

Changer de registres et raisonner dans la résolution de problèmes

OU

Pourquoi et comment représenter
ce qui n'est pas représenté ?



Richard CABASSUT
richard.cabassut@gmail.com

Institut de **recherche**
sur l'**enseignement** des **mathématiques**

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG



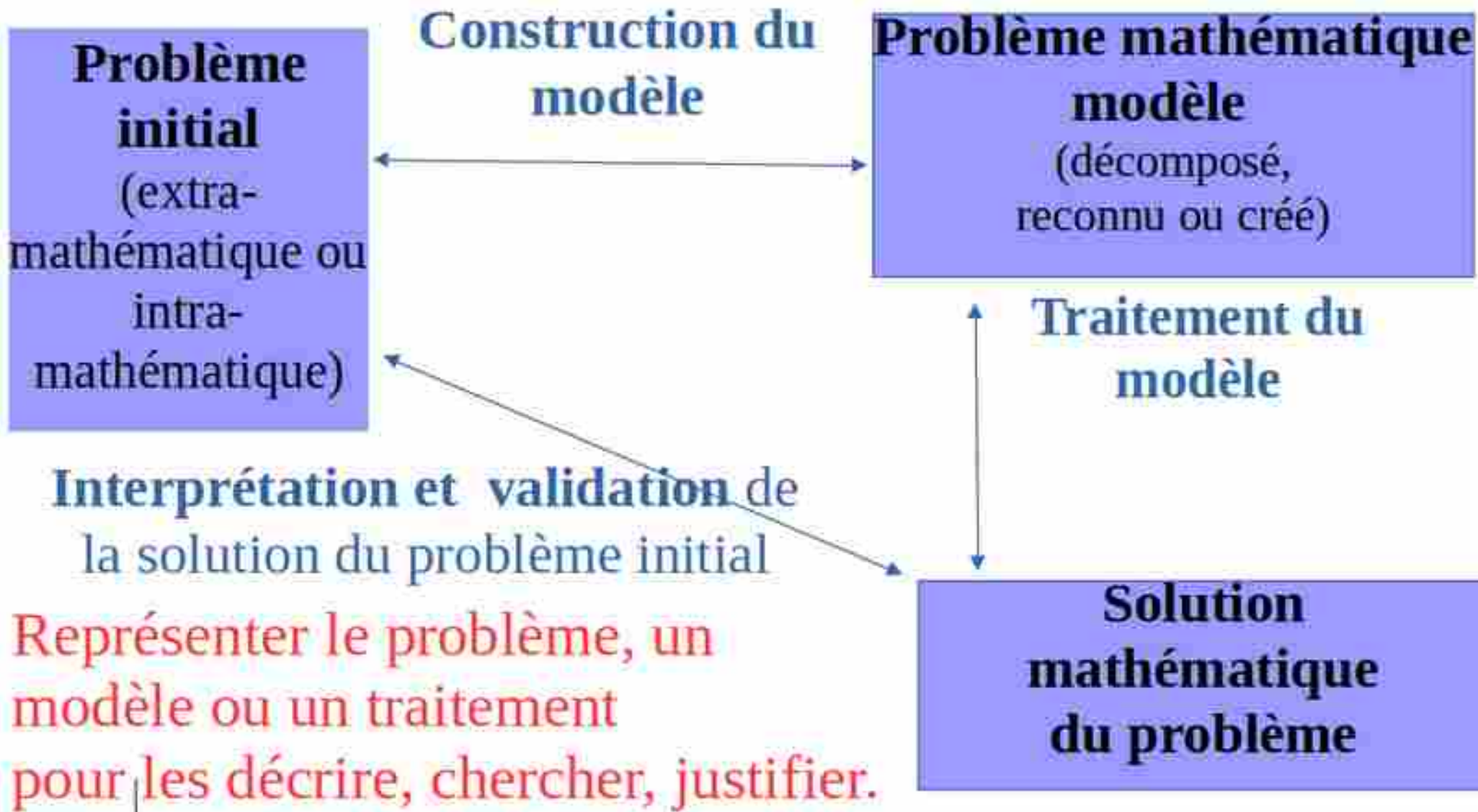
Objectifs

- Réfléchir sur l'intérêt didactique des différents registres et des conversions entre registres.
- Réfléchir sur les liens entre les différents types de raisonnement et les registres dans lesquels ils s'expriment ou ils se cachent.
- Questionner le registre des représentations en barres actuellement à la mode.

Plan

A travers différents exemples de résolution de problèmes :

- Différences de registres et conversion entre registres
- Traitements intra-registre
- Contrats didactiques et registres de représentation
- Fonctions des registres de représentation
- Les représentations en phase heuristique et en phase de validation
- Conclusion



Fonction	Description
vérification (preuve ou plausibilité)	valider la nécessité ou la plausibilité de la solution du problème
explication	fournir un aperçu de pourquoi la solution est correcte
systematisation (incorporation)	entraîner à des procédures heuristiques ou des procédures de solution.
découverte	découverte, invention, préparation, production de nouveaux résultats
communication	transmission des connaissances (par exemple en évaluation)

(De Villiers 1995 , Hanna 2000)

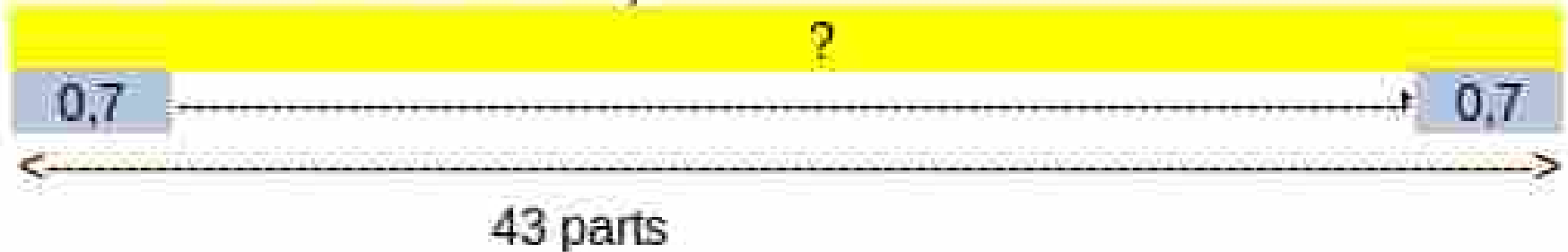
Résoudre un problème élémentaire dans
différents registres

Différences de registres et conversion de registres (Levain & al. 2017)

- Groupes 1 et 2 : 1) Un professeur commande 43 mètres de ficelle. 1 mètre de ficelle coûte 0,7 euro. Combien ce professeur doit-il payer ?
- Groupes 3 et 4 : 2) Un restaurateur achète 0,7 kilogramme de coquilles saint jacques. 1 kilogramme de coquilles saint jacques coûte 43 euros. Combien ce restaurateur doit-il payer ?
- Consigne : En groupe, produire une résolution du problème proposé d'abord en utilisant le registre des représentations en barres, ensuite en utilisant le registre que vous souhaitez. Comparer les deux résolutions et discuter des intérêts des deux résolutions. Quels raisonnements ont été travaillés ?

Un professeur commande 43 mètres de ficelle. 1 mètre de ficelle coûte 0,7 euro. Combien ce professeur doit-il payer ?

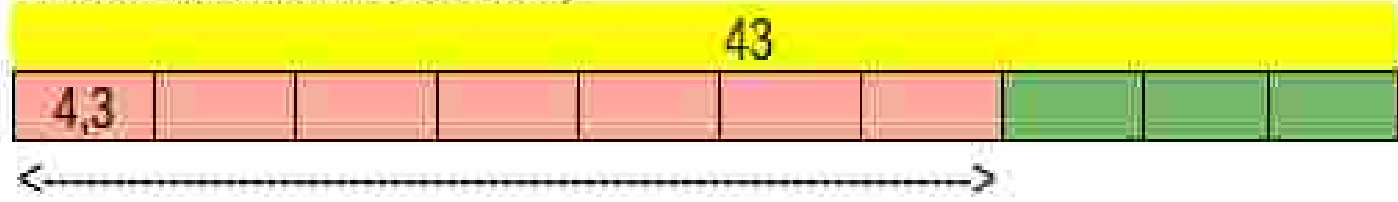
Modélisation en barres de 1)



$43 \times 0,7 = ?$

Un restaurateur achète 0,7 kilogramme de coquilles saint jacques. 1 kilogramme de coquilles saint jacques coûte 43 euros. Combien ce restaurateur doit-il payer ?

Modélisation en barres de 2)



prix d'une part de 0,1 kg = 4,3€
 0,7kg = 7 parts de 0,1kg
 $4,3 \times 7 = ?$

Un professeur commande 43 mètres de ficelle. 1 mètre de ficelle coûte 0,7 euro. Combien ce professeur doit-il payer ?

	mètres	euros
1 ^{er} cas	43	?
2 nd cas	1	0,7

Un restaurateur achète 0,7 kilogramme de coquilles saint jacques. 1 kilogramme de coquilles saint jacques coûte 43 euros. Combien ce restaurateur doit-il payer ?

	1 ^{er} cas	2 nd cas
euros	43	?
kilos	1	0,7

Les traitements intra-registre

(Sander 2018)

- Groupes 1 et 2 : 3) Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ?
- Groupes 3 et 4 : 4) Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?
- Consigne : En groupe, produire une résolution du problème proposé en utilisant les registres que vous souhaitez. Discuter des intérêts des registres utilisés. Quels raisonnements ont été travaillés ?

Les traitements inter et intra-registres

- Tous les groupes : 5) Une vache pèse 150 kg de plus qu'un chien. Une chèvre pèse 130 kg de moins qu'une vache. Ensemble les animaux pèsent 410 kg. Combien pèse le chien ?

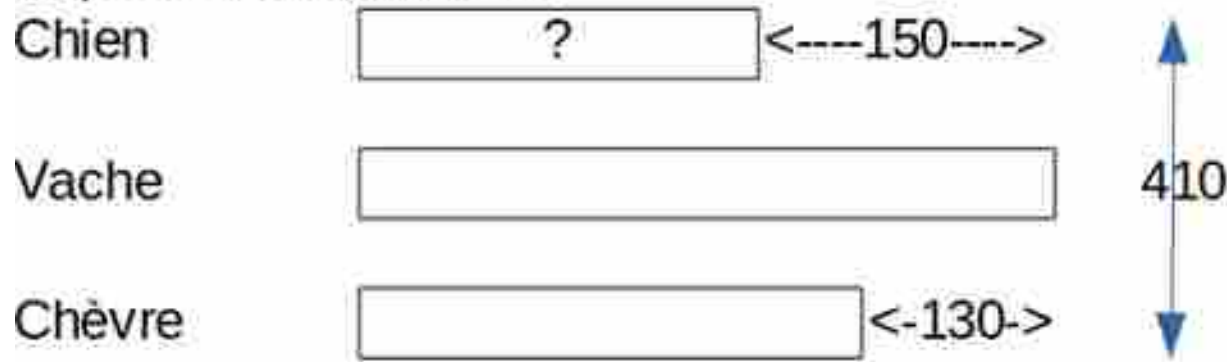
(Ng & Lee 2009)

- Consigne :

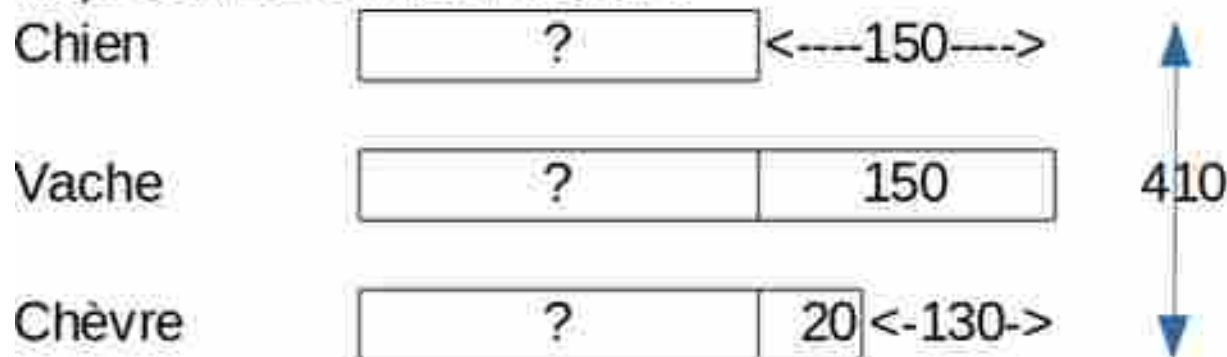
En groupe, produire une résolution du problème proposé d'abord en utilisant le registre des représentations en barres, ensuite en utilisant le registre que vous souhaitez. Comparer les deux résolutions et discuter des intérêts des deux résolutions. Quels raisonnements ont été travaillés ? ¹¹

Résoudre un problème à plusieurs étapes dans différents registres

Représentation initiale



Représentation intermédiaire



Une trace écrite possible :

3 poids du chien +
 $150 + 20 = 410$

3 poids du chien =
 $410 - 170 = 240$

poids du chien =
 $240 : 3 = 80$.

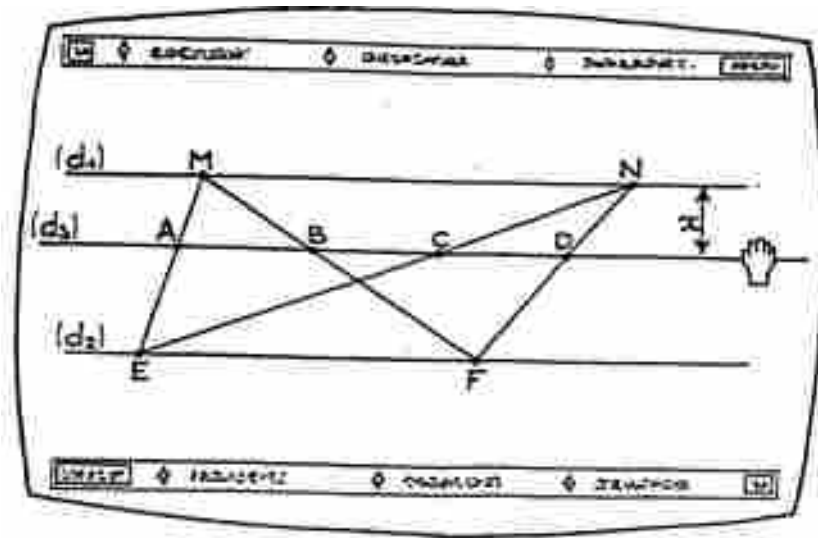
Le poids du chien
est 80 kg.

Contrats didactiques et registres de représentation

Résoudre le problème suivant et proposer la production d'une solution.

Accompagner cette production d'un commentaire précisant différents registres de représentation que vous avez utilisés dans vos phases de recherche mais non mentionnés dans votre production.

6) Sur son écran d'ordinateur, Gérard a construit la figure ci-dessous . Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles et distantes de 1 décimètre. Il fait glisser la droite (d_3) entre (d_1) et (d_2) parallèlement à celles-ci. Il constate que les longueurs AB et CD affichées à l'écran sont égales , quelle que soit la position de (d_3) , mais il s'agit de valeurs approchées . Démontrer que $AB=CD$ quelle que soit la position de (d_3) .



(Mathématiques sans frontières 2000)

Contrats didactiques et registres de représentation

M, A et E sont alignés } dans la même droite
 H, B et F sont alignés } dans la même droite

Dans le triangle MEF, les droites (d_3) et (d_2) sont parallèles, c'est pourquoi le triangle MEF est en situation de Thalès.

Donc $\frac{MH}{HE} = \frac{MB}{BF} = \frac{AB}{EF}$

M, C et E sont alignés } dans la même droite
 H, D et F sont alignés } dans la même droite

Dans le triangle MEF, les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, c'est pourquoi le triangle MEF est en situation de Thalès.

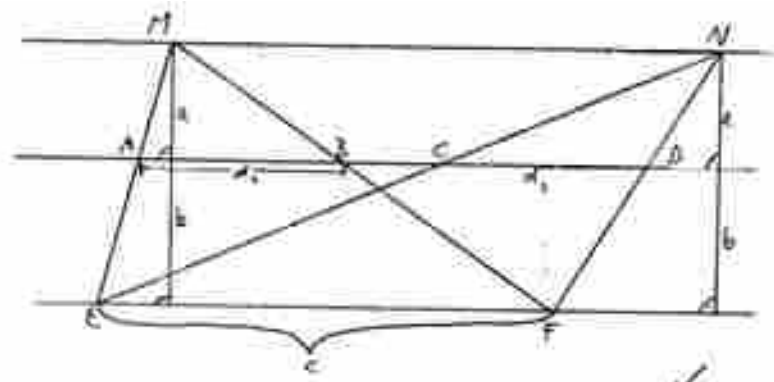
Donc $\frac{MC}{CE} = \frac{MD}{DF} = \frac{CD}{EF}$

M, C et E sont alignés } dans la même droite
 H, D et F sont alignés } dans la même droite

Dans le triangle MEF, les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, c'est pourquoi le triangle MEF est en situation de Thalès.

Donc $\frac{MH}{HE} = \frac{MD}{DF} = \frac{CD}{EF}$

C'est pourquoi, quelle que soit la position de (d_3) , $MF = CD$.



Nada des parallèles gilt

$\left[\frac{d_1}{c} = \frac{a}{a+b} \right]$ und $\left[\frac{d_2}{c} = \frac{a}{a+b} \right]$ 1,2

$d_1 = \frac{ac}{a+b}$ 3,4

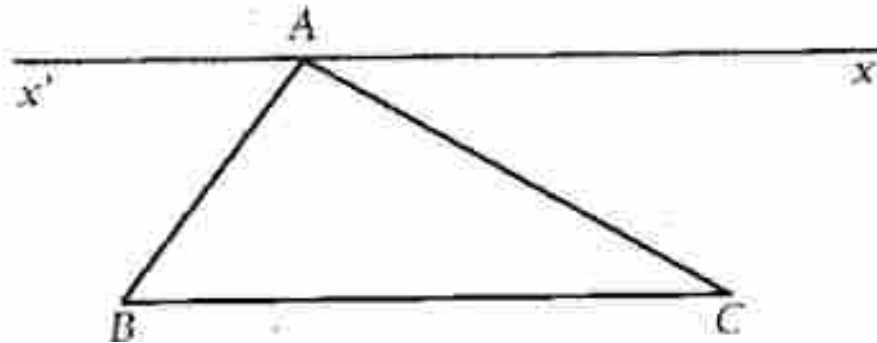
$d_2 = \frac{ac}{a+b}$ 3,4

$d_1 = d_2$ ✓

Fonctions des représentations

7) Démontrer que la somme des angles d'un triangle est un angle plat.

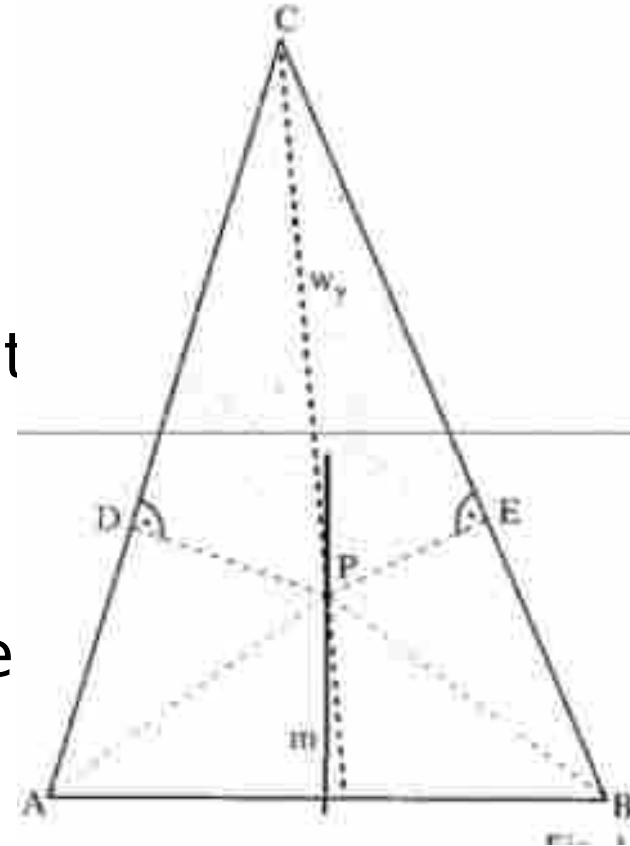
Préciser les représentations que vous utilisez et leurs fonctions.



Dans un triangle ABC quelconque, la bissectrice de l'angle γ [codage de l'angle de sommet C] et la médiatrice m du segment [AB] se coupent en P. Les points P et E sont les pieds des hauteurs abaissées de P sur les côtés respectifs [AC] et [BC]. CPD et PEC ont leurs angles respectivement égaux et un côté commun [PC] donc sont isométriques. Donc $DP=PE$ et $CD=CE$. Comme P est sur la médiatrice m de [AB], $AP = PB$. D'après le théorème de Pythagore dans DPA et DEB :

$$DA^2 = AP^2 - DP^2 = PB^2 - PE^2 = EB^2 \text{ donc } DA = EB.$$

Donc $CA = CD + DA = CE + EB = CB$.
Le triangle CAB est isocèle en A.



Quelles représentations dans la phase heuristique et dans la phase de validation ?

8) Soit deux points A et B du même côté par rapport à une droite d.

On considère le chemin suivant :

- de A vers un point M de d,
- de M vers B.

Comment choisir M pour avoir le plus court chemin ?

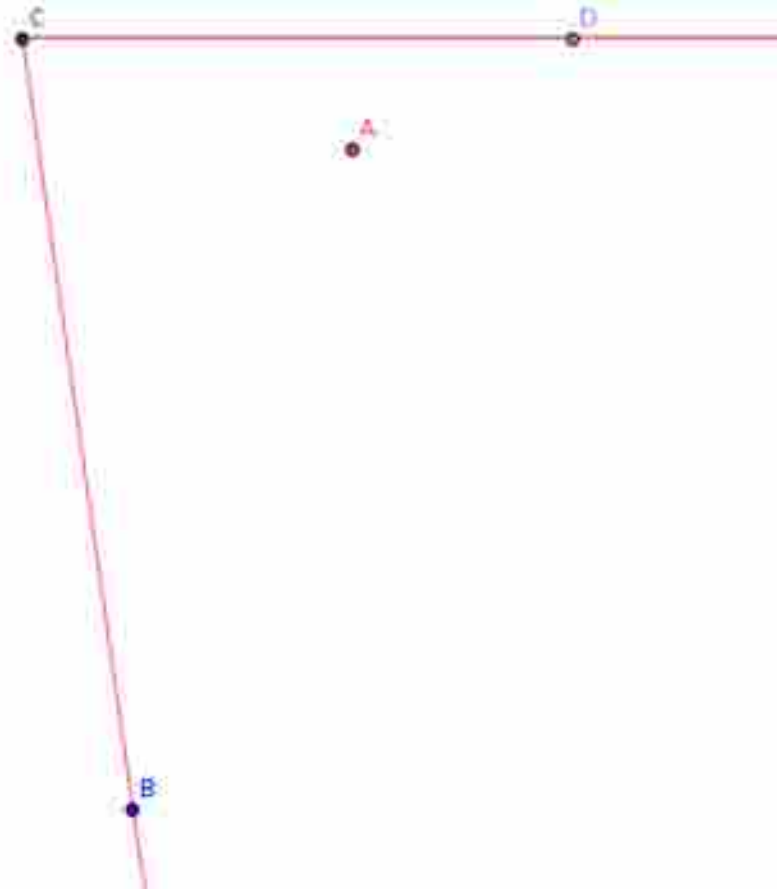
9) Soit dans un secteur angulaire BCD un point A . On considère le chemin suivant :

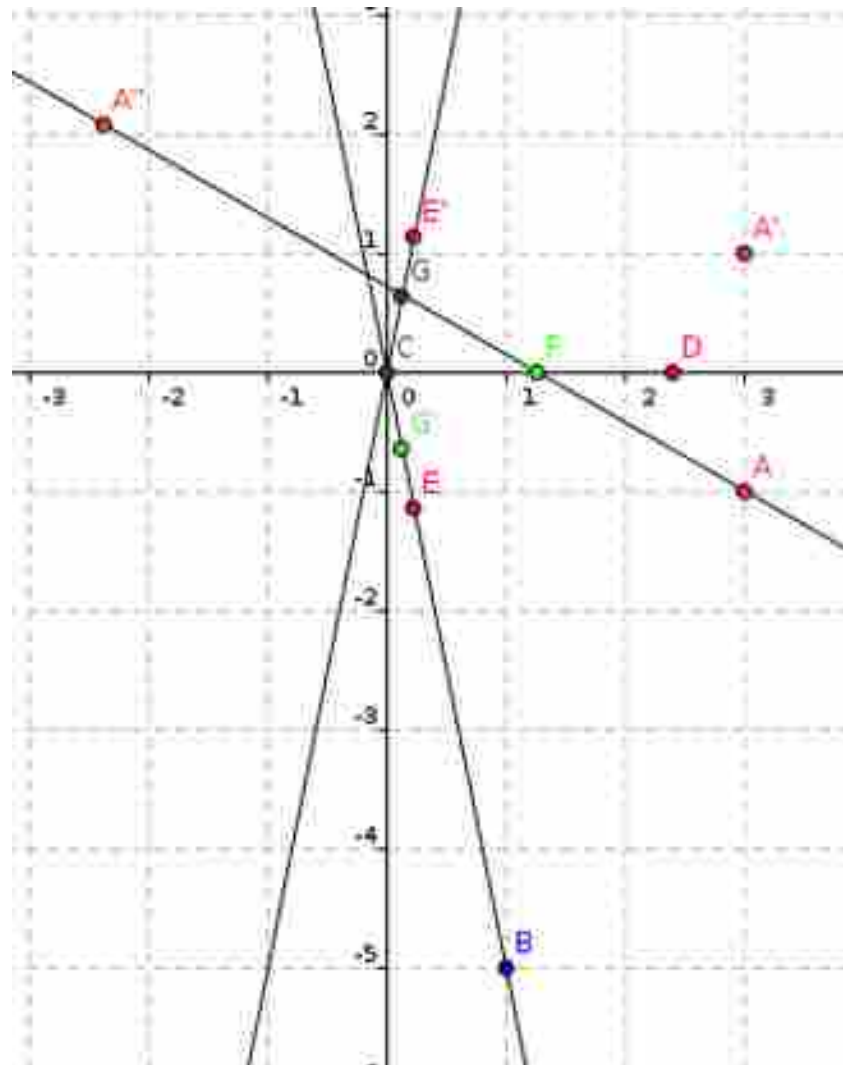
- de A à un point F de $[CD)$,
- puis de F à un point E de $[CB)$,
- puis de E à A .

Comment choisir E et F pour avoir le plus court chemin ?

(Pour travailler tous sur de mêmes représentations on pourra choisir dans un repère orthonormé :

$C(0;0)$, $A(3 ; -1)$, $B(1 ; -5)$.)





Conclusion

Dans la résolution de problème différentes représentations cohabitent :

- elles peuvent avoir des fonctions différentes (pour : vérifier (la preuve ou la plausibilité), expliquer, chercher, communiquer, systématiser) qui conditionneront le contrat didactique d'utilisation de ces représentations;
- ces représentations ne sont pas congruentes : spécificité des traitements intra et inter registres ;
- didactiquement on utilise la variété des registres pour différencier suivant les élèves et leurs difficultés, pour illustrer la variété des procédures en phase heuristique et en phase de validation, pour illustrer l'invariance de la structure mathématique quel que soit le registre de représentation.

Références

- De Villiers, M. (1990). The role and the function of proof in mathematics, *Pythagoras n°24*, pp.17-24.
- Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview, *Educational Studies in Mathematics 44* : 5-23
- Levain, J.-P., Didierjean, A. (2017). Problèmes multiplicatifs, proportionnalité et théorie des champs conceptuels. *Rééducation Orthophonique. N° 269*.
Mathématiques sans Frontières (2000).
<http://maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php?article422>
- Ng, S. F. & Lee, K. « The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems ». *Journal for Research in Mathematics Education Vol. 40.No 3* (2009), pp. 282-313.
- Sander, E. (2018). Une approche interprétative de la résolution de problèmes, in Julia Pilet & Céline Vendeira (ed.) *Préactes du séminaire de didactique des mathématiques. ARDM*