Géométrie, programme d'Erlangen, groupes, transitivité et invariants : de la théorie à la pratique

Daniel PERRIN

Séminaire international des IREM, 14 janvier 2022

Pour des précisions : ma page web

Je vais aborder beaucoup de thèmes, de manière très sommaire. Pour des détails voir :

- Ma page web :
  https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ perrin/
  Notamment les rubriques : sur la géométrie, conférences, livre de géométrie projective, projet de géométrie, CAPES, etc.

Pour des précisions : ma page web

Je vais aborder beaucoup de thèmes, de manière très sommaire.
Pour des détails voir :

- Ma page web :
  https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ perrin/
  Notamment les rubriques : sur la géométrie, conférences, livre de géométrie projective, projet de géométrie, CAPES, etc.
- Le rapport de la commission Kahane* (*L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, 2002). (La partie géométrie est sur ma page web.)

Pour des précisions : ma page web

Je vais aborder beaucoup de thèmes, de manière très sommaire. Pour des détails voir :

- Ma page web :
  https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ perrin/
  Notamment les rubriques : sur la géométrie, conférences, livre de géométrie projective, projet de géométrie, CAPES, etc.
- Le rapport de la commission Kahane* (*L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, 2002). (La partie géométrie est sur ma page web.)
- PERRIN Daniel, *Mathématiques* d'École*, Cassini (2005, 2011).

Pour des précisions : ma page web

Je vais aborder beaucoup de thèmes, de manière très sommaire.
Pour des détails voir :

- Ma page web :
  https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ perrin/
  Notamment les rubriques : sur la géométrie, conférences, livre de géométrie projective, projet de géométrie, CAPES, etc.
- Le rapport de la commission Kahane* (*L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, 2002). (La partie géométrie est sur ma page web.)
- PERRIN Daniel, *Mathématiques* d'École*, Cassini (2005, 2011).
- La brochure du groupe IREM Géométrie* : `http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf`

Mon objectif général

Mon principal objectif, depuis de nombreuses années, est de défendre l'enseignement de la géométrie et former les professeurs sur ce thème. Voir là-dessus le rapport de la commission Kahane et la Postface de mon projet de livre de géométrie projective.

Mon objectif aujourd'hui

Montrer comment des notions théoriques autour du programme d'Erlangen de Felix Klein (groupes, "niche écologique" d'un théorème, transitivité) sont pertinentes pour l'enseignement car elles permettent :

- D'avoir un temps d'avance par rapport aux élèves.

Mon objectif aujourd'hui

Montrer comment des notions théoriques autour du programme d'Erlangen de Felix Klein (groupes, “niche écologique” d'un théorème, transitivité) sont pertinentes pour l'enseignement car elles permettent :

- D'avoir un temps d'avance par rapport aux élèves.
- De choisir les invariants pertinents pour les démonstrations selon la “niche” en jeu, par exemple l'aire dans le cas de la géométrie affine.

Mon objectif aujourd'hui

Montrer comment des notions théoriques autour du programme d'Erlangen de Felix Klein (groupes, "niche écologique" d'un théorème, transitivité) sont pertinentes pour l'enseignement car elles permettent :

- D'avoir un temps d'avance par rapport aux élèves.
- De choisir les invariants pertinents pour les démonstrations selon la "niche" en jeu, par exemple l'aire dans le cas de la géométrie affine.
- D'utiliser les critères de transitivité, et notamment les cas d'isométrie et de similitude.

Le programme d'Erlangen

Retour aux sources : Euclide

- Avant de parler du programme d'Erlangen de Felix Klein, je vais expliquer en quoi il me semble déjà en germe dans Euclide et notamment dans la preuve du premier cas d'égalité des triangles (livre 1, prop. 4) :

Retour aux sources : Euclide

- Avant de parler du programme d'Erlangen de Felix Klein, je vais expliquer en quoi il me semble déjà en germe dans Euclide et notamment dans la preuve du premier cas d'égalité des triangles (livre 1, prop. 4) :
- **Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.** Figure*

Retour aux sources : Euclide

- Avant de parler du programme d'Erlangen de Felix Klein, je vais expliquer en quoi il me semble déjà en germe dans Euclide et notamment dans la preuve du premier cas d'égalité des triangles (livre 1, prop. 4) :
- **Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.** Figure*
- Deux mots-clés implicites : groupe de transformations et transitivité.

Le programme d'Erlangen

- C'est la thèse de Felix Klein (1872).

Le programme d'Erlangen

- C'est la thèse de Felix Klein (1872).
- Son but : **unifier** les géométries.

Le programme d'Erlangen

- C'est la thèse de Felix Klein (1872).
- Son but : **unifier** les géométries.
- **Principe :** Une géométrie c'est la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X.

Le programme d'Erlangen

- C'est la thèse de Felix Klein (1872).
- Son but : **unifier** les géométries.
- **Principe :** Une géométrie c'est la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X.
- **Exemples :** Le plan affine euclidien et le groupe des isométries euclidiennes, le plan affine et les bijections affines, le plan projectif et les homographies.

Classification des propriétés

- *... étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*

Classification des propriétés

- *... étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*
- **Exemple 1** Les homographies conservent concours et alignement.

Classification des propriétés

- *... étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*
- **Exemple 1** Les homographies conservent concours et alignement.
- **Exemple 2** Les transformations affines conservent en outre le parallélisme, les rapports de mesures algébriques sur une même droite (tout ce qui se formule avec des vecteurs mais sans produit scalaire) et les rapports d'aires.

Classification des propriétés

- *... étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*
- **Exemple 1** Les homographies conservent concours et alignement.
- **Exemple 2** Les transformations affines conservent en outre le parallélisme, les rapports de mesures algébriques sur une même droite (tout ce qui se formule avec des vecteurs mais sans produit scalaire) et les rapports d'aires.
- **Exemple 3** Les isométries conservent en outre longueurs et angles.

Les théorèmes à la niche

- Chaque théorème possède une **niche écologique** privilégiée qui tient aux propriétés mises en jeu : pour Pythagore c'est la géométrie euclidienne, pour Thalès*, la géométrie affine, pour Pappus* la géométrie projective.

Les théorèmes à la niche

- Chaque théorème possède une **niche écologique** privilégiée qui tient aux propriétés mises en jeu : pour Pythagore c'est la géométrie euclidienne, pour Thalès*, la géométrie affine, pour Pappus* la géométrie projective.
- C'est dans ce cadre qu'il s'énonce le plus généralement et, souvent, qu'il est le plus facile à prouver. Un exemple : le théorème de Pascal*.

Quel intérêt pour de futurs professeurs ?

Repérer la niche écologique d'un problème a deux avantages :

- Trouver rapidement le résultat cherché, souvent en se ramenant à un cas particulier. La démonstration n'est pas en général au niveau des élèves, mais on a ainsi un **temps d'avance** sur eux.

Quel intérêt pour de futurs professeurs ?

Repérer la niche écologique d'un problème a deux avantages :

- Trouver rapidement le résultat cherché, souvent en se ramenant à un cas particulier. La démonstration n'est pas en général au niveau des élèves, mais on a ainsi un **temps d'avance** sur eux.
- De plus, lorsqu'il s'agit de proposer une preuve abordable par les élèves, le programme d'Erlangen permet d'avoir une **claire conscience des outils à utiliser**.

Programme d'Erlangen

et temps d'avance

La géométrie affine

- La géométrie affine est essentiellement la géométrie des points et des vecteurs (sans distance ni produit scalaire).

La géométrie affine

- La géométrie affine est essentiellement la géométrie des points et des vecteurs (sans distance ni produit scalaire).
- Dans le cas euclidien le groupe affine contient les isométries, les homothéties, mais aussi d'autres transformations : affinités, transvections, etc.

La géométrie affine

- La géométrie affine est essentiellement la géométrie des points et des vecteurs (sans distance ni produit scalaire).
- Dans le cas euclidien le groupe affine contient les isométries, les homothéties, mais aussi d'autres transformations : affinités, transvections, etc.
- Toutes ces transformations conservent les propriétés qui s'expriment en termes de vecteurs (sans produit scalaire) : alignement, concours, parallélisme, milieux, rapports de mesures algébriques sur une même droite ou des droites parallèles, rapports d'aires, mais ni angles, ni longueurs.

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, le temps d'avance pour le résultat

- **Principe** : On identifie que le problème est un problème affine. Exemple : le concours des médianes, les tiers*, l'ellipse de Steiner*.

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, le temps d'avance pour le résultat

- **Principe** : On identifie que le problème est un problème affine. Exemple : le concours des médianes, les tiers*, l'ellipse de Steiner*.
- On effectue une transformation affine pour transformer le problème en un problème plus simple. On utilise pour cela des propriétés de **transitivité**, par exemple :
  le groupe affine est transitif sur les triangles*.

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, le temps d'avance pour le résultat

- **Principe** : On identifie que le problème est un problème affine. Exemple : le concours des médianes, les tiers*, l'ellipse de Steiner*.
- On effectue une transformation affine pour transformer le problème en un problème plus simple. On utilise pour cela des propriétés de **transitivité**, par exemple :
  le groupe affine est transitif sur les triangles*.
- On résout le problème simplifié (médianes, tiers*, Steiner*) et on revient au cas initial par la transformation inverse.

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, le temps d'avance pour le résultat

- **Principe** : On identifie que le problème est un problème affine. Exemple : le concours des médianes, les tiers*, l'ellipse de Steiner*.
- On effectue une transformation affine pour transformer le problème en un problème plus simple. On utilise pour cela des propriétés de **transitivité**, par exemple :
  le groupe affine est transitif sur les triangles*.
- On résout le problème simplifié (médianes, tiers*, Steiner*) et on revient au cas initial par la transformation inverse.
- Cette procédure n'est pas applicable en classe, mais elle donne au professeur un **temps d'avance** sur ses élèves car elle lui donne le résultat à prouver. Un exemple* (bis*).

Invariants et transitivité

Les invariants comme mesure du défaut de transitivité

Lorsque le groupe G n'est pas transitif sur X, on cherche des conditions qui garantissent qu'on peut passer d'un objet x à un objet y.
Ces conditions s'expriment le plus souvent en termes **d'invariants** : il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$ si et seulement si x et y ont mêmes invariants. Dans les cas les plus simple, un seul invariant suffit.

Les invariants de la géométrie élémentaire

- Si X est l'ensemble des couples de points du plan affine euclidien, G le groupe des isométries, un invariant du couple (A, B) est la **longueur** AB.

Les invariants de la géométrie élémentaire

- Si X est l'ensemble des couples de points du plan affine euclidien, G le groupe des isométries, un invariant du couple (A, B) est la **longueur** AB.
- Pour les couples de demi-droites un invariant est leur **angle**.

Les invariants de la géométrie élémentaire

- Si X est l'ensemble des couples de points du plan affine euclidien, G le groupe des isométries, un invariant du couple (A, B) est la **longueur** AB.
- Pour les couples de demi-droites un invariant est leur **angle**.
- Un invariant de la géométrie affine est l'**aire** (ou les rapports d'aires).

Les invariants de la géométrie élémentaire

- Si X est l'ensemble des couples de points du plan affine euclidien, G le groupe des isométries, un invariant du couple (A, B) est la **longueur** AB.
- Pour les couples de demi-droites un invariant est leur **angle**.
- Un invariant de la géométrie affine est l'**aire** (ou les rapports d'aires).
- C'est un fait d'expérience que ces invariants jouent un rôle essentiel en géométrie. Il y a une raison théorique qui justifie ce fait : tout théorème est la traduction d'une relation entre des invariants.

La géométrie affine et l'invariant aire

- **Principe** : Lorsqu'un problème relève de la géométrie affine, il peut toujours être résolu en utilisant les invariants du groupe affine.

La géométrie affine et l'invariant aire

- **Principe** : Lorsqu'un problème relève de la géométrie affine, il peut toujours être résolu en utilisant les invariants du groupe affine.
- Or, le seul invariant du groupe affine est **l'aire** (ou les rapports d'aires).

La géométrie affine et l'invariant aire

- **Principe** : Lorsqu'un problème relève de la géométrie affine, il peut toujours être résolu en utilisant les invariants du groupe affine.
- Or, le seul invariant du groupe affine est **l'aire** (ou les rapports d'aires).
- De plus les résultats à utiliser sont ceux qui décrivent l'invariance de l'aire par les transformations affines : ce sont exactement les **lemmes du collège** de *Mathématiques d'école* (la plupart de ces lemmes sont déjà dans Euclide).

Les lemmes "du collège"

- Parallélogramme, trapèze*.

Les lemmes "du collège"

- Parallélogramme, trapèze*.
- Proportions et chevron*.

Exemples

- Si l'on en croit le principe énoncé ci-dessus, on doit donc pouvoir résoudre n'importe quel problème affine avec ces outils. Voici quelques exemples.

Exemples

- Si l'on en croit le principe énoncé ci-dessus, on doit donc pouvoir résoudre n'importe quel problème affine avec ces outils. Voici quelques exemples.
- Le théorème de Thalès*.

Exemples

- Si l'on en croit le principe énoncé ci-dessus, on doit donc pouvoir résoudre n'importe quel problème affine avec ces outils. Voici quelques exemples.
- Le théorème de Thalès*.
- Les médianes*, les tiers* ou le parallélogramme*.

Exemples

- Si l'on en croit le principe énoncé ci-dessus, on doit donc pouvoir résoudre n'importe quel problème affine avec ces outils. Voici quelques exemples.
- Le théorème de Thalès*.
- Les médianes*, les tiers* ou le parallélogramme*.
- Le théorème de Ménélaüs*.

Critères de transitivité :

les cas d'isométrie

Transitivité et invariants : l'exemple des triangles

- Lorsqu'un groupe G opère sur un ensemble X de manière non transitive, le résultat que l'on vise est du type suivant :

Transitivité et invariants : l'exemple des triangles

- Lorsqu'un groupe G opère sur un ensemble X de manière non transitive, le résultat que l'on vise est du type suivant :
- Soient $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$ si et seulement si x et y ont mêmes invariants.

Transitivité et invariants : l'exemple des triangles

- Lorsqu'un groupe G opère sur un ensemble X de manière non transitive, le résultat que l'on vise est du type suivant :
- Soient $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$ si et seulement si x et y ont mêmes invariants.
- Nous allons étudier cette situation dans le cas où X est l'espace des triangles du plan et G le groupe des isométries.

Les invariants des triangles

On connaît des invariants des triangles : les longueurs des côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, les trois angles α, β, γ, mais aussi bien d'autres (aire, périmètre, longueurs des médianes, des hauteurs, etc.) mais la question est de savoir lesquels caractérisent les triangles modulo isométrie.

Combien d'invariants ?

- En général, un seul invariant ne suffit pas et une question essentielle est de trouver le nombre minimum d'invariants.

Combien d'invariants ?

- En général, un seul invariant ne suffit pas et une question essentielle est de trouver le nombre minimum d'invariants.
- Pour trouver ce nombre on raisonne sur la **dimension** (au sens des variétés).

Combien d'invariants ?

- En général, un seul invariant ne suffit pas et une question essentielle est de trouver le nombre minimum d'invariants.
- Pour trouver ce nombre on raisonne sur la **dimension** (au sens des variétés).
- L'espace des triangles modulo isométrie est de dimension 3 : un triangle, à isométrie près, dépend de trois paramètres.

Combien d'invariants ?

- En général, un seul invariant ne suffit pas et une question essentielle est de trouver le nombre minimum d'invariants.
- Pour trouver ce nombre on raisonne sur la **dimension** (au sens des variétés).
- L'espace des triangles modulo isométrie est de dimension 3 : un triangle, à isométrie près, dépend de trois paramètres.
- En effet, un triangle est formé de trois points de $\mathbf{R}^2$ avec chacun deux coordonnées. L'espace des triangles dépend donc de six paramètres.

Combien d'invariants ?

- En général, un seul invariant ne suffit pas et une question essentielle est de trouver le nombre minimum d'invariants.
- Pour trouver ce nombre on raisonne sur la **dimension** (au sens des variétés).
- L'espace des triangles modulo isométrie est de dimension 3 : un triangle, à isométrie près, dépend de trois paramètres.
- En effet, un triangle est formé de trois points de $\mathbf{R}^2$ avec chacun deux coordonnées. L'espace des triangles dépend donc de six paramètres.
- Mais les isométries du plan sont de dimension trois. En effet une isométrie (directe) est composée d'une rotation de centre fixé (dimension 1) et d'une translation (dimension 2).

Combien d'invariants ?

- L'espace des triangles modulo isométrie est donc de dimension trois $(6-3)$.

Combien d'invariants ?

- L'espace des triangles modulo isométrie est donc de dimension trois $(6-3)$.
- Cela permet de répondre à une question du bulletin APMEP : *Deux triangles qui ont même aire et même périmètre sont-ils isométriques ?*

Combien d'invariants ?

- L'espace des triangles modulo isométrie est donc de dimension trois $(6-3)$.
- Cela permet de répondre à une question du bulletin APMEP : *Deux triangles qui ont même aire et même périmètre sont-ils isométriques ?*
- Évidemment non, il faut au moins trois invariants, voir ma conférence IREM de 2013, `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/aireperi/APM-aire-perimetre10.pdf`

Trois invariants ?

- Il faut trois invariants, mais pas n'importe lesquels, par exemple les trois angles sont liés par la relation $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Trois invariants ?

- Il faut trois invariants, mais pas n'importe lesquels, par exemple les trois angles sont liés par la relation $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
- Une question autrefois classique est celle des résolutions de triangles. Il s'agit de déterminer un triangle (à isométrie près) connaissant trois de ses invariants, par exemple son aire et deux des longueurs de ses côtés, ou ses trois hauteurs et une profusion d'autres exemples.

Trois invariants ?

- Il faut trois invariants, mais pas n'importe lesquels, par exemple les trois angles sont liés par la relation $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
- Une question autrefois classique est celle des résolutions de triangles. Il s'agit de déterminer un triangle (à isométrie près) connaissant trois de ses invariants, par exemple son aire et deux des longueurs de ses côtés, ou ses trois hauteurs et une profusion d'autres exemples.
- Si les invariants sont bien choisis, on va trouver seulement un nombre fini de solutions possibles.

L'intérêt des cas d'isométrie

- Le cas essentiel est celui où les trois invariants déterminent un **unique** triangle à isométrie près, c'est ce que font les **cas d'isométrie** (deux côtés et un angle, deux angles et un côté, les trois côtés).

L'intérêt des cas d'isométrie

- Le cas essentiel est celui où les trois invariants déterminent un **unique** triangle à isométrie près, c'est ce que font les **cas d'isométrie** (deux côtés et un angle, deux angles et un côté, les trois côtés).
- Les cas d'isométrie donnent donc des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie transformant un triangle en un autre.

L'intérêt des cas d'isométrie

- Le cas essentiel est celui où les trois invariants déterminent un **unique** triangle à isométrie près, c'est ce que font les **cas d'isométrie** (deux côtés et un angle, deux angles et un côté, les trois côtés).
- Les cas d'isométrie donnent donc des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie transformant un triangle en un autre.
- Deux points essentiels pour en comprendre l'intérêt :
  • On obtient comme conséquence l'égalité des autres invariants que ceux utilisés.
  • On peut montrer que deux triangles sont isométriques **sans être obligé d'exhiber l'isométrie qui fait le travail**.

L'intérêt des cas d'isométrie

- Le cas essentiel est celui où les trois invariants déterminent un **unique** triangle à isométrie près, c'est ce que font les **cas d'isométrie** (deux côtés et un angle, deux angles et un côté, les trois côtés).
- Les cas d'isométrie donnent donc des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie transformant un triangle en un autre.
- Deux points essentiels pour en comprendre l'intérêt :
  • On obtient comme conséquence l'égalité des autres invariants que ceux utilisés.
  • On peut montrer que deux triangles sont isométriques **sans être obligé d'exhiber l'isométrie qui fait le travail**.
- Il peut le dire* !

Exemples d'utilisation

- Un premier exemple*.

Exemples d'utilisation

- Un premier exemple*.
- Un autre exemple*.

Exemples d'utilisation

- Un premier exemple*.
- Un autre exemple*.
- Encore un pour la route*.

Résumé de la méthode

- L'objectif est de montrer l'égalité de deux longueurs ou de deux angles.

Résumé de la méthode

- L'objectif est de montrer l'égalité de deux longueurs ou de deux angles.
- On incorpore ces éléments dans deux triangles qui semblent visuellement "pareils".

Résumé de la méthode

- L'objectif est de montrer l'égalité de deux longueurs ou de deux angles.
- On incorpore ces éléments dans deux triangles qui semblent visuellement "pareils".
- On montre que ces triangles sont isométriques en prouvant que trois de leurs éléments (autres que ceux convoités) sont égaux.

Résumé de la méthode

- L'objectif est de montrer l'égalité de deux longueurs ou de deux angles.
- On incorpore ces éléments dans deux triangles qui semblent visuellement “pareils”.
- On montre que ces triangles sont isométriques en prouvant que trois de leurs éléments (autres que ceux convoités) sont égaux.
- On conclut.

Critiques des démonstrations par les transformations

- Elles nécessitent souvent des constructions supplémentaires.

Critiques des démonstrations par les transformations

- Elles nécessitent souvent des constructions supplémentaires.
- Elles sont moins visuelles : les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.

Critiques des démonstrations par les transformations

- Elles nécessitent souvent des constructions supplémentaires.
- Elles sont moins visuelles : les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.
- Il faut déjà repérer quelles sont les transformations pertinentes.

Critiques des démonstrations par les transformations

- Elles nécessitent souvent des constructions supplémentaires.
- Elles sont moins visuelles : les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.
- Il faut déjà repérer quelles sont les transformations pertinentes.
- Elles sont plus compliquées à écrire.

Critiques des démonstrations par les transformations

- Elles nécessitent souvent des constructions supplémentaires.
- Elles sont moins visuelles : les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.
- Il faut déjà repérer quelles sont les transformations pertinentes.
- Elles sont plus compliquées à écrire.
- Pour être efficaces, elles nécessitent de disposer de toute la panoplie des transformations.

Critiques des démonstrations par les transformations

- Elles nécessitent souvent des constructions supplémentaires.
- Elles sont moins visuelles : les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.
- Il faut déjà repérer quelles sont les transformations pertinentes.
- Elles sont plus compliquées à écrire.
- Pour être efficaces, elles nécessitent de disposer de toute la panoplie des transformations.
- Les mêmes arguments valent aussi pour les cas de similitude.

Conclusion

Les arguments énoncés ci-dessus ont servi de perspective au groupe Géométrie de l'IREM de Paris dans l'élaboration de la Brochure :
http:
//docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf

- Cette brochure propose une progression pour l'enseignement de la géométrie au collège qui récuse l'usage trop précoce des transformations en privilégiant au contraire les points suivants :

Conclusion

Les arguments énoncés ci-dessus ont servi de perspective au groupe Géométrie de l'IREM de Paris dans l'élaboration de la Brochure :
`http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf`

- Cette brochure propose une progression pour l'enseignement de la géométrie au collège qui récuse l'usage trop précoce des transformations en privilégiant au contraire les points suivants :
- Utilisation des invariants (et notamment des aires).

Conclusion

Les arguments énoncés ci-dessus ont servi de perspective au groupe Géométrie de l'IREM de Paris dans l'élaboration de la Brochure :
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf

- Cette brochure propose une progression pour l'enseignement de la géométrie au collège qui récuse l'usage trop précoce des transformations en privilégiant au contraire les points suivants :
- Utilisation des invariants (et notamment des aires).
- Utilisation des cas d'isométrie et de similitude des triangles.

Conclusion

Les arguments énoncés ci-dessus ont servi de perspective au groupe Géométrie de l'IREM de Paris dans l'élaboration de la Brochure :
`http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf`

- Cette brochure propose une progression pour l'enseignement de la géométrie au collège qui récuse l'usage trop précoce des transformations en privilégiant au contraire les points suivants :
- Utilisation des invariants (et notamment des aires).
- Utilisation des cas d'isométrie et de similitude des triangles.
- Je vous remercie de votre attention.

Références

- DUPERRET Jean-Claude, PERRIN Daniel, RICHETON Jean-Pierre ([DPR]), *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 2001.
- KAHANE Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob (2002).
- KLEIN Felix, *Le programme d'Erlangen*, J. Gabay (1991).
- PERRIN Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini (2005, 2011).
- PERRIN Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations.* Repères IREM, 53, p. 91-110, 2003.
- PERRIN Daniel, *La géométrie, un domaine hors-programme ?* Bull. APMEP 496 (2011).

BONUS

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, les repères

- **Principe**

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, les repères

- **Principe**
- On identifie le problème comme affine.

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, les repères

- **Principe**
- On identifie le problème comme affine.
- Comme le groupe affine est transitif sur les triangles on peut envoyer un triangle quelconque (choisi comme repère cartésien) sur un triangle rectangle isocèle (donc un repère orthonormé).

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, les repères

- **Principe**
- On identifie le problème comme affine.
- Comme le groupe affine est transitif sur les triangles on peut envoyer un triangle quelconque (choisi comme repère cartésien) sur un triangle rectangle isocèle (donc un repère orthonormé).
- Cela permet de faire les calculs dans le repère cartésien choisi.

Erlangen mode d'emploi : le cas affine, les repères

- **Principe**
- On identifie le problème comme affine.
- Comme le groupe affine est transitif sur les triangles on peut envoyer un triangle quelconque (choisi comme repère cartésien) sur un triangle rectangle isocèle (donc un repère orthonormé).
- Cela permet de faire les calculs dans le repère cartésien choisi.
- Exemple : les médianes, Pappus* affine, le défi* de Daffy.

Une citation de Bourbaki :

Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales permettant en principe d'écrire tous les covariants algébriques et toutes leurs "syzygies" [ou relations] *de façon purement automatique ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la géométrie "élémentaire". Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc.) Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...*

Une idée essentielle : tout théorème est une relation entre invariants. Un exemple simple :

- Soit ABC un triangle et H un point du plan. On a la relation :

$$(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}|\overrightarrow{HA})+(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}|\overrightarrow{HB})+(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}|\overrightarrow{HC})=0.$$

Une idée essentielle : tout théorème est une relation entre invariants. Un exemple simple :

- Soit ABC un triangle et H un point du plan. On a la relation :

$$(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}|\overrightarrow{HA})+(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}|\overrightarrow{HB})+(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}|\overrightarrow{HC})=0.$$

- Ou encore :

$$(\overrightarrow{CB}|\overrightarrow{HA})+(\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{HB})+(\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{HC})=0.$$

Interprétation* géométrique ?

Une autre :

Soit ABC un triangle et G un point du plan. On a la relation :

$$\det(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\det(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA})+\det(\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})=0.$$

Interprétation* géométrique ?

Mon chouchou : le théorème des six birapports

- Définition du birapport pour quatre points $a, b, c, d \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$:

$$[\![a, b, c, d]\!] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}.$$

Mon chouchou : le théorème des six birapports

- Définition du birapport pour quatre points $a, b, c, d \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$:

$$[\![a, b, c, d]\!] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}.$$

- Les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel (c'est essentiellement le théorème de l'angle inscrit*, vous connaissez ?).

Mon chouchou : le théorème des six birapports

- Définition du birapport pour quatre points $a, b, c, d \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$:

$$[\![a, b, c, d]\!] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}.$$

- Les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel (c'est essentiellement le théorème de l'angle inscrit*, vous connaissez ?).
- Si on a 8 points a, b, c, d, p, q, r, s :

$$[\![a, b, r, s]\!]\,[\![b, c, p, s]\!]\,[\![c, a, q, s]\!]\,[\![p, q, c, d]\!]\,[\![q, r, a, d]\!]\,[\![r, p, b, d]\!] = 1.$$

Enfin un théorème pas cher !

- Démonstration :

$$[\![a,b,r,s]\!]\,[\![b,c,p,s]\!]\,[\![c,a,q,s]\!]\,[\![p,q,c,d]\!]\,[\![q,r,a,d]\!]\,[\![r,p,b,d]\!] = 1.$$

$$\frac{r-a}{r-b}\times\frac{s-b}{s-a}\times\frac{p-b}{p-c}\times\frac{s-c}{s-b}\times\frac{q-c}{q-a}\times\frac{s-a}{s-c}$$
$$\times\frac{c-p}{c-q}\times\frac{d-q}{d-p}\times\frac{a-q}{a-r}\times\frac{d-r}{d-q}\times\frac{b-r}{b-p}\times\frac{d-p}{d-r} = 1$$

Enfin un théorème pas cher !

- Démonstration :

$$[\![a,b,r,s]\!]\,[\![b,c,p,s]\!]\,[\![c,a,q,s]\!]\,[\![p,q,c,d]\!]\,[\![q,r,a,d]\!]\,[\![r,p,b,d]\!] = 1.$$

$$\frac{r-a}{r-b} \times \frac{s-b}{s-a} \times \frac{p-b}{p-c} \times \frac{s-c}{s-b} \times \frac{q-c}{q-a} \times \frac{s-a}{s-c}$$
$$\times \frac{c-p}{c-q} \times \frac{d-q}{d-p} \times \frac{a-q}{a-r} \times \frac{d-r}{d-q} \times \frac{b-r}{b-p} \times \frac{d-p}{d-r} = 1$$

- **Conséquence :** Si cinq des quadruplets sont cocycliques ou alignés, le sixième aussi. Un exemple* et un autre*.