dato de las eventualidades y de sus probabilidades* respectivas constituye la *distribución de probabilidad* asociada a un modelo*.

Distribución de probabilidad:

Eventualidades	e_1	e_2	•••	e_r	
Probabilidades	p_1	p_2	•••	p_r	1

~~~ ○ ~~~

MODELO PROBABILISTA

A un experimento aleatorio* se le pueden asociar varios modelos, más o menos pertinentes; un modelo pertinente es un modelo "bastante" simple para permitir cálculos y su explotación y "bastante" justo para ser coherente con la realidad, es decir, que las distribuciones de frecuencias* relativas obtenidas para muestras* de tamaños *importantes* son en general cercanas a la distribución de probabilidad* de este modelo.

Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda equilibrada, podríamos adoptar la distribución de probabilidad*:

Eventualidad	P	F	
Probabilidad	0,5001	0,4999	1

sin duda es más *justa* en el caso de una moneda más hueca en lado del sello, pero poco operativo para los cálculos. Además, este modelo daría resultados escasamente diferentes del que es convencionalmente adoptado:

Eventualidad	P	F	
Probabilidad	0,5	0,5	1

Puede ocurrir que para un experimento aleatorio* complejo, la modelización no baste y que la elección de un modelo plantee un problema. Podemos entonces enfrentar un modelo que hemos creído pertinente con la realidad produciendo una muestra* de *gran tamaño* y estableciendo la distribución de frecuencias* relativas. Una *gran* diferencia entre la distribución de frecuencias* relativas y la distribución de probabilidad* nos lleva a dudar de la validez del modelo candidato.

~~~ ○ ~~~

SIMULACIÓN

A falta de realizar concretamente un experimento aleatorio*, podemos *simularlo*, es decir remplazarlo por otro experimento aleatorio* a lo que está adscrito un modelo* de la misma ley de probabilidad*. Los resultados del experimento realizado son entonces interpretados en términos de salidas* del experimento simulado con la ayuda de una correspondencia, de una codificación.

Por ejemplo, para simular el experimento "sexo en el momento del nacimiento" en una población de animales que comprende tantas hembras como machos, podemos lanzar una moneda y codificar H para Hembra y M para Macho.

Para simular el sorteo en una urna que incluye 1 ficha amarilla y 2 fichas verdes, podemos lanzar un dado cúbico y codificar 1 y 2 por Amarillo, 3 4, 5 y 6 por Verde.
~~~

También podemos utilizar un dado cúbico para simular el "lanzamiento de un dado tetraédrico equilibrado" codificando: 1 por 1, 2 por 2, 3 por 3, 4 por 4, y considerando que 5 y 6 no son interpretados en términos de salidas* del experimento "lanzar un dado tetraédrico".
Vemos así que un dado puede ser utilizado, según las necesidades, por *jugar* al dado, o por *simular* otros experimentos aleatorios*.

A partir del generador de números pseudoaleatorios de una TIC (RANDOM o NbrAleat o Ran# de una calculadora, ALEA() de una hoja de cálculo) son posibles muchas simulaciones.
Para simular un experimento aleatorio*, es necesario haberle asociado anteriormente un modelo*, supuestamente pertinente. Para algunos experimentos aleatorios (por ejemplo, lanzar una chincheta), no es posible proponer un modelo* *a priori*.

~~~ ○ ~~~

EVENTO

En matemáticas, *evento* se utiliza en varios contextos.

- En el marco de un experimento aleatorio* real, un evento es una aserción que, viendo el resultado del experimento aleatorio*, será verdadero o falso. Por ejemplo, para el lanzamiento de un dado, podemos interesarnos en el evento "la cara superior del dado muestra un número par".
- En la representación pseudo-concreta del experimento, un evento es un conjunto de salidas* posibles. Por ejemplo, para el lanzamiento de un dado, el evento "obtener un número par" es $\{2 , 4 , 6\}$.
  Una vez realizado el experimento, la salida* observada, si pertenece a este conjunto, realiza este evento.
- En el modelo probabilista*, un evento es un subconjunto E de eventualidades.
  Por ejemplo, para el lanzamiento de un dado equilibrado, podemos elegir $E = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ y $\{2 , 4 , 6\}$ es un evento.

Vocabulario, caso de un espacio probabilizado finito

Lenguaje conjustista	Lenguaje probabilista	Ejemplo: lanzamiento de un dado
Conjunto $E = \{e_1 , e_2 , \dots , e_r\}$	Universo o referente $E = \{e_1 , e_2 , \dots , e_r\}$	$E = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$
Elemento de E: e_i	Eventualidad: e_i	3
A es una parte de E $A \subset E$	A es un evento	$\{1 ; 2 ; 3\}$ es un evento definido en extensión. "Obtener al menos 3" es el mismo evento definido en comprensión.
Parte plena E	Evento cierto	« Obtener al menos 10»
Singleton $\{e_i\}$	Evento elemental	$\{6\}$ o incluso «Obtener 6 » es un evento elemental.
Conjunto vacío: $\varnothing$	Evento imposible	« Obtener más de 7 »
Reunión de A y B: $A \cup B$	Evento A o B	
Intersección de A y B: $A \cap B$	Evento A y B	
Conjuntos desjuntados	Eventos excluyentes	« Obtener un número impar » y « Obtener un múltiplo de 6 »
Conjuntos complementarios en E	Eventos contrarios	« Obtener un número par » y « Obtener un número impar »
Partición de E	Sistema completo de eventos	

~~~ ○ ~~~

PROBABILIDAD

Una *ley de probabilidad P* sobre el universo finito $E = \{e_1 , e_2 , \dots , e_r\}$ es una aplicación definida sobre el conjunto de los eventos* de E, con valores en $[0 ; 1]$. La imagen por P de un evento* A es la probabilidad de A, anotada $P(A)$.
La suma de las probabilidades de todos los eventos* elementales de E es igual a1.
La probabilidad de un evento* es la suma de las probabilidades de los eventos* elementales que lo conforman.
De hecho, en el caso en el que E sea finito, P está determinado en cuanto conocemos las eventualidades e_i y las probabilidades correspondientes $P(\{e_i\})$ - a menudo anotadas p_i - es decir en cuanto conocemos la distribución de probabilidad*.

En consecuencia:

- $P(\mathrm{E}) = 1$
- $P(A) = \sum_{e_i \in A} p_i$
- Para todo evento A, de evento contrario $\overline{A}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Si A y B son excluyentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Abordar las probabilidades por la noción de ley de probabilidad permite relativizar los valores de probabilidades elementales unos respecto a otros, hay poco sentido en definir un aislamiento.

Cuando los eventos* elementales tienen la misma probabilidad, igual a $\frac{1}{\mathrm{cardinalidad(E)}}$, hablamos de *equiprobabilidad*. La probabilidad de evento* A es entonces $\frac{\mathrm{cardinalidad}(A)}{\mathrm{cardinalidad(E)}}$. El cálculo de probabilidad utiliza en ese único caso el conteo.

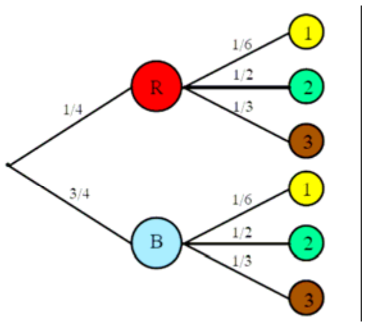
~~~ o ~~~

ÁRBOL

Un *árbol de elección* es un esquema adaptado donde varias elecciones deben ser operadas y que se construyen por etapas.
Para una etapa, cada opción se materializa al final de un segmento denominado *rama*: obtenemos un *nudo* del árbol. A partir de cada nudo de una etapa, se materializa por nuevas ramas las opciones posibles de la etapa siguiente teniendo en cuenta si fuera necesario las elecciones efectuadas en las etapas precedentes. También denominamos *nudo* al origen común de las ramas de la primera etapa.
Partiendo de una rama de la primera etapa y siguiendo una rama de cada una de las etapas siguientes para llegar a un nudo terminal, se recorre un *camino*. En el extremo de cada rama terminal del árbol, podemos establecer la lista de opciones del camino correspondiente: obtenemos por este procedimiento el balance exhaustivo de los casos posibles*, que puede dar lugar al conteo, es entonces cuando hablamos de *árbol de conteo*.

Elegir un árbol como soporte de razonamiento es equivalente a modelizar una situación dada por medio de una sucesión de etapas que no están necesariamente ligadas a una temporalidad.

Un *árbol ponderado* es una representación adaptada a los experimentos aleatorios* con varias pruebas.
El programa de Tercer curso limita el estudio al caso de un experimento con dos pruebas que conduce a un máximo de seis salidas; no aborda el caso de los lanzamientos sucesivos en una urna (con o sin reposición).
En este contexto, un árbol ponderado se construye en dos etapas.
Para la primera etapa, disponemos de un sistema completo de eventos* del universo adjunto al primer experimento, los eventos se materializan en la extremidad de los segmentos del mismo origen, denominados *ramas*: obtenemos *nudos* del árbol. Cada rama está *ponderada* por la probabilidad* del evento* representado.



Para la segunda etapa, también disponemos de un sistema completo de eventos del universo adjunto al segundo experimento. A partir de cada nudo precedente, materializamos por nuevas ramas ponderadas los eventos* del segundo experimento.
Destaquemos que la suma de las probabilidades* en las ramas originarias de un mismo nudo es igual a 1.
Una rama de la primera etapa seguida de una rama de la segunda constituye un *camino*. En la extremidad de un camino, obtenemos el evento de conjunción de los eventos* del camino cuya probabilidad* es el producto de las probabilidades* ponderando las ramas.

~~~ o ~~~

POSIBLE

La palabra *posible* viene del latín *possibilis*.

En el lenguaje común, se utiliza la palabra *posible* para expresar lo que puede existir, lo que se hace, lo que constituye un límite, lo que puede realizarse o ser cierto, lo que es aceptable…
En filosofía, es posible lo que no es imposible.

En lenguaje probabilista, un evento* se denomina imposible cuando está vacío (no puede realizarse). No se habla de evento posible.
Se utilizaba esta palabra en dos expresiones (antiguas):

- "el universo de posibles", donde la palabra designa lo que hoy denominamos eventualidades (cf. experimento aleatorio*);
- la formula $\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$, al que se prefiere denominar actualmente $\frac{\text{cardinalidad(A)}}{\text{cardinalidad}(\Omega)}$ o, que se puede anotar $\frac{\#A}{\#E}$

∼∼∼ ○ ∼∼∼

PLAUSIBLE

La palabra *plausible* viene del latín *plausibilis*, digno de ser aplaudido.

En el lenguaje común, se dice plausible a una tesis, a una historia, a una interpretación, a una explicación, a una excusa que parece poder ser admitidas o consideradas como ciertas. Esta palabra redirige a la noción de cierto o de verosímil.

No hay definición matemática de esta palabra en una teoría.

∼∼∼ ○ ∼∼∼

PROBABLE

La palabra *probable* viene del latín *probabilis*, de *probare*, probar.

En el lenguaje común, es *probable* lo que no es contrario a la razón, lo que, sin ser cierto, puede ser considerado verdadero más que falso, lo que es razonable conjeturar…

No hay definición matemática de esta palabra en una teoría.

∼∼∼ ○ ∼∼∼

SUERTE

En el lenguaje común, la palabra *suerte* evoca una manera favorable o desfavorable según la cual un evento se produce, la posibilidad de producirse por azar, un azar satisfactorio o una suerte favorable…
Expresiones habituales como relacionadas con el lanzamiento de monedas o dados en las que se incluye el factor suerte dirigen a la noción de probabilidad*. Según el caso, esta palabra designa las salidas* o casos posibles*, una proporción, una magnitud, una comparación entre dos probabilidades.... Debido a su polisemia, es un término a evitar en clase de matemáticas, al emplearlo se corre el riesgo de enviar al alumno a la noción de suerte favorable o desfavorable, donde se excluye cualquier racionalidad.