Nombres d'équilibres dans les triangles arithmétiques

Belbachir Hacène

Télé-séminaire international des IREM

05 mars 2021

Soient n et r deux entiers naturels non nuls, considérons[1] l'équation diophantienne,

[1] A. Behera, G. K. Panda. On the square roots of triangular numbers, Fibonacci Quart. 1999; (37): 98–105.

Problème d'équilibre (Balancing problem)

Soient n et r deux entiers naturels non nuls, considérons[1] l'équation diophantienne,

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + \cdots + (n+r),$$

[1] A. Behera, G. K. Panda. On the square roots of triangular numbers, Fibonacci Quart. 1999; (37): 98–105.

Problème d'équilibre (Balancing problem)

Soient n et r deux entiers naturels non nuls, considérons[1] l'équation diophantienne,

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + \cdots + (n+r),$$

Exemples

$$\begin{array}{lcl} (n,r)=(6,2) & \Rightarrow & 1+2+3+4+5 = 7+8, \\ (n,r)=(35,14) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+34 = 36+37+\cdots+49, \\ (n,r)=(204,84) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+203 = 205+206+\cdots+288, \\ (n,r)=(1189,492) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+1188 = 1190+\cdots+1681. \end{array}$$

Soit (B_n) la suite des nombres d'équilibres, (A001109 on SLOANE);

[1] A. Behera, G. K. Panda. On the square roots of triangular numbers, Fibonacci Quart. 1999; (37): 98–105.

Problème d'équilibre (Balancing problem)

Soient n et r deux entiers naturels non nuls, considérons[1] l'équation diophantienne,

$$1+2+\cdots+(n-1)=(n+1)+\cdots+(n+r),$$

Exemples

$$\begin{array}{lcl}
(n,r)=(6,2) & \Rightarrow & 1+2+3+4+5=7+8, \\
(n,r)=(35,14) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+34=36+37+\cdots+49, \\
(n,r)=(204,84) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+203=205+206+\cdots+288, \\
(n,r)=(1189,492) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+1188=1190+\cdots+1681.
\end{array}$$

Soit (B_n) la suite des nombres d'équilibres, ($A001109$ on SLOANE);

Theorem (Behera et Panda 1999)

$B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2},\ B_0 = 0,\ B_1 = 1$ *avec* $n \geq 2$.

[1] A. Behera, G. K. Panda. On the square roots of triangular numbers, Fibonacci Quart. 1999; (37): 98–105.

Problème d'équilibre (Balancing problem)

Soient n et r deux entiers naturels non nuls, considérons[1] l'équation diophantienne,

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + \cdots + (n+r),$$

Exemples

$(\mathrm{n,r}) = (6, 2) \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8,$

$(\mathrm{n,r}) = (35, 14) \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + 34 = 36 + 37 + \cdots + 49,$

$(\mathrm{n,r}) = (204, 84) \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + 203 = 205 + 206 + \cdots + 288,$

$(\mathrm{n,r}) = (1189, 492) \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + 1188 = 1190 + \cdots + 1681.$

Soit (B_n) la suite des nombres d'équilibres, (A001109 on SLOANE);

Theorem (Behera et Panda 1999)

$B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2},\ \ B_0 = 0,\ \ B_1 = 1$ *avec* $n \geq 2.$

$$0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, 1372105, 7997214, \cdots$$

[1]A. Behera, G. K. Panda. On the square roots of triangular numbers, Fibonacci Quart. 1999; (37): 98–105.

Problème du co-équilibre (cobalancing problem)

Le problème de co-équilibre[2]

[2]G. K. Panda, P. K. Ray. Cobalancing numbers and cobalancers, Int. J. Math. Math. Sci 2005; (8): 1189-1200.

Problème du co-équilibre (cobalancing problem)

Le problème de co-équilibre[2]

$$1 + 2 + \cdots + n = (n+1) + \cdots + (n+r).$$

[2] G. K. Panda, P. K. Ray. Cobalancing numbers and cobalancers, Int. J. Math. Math. Sci 2005; (8): 1189-1200.

Problème du co-équilibre (cobalancing problem)

Le problème de co-équilibre[2]

$$1 + 2 + \cdots + n = (n+1) + \cdots + (n+r).$$

Exemples

$$\begin{array}{lcl}
(\text{n,r})=(14,6) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+14 = 15+16+\cdots+20, \\
(\text{n,r})=(84,35) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+84 = 85+16+\cdots+119, \\
(\text{n,r})=(492,204) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+492 = 493+16+\cdots+696, \\
(\text{n,r})=(2870,1189) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+492 = 493+16+\cdots+696.
\end{array}$$

[2] G. K. Panda, P. K. Ray. Cobalancing numbers and cobalancers, Int. J. Math. Math. Sci 2005; (8): 1189-1200.

Problème du co-équilibre (cobalancing problem)

Le problème de co-équilibre[2]

$$1+2+\cdots+n=(n+1)+\cdots+(n+r).$$

Exemples

$$\begin{array}{lcl}
(n,r)=(14,6) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+14=15+16+\cdots+20, \\
(n,r)=(84,35) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+84=85+16+\cdots+119, \\
(n,r)=(492,204) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+492=493+16+\cdots+696, \\
(n,r)=(2870,1189) & \Rightarrow & 1+2+3+\cdots+492=493+16+\cdots+696.
\end{array}$$

Soit (b_n) la suite des nombres coéquilibres, (A053141 on SLOANE)

[2] G. K. Panda, P. K. Ray. Cobalancing numbers and cobalancers, Int. J. Math. Math. Sci 2005; (8): 1189-1200.

Problème du co-équilibre (cobalancing problem)

Le problème de co-équilibre[2]

$$1 + 2 + \cdots + n = (n+1) + \cdots + (n+r).$$

Exemples

(n,r)=$(14, 6)$	$\Rightarrow$	$1 + 2 + 3 + \cdots + 14 = 15 + 16 + \cdots + 20,$
(n,r)=$(84, 35)$	$\Rightarrow$	$1 + 2 + 3 + \cdots + 84 = 85 + 16 + \cdots + 119,$
(n,r)=$(492, 204)$	$\Rightarrow$	$1 + 2 + 3 + \cdots + 492 = 493 + 16 + \cdots + 696,$
(n,r)=$(2870, 1189)$	$\Rightarrow$	$1 + 2 + 3 + \cdots + 492 = 493 + 16 + \cdots + 696.$

Soit (b_n) la suite des nombres coéquilibres, (A053141 on SLOANE)

Theorem (Panda et Ray 2005)

$b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2} + 2,\ \ b_0 = 0,\ \ b_1 = 2$ *avec* $n \geq 2$.

[2] G. K. Panda, P. K. Ray. Cobalancing numbers and cobalancers, Int. J. Math. Math. Sci 2005; (8): 1189-1200.

Problème du co-équilibre (cobalancing problem)

Le problème de co-équilibre[2]

$$1+2+\cdots+n=(n+1)+\cdots+(n+r).$$

Exemples

(n,r)=$(14,6)$ $\Rightarrow$ $1+2+3+\cdots+14=15+16+\cdots+20$,

(n,r)=$(84,35)$ $\Rightarrow$ $1+2+3+\cdots+84=85+16+\cdots+119$,

(n,r)=$(492,204)$ $\Rightarrow$ $1+2+3+\cdots+492=493+16+\cdots+696$,

(n,r)=$(2870,1189)$ $\Rightarrow$ $1+2+3+\cdots+492=493+16+\cdots+696$.

Soit (b_n) la suite des nombres coéquilibres, (A053141 on SLOANE)

Theorem (Panda et Ray 2005)

$b_n=6b_{n-1}-b_{n-2}+2,\ b_0=0,\ b_1=2$ *avec* $n\geq 2$.

$$0,2,14,84,492,2870,16730,97512,568344,3312554,19306982,\cdots$$

[2] G. K. Panda, P. K. Ray. Cobalancing numbers and cobalancers, Int. J. Math. Math. Sci 2005; (8): 1189-1200.

$k-$Gap Balancing Numbers[4,5]

$$k \text{ impair} \quad \rightarrow \quad 1+2+\cdots+\left(n-\tfrac{k+1}{2}\right)=\left(n+\tfrac{k+1}{2}\right)+\cdots+(n+r), \quad (n,r)$$

$$k \text{ pair} \quad \rightarrow \quad 1+2+\cdots+\left(n-\tfrac{k}{2}\right)=\left(n+\tfrac{k+2}{2}\right)+\cdots+(n+r), \quad (2n+1,r)$$

[3] Dash, K. K., Ota, R. S.,and Dash, S. (2012). t-Balancing numbers. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(41), 1999-2012.

[4] Panda, G. K., and Rout, S. S. (2013). Gap balancing numbers. Fibonacci Quarterly, 51(3), 239-248.

[5] Rout, S. S., and Panda, G. K. (2015). *k*-Gap balancing numbers. Periodica Mathematica Hungarica, 70(1), 109-121.

$k-$Gap Balancing Numbers[4,5]

$$k \text{ impair} \quad \rightarrow \quad 1+2+\cdots+\left(n-\frac{k+1}{2}\right)=\left(n+\frac{k+1}{2}\right)+\cdots+\left(n+r\right), \quad (n,r)$$

$$k \text{ pair} \quad \rightarrow \quad 1+2+\cdots+\left(n-\frac{k}{2}\right)=\left(n+\frac{k+2}{2}\right)+\cdots+\left(n+r\right), \quad (2n+1,r)$$

$k=2$ $\quad 1+2+3=6 \rightarrow (9,2)$
$\quad 1+2+\cdots+8=11+12+13 \rightarrow (19,4)$

[3]Dash, K. K., Ota, R. S.,and Dash, S. (2012). t-Balancing numbers. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(41), 1999-2012.

[4]Panda, G. K., and Rout, S. S. (2013). Gap balancing numbers. Fibonacci Quarterly, 51(3), 239-248.

[5]Rout, S. S., and Panda, G. K. (2015). *k*-Gap balancing numbers. Periodica Mathematica Hungarica, 70(1), 109-121.

$k-$Gap Balancing Numbers[4,5]

$$k \text{ impair} \quad \to \quad 1+2+\cdots+\left(n-\tfrac{k+1}{2}\right)=\left(n+\tfrac{k+1}{2}\right)+\cdots+(n+r), \quad (n,r)$$

$$k \text{ pair} \quad \to \quad 1+2+\cdots+\left(n-\tfrac{k}{2}\right)=\left(n+\tfrac{k+2}{2}\right)+\cdots+(n+r), \quad (2n+1,r)$$

$$\begin{array}{ll} k=2 & 1+2+3=6 \to (9,2) \\ & 1+2+\cdots+8=11+12+13 \to (19,4) \\ k=3 & 1+\cdots+6=10+11 \to (8,3) \\ & 1+\cdots+11=15+\cdots+18 \to (13,5) \end{array}$$

[3]Dash, K. K., Ota, R. S.,and Dash, S. (2012). t-Balancing numbers. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(41), 1999-2012.

[4]Panda, G. K., and Rout, S. S. (2013). Gap balancing numbers. Fibonacci Quarterly, 51(3), 239-248.

[5]Rout, S. S., and Panda, G. K. (2015). *k*-Gap balancing numbers. Periodica Mathematica Hungarica, 70(1), 109-121.

$k-$Gap Balancing Numbers[4,5]

$$k \text{ impair} \quad \rightarrow \quad 1+2+\cdots+\left(n-\tfrac{k+1}{2}\right) = \left(n+\tfrac{k+1}{2}\right)+\cdots+(n+r), \quad (n,r)$$

$$k \text{ pair} \quad \rightarrow \quad 1+2+\cdots+\left(n-\tfrac{k}{2}\right) = \left(n+\tfrac{k+2}{2}\right)+\cdots+(n+r), \quad (2n+1,r)$$

$$\begin{array}{ll}
k=2 & 1+2+3=6 \rightarrow (9,2) \\
 & 1+2+\cdots+8 = 11+12+13 \rightarrow (19,4) \\
k=3 & 1+\cdots+6 = 10+11 \rightarrow (8,3) \\
 & 1+\cdots+11 = 15+\cdots+18 \rightarrow (13,5) \\
k=4 & 1+\cdots+9 = 14+15+16 \rightarrow (23,5) \\
 & 1+\cdots+14 = 19+\cdots+23 \rightarrow (33,7)
\end{array}$$

[3] Dash, K. K., Ota, R. S.,and Dash, S. (2012). t-Balancing numbers. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(41), 1999-2012.

[4] Panda, G. K., and Rout, S. S. (2013). Gap balancing numbers. Fibonacci Quarterly, 51(3), 239-248.

[5] Rout, S. S., and Panda, G. K. (2015). *k*-Gap balancing numbers. Periodica Mathematica Hungarica, 70(1), 109-121.

$k-$Gap Balancing Numbers[4,5]

$$k \text{ impair} \quad \to \quad 1+2+\cdots+\left(n-\tfrac{k+1}{2}\right)=\left(n+\tfrac{k+1}{2}\right)+\cdots+(n+r), \quad (n,r)$$

$$k \text{ pair} \quad \to \quad 1+2+\cdots+\left(n-\tfrac{k}{2}\right)=\left(n+\tfrac{k+2}{2}\right)+\cdots+(n+r), \quad (2n+1,r)$$

$$\begin{array}{ll}
k=2 & 1+2+3=6\to(9,2)\\
 & 1+2+\cdots+8=11+12+13\to(19,4)\\
k=3 & 1+\cdots+6=10+11\to(8,3)\\
 & 1+\cdots+11=15+\cdots+18\to(13,5)\\
k=4 & 1+\cdots+9=14+15+16\to(23,5)\\
 & 1+\cdots+14=19+\cdots+23\to(33,7)\\
k=5 & 1+\cdots+4=10\to(7,3)\\
 & 1+\cdots+12=18+\cdots+21\to(15,6)
\end{array}$$

---

[3] Dash, K. K., Ota, R. S.,and Dash, S. (2012). t-Balancing numbers. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(41), 1999-2012.

[4] Panda, G. K., and Rout, S. S. (2013). Gap balancing numbers. Fibonacci Quarterly, 51(3), 239-248.

[5] Rout, S. S., and Panda, G. K. (2015). *k*-Gap balancing numbers. Periodica Mathematica Hungarica, 70(1), 109-121.

$$k \text{ impair} \quad \rightarrow \quad 1+2+\cdots+\left(n-\tfrac{k+1}{2}\right)=\left(n+\tfrac{k+1}{2}\right)+\cdots+(n+r), \quad (n,r)$$

$$k \text{ pair} \quad \rightarrow \quad 1+2+\cdots+\left(n-\tfrac{k}{2}\right)=\left(n+\tfrac{k+2}{2}\right)+\cdots+(n+r), \quad (2n+1,r)$$

$k=2$ $\quad 1+2+3=6 \rightarrow (9,2)$

$\quad 1+2+\cdots+8=11+12+13 \rightarrow (19,4)$

$k=3$ $\quad 1+\cdots+6=10+11 \rightarrow (8,3)$

$\quad 1+\cdots+11=15+\cdots+18 \rightarrow (13,5)$

$k=4$ $\quad 1+\cdots+9=14+15+16 \rightarrow (23,5)$

$\quad 1+\cdots+14=19+\cdots+23 \rightarrow (33,7)$

$k=5$ $\quad 1+\cdots+4=10 \rightarrow (7,3)$

$\quad 1+\cdots+12=18+\cdots+21 \rightarrow (15,6)$

The $t-$Balancing Numbers[3]: $1+2+\cdots+n=(n+1+t)+\cdots+(n+r+t)$

[3] Dash, K. K., Ota, R. S.,and Dash, S. (2012). t-Balancing numbers. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(41), 1999-2012.

[4] Panda, G. K., and Rout, S. S. (2013). Gap balancing numbers. Fibonacci Quarterly, 51(3), 239-248.

[5] Rout, S. S., and Panda, G. K. (2015). *k*-Gap balancing numbers. Periodica Mathematica Hungarica, 70(1), 109-121.

Quelques extensions

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k = (n+1)^k + \cdots + (n+r)^k \quad \text{Pas de solution}^6$$

[6] Panda, G. K. (2007). Sequence balancing and cobalancing numbers.

[7] Kovács, T., Liptai, K.,and Olajos, P. (2010). On (a, b)-balancing numbers. Publ. Math. Debrecen, 77(3-4), 485-498.

[8] Liptai, K., Luca, F., Pintér, Á., and Szalay, L. (2009). Generalized balancing numbers. Indagationes mathematicae, 20(1), 87-100.

Quelques extensions

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k = (n+1)^k + \cdots + (n+r)^k$$ Pas de solution[6]

$$(a+b) + (2a+b) + \cdots + (a(n-1)+b)$$
$$= (a(n+1)+b) + \cdots + (a(n+r)+b)$$ $(a,b)-$balancing numbers[7]

[6] Panda, G. K. (2007). Sequence balancing and cobalancing numbers.

[7] Kovács, T., Liptai, K.,and Olajos, P. (2010). On (a, b)-balancing numbers. Publ. Math. Debrecen, 77(3-4), 485-498.

[8] Liptai, K., Luca, F., Pintér, Á., and Szalay, L. (2009). Generalized balancing numbers. Indagationes mathematicae, 20(1), 87-100.

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k = (n+1)^k + \cdots + (n+r)^k$$ Pas de solution[6]

$$(a+b) + (2a+b) + \cdots + (a(n-1)+b)$$
$$= (a(n+1)+b) + \cdots + (a(n+r)+b)$$ $(a,b)-$balancing numbers[7]

$$1^k + 2^k + \cdots + (x-1)^k = (x+1)^l + \cdots + (y-1)^l$$
x : (k,l) power numerical center
Il y a un nombre fini de solutions pour des cas spécifiques[8]

---

[6] Panda, G. K. (2007). Sequence balancing and cobalancing numbers.

[7] Kovács, T., Liptai, K.,and Olajos, P. (2010). On (a,b)-balancing numbers. Publ. Math. Debrecen, 77(3-4), 485-498.

[8] Liptai, K., Luca, F., Pintér, Á., and Szalay, L. (2009). Generalized balancing numbers. Indagationes mathematicae, 20(1), 87-100.

Généralisations aux suites

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels,

a_m balancing number si $a_1 + \cdots + a_{m-1} = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

a_m cobalancing number si $a_1 + \cdots + a_m = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels,

a_m balancing number si $a_1 + \cdots + a_{m-1} = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

a_m cobalancing number si $a_1 + \cdots + a_m = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

Exemples

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels,

a_m balancing number si $a_1 + \cdots + a_{m-1} = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

a_m cobalancing number si $a_1 + \cdots + a_m = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

Exemples

- $a_n = 2n$, 12,70,408 avec $r = 4, 28, 168$.

Généralisations aux suites

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels,

a_m balancing number si $a_1 + \cdots + a_{m-1} = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

a_m cobalancing number si $a_1 + \cdots + a_m = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

Exemples

- $a_n = 2n$, 12,70,408 avec $r = 4, 28, 168$.
- $a_n = \frac{n}{2}$, 3, $\frac{35}{2}$, 102 avec $r = 1, 7, 42$.

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels,

a_m balancing number si $a_1 + \cdots + a_{m-1} = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

a_m cobalancing number si $a_1 + \cdots + a_m = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

Exemples

- $a_n = 2n$, 12,70,408 avec $r = 4, 28, 168$.
- $a_n = \frac{n}{2}$, 3, $\frac{35}{2}$, 102 avec $r = 1, 7, 42$.
- $a_n = F_n$, pas de balancing; un seul cobalancing $F_2 = 1$.

Généralisations aux suites

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels,

a_m balancing number si $a_1 + \cdots + a_{m-1} = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

a_m cobalancing number si $a_1 + \cdots + a_m = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

Exemples

- $a_n = 2n$, 12,70,408 avec $r = 4, 28, 168$.
- $a_n = \frac{n}{2}$, 3, $\frac{35}{2}$, 102 avec $r = 1, 7, 42$.
- $a_n = F_n$, pas de balancing; un seul cobalancing $F_2 = 1$.
- $a_n = n^k$, déja vu

Généralisations aux suites

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels,

a_m balancing number si $a_1 + \cdots + a_{m-1} = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

a_m cobalancing number si $a_1 + \cdots + a_m = a_{m+1} + \cdots + a_{m+r}$,

Exemples

- $a_n = 2n$, 12,70,408 avec $r = 4, 28, 168$.
- $a_n = \frac{n}{2}$, 3, $\frac{35}{2}$, 102 avec $r = 1, 7, 42$.
- $a_n = F_n$, pas de balancing; un seul cobalancing $F_2 = 1$.
- $a_n = n^k$, déja vu
- $a_n = B_n$, pas de balancing.

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels,

a_m balancing number si $a_1+\cdots+a_{m-1}=a_{m+1}+\cdots+a_{m+r}$,

a_m cobalancing number si $a_1+\cdots+a_{m}=a_{m+1}+\cdots+a_{m+r}$,

Exemples

- $a_n=2n$, 12,70,408 avec $r=4,28,168$.
- $a_n=\frac{n}{2}$, 3, $\frac{35}{2}$, 102 avec $r=1,7,42$.
- $a_n=F_n$, pas de balancing; un seul cobalancing $F_2=1$.
- $a_n=n^k$, déja vu
- $a_n=B_n$, pas de balancing.
- $a_n=C_n$, pas de solution.

Encore une extension; power sequence center

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels,

a_n is a $(k,l)-$power sequence center si

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_{m-1}^k = a_{m+1}^l + \cdots + a_{m+r}^l$$

[9] Behera, A., Liptai, K., Panda, G. K., and Szalay, L. (2011). Balancing with Fibonacci powers. Fibonacci Quart, 49(1), 28-33.

[10] Alvarado, S. D., Dujella, A., and Luca, F. (2012). On a Conjecture Regarding Balancing With Powers of Fibonacci Numbers. Integers, 12(6), 1127-1158.

[11] Irmak, N. (2013). Balancing with balancing powers. Miskolc Mathematical Notes, 14(3), 951-957.

Encore une extension; power sequence center

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels,

a_n is a $(k,l)-$power sequence center si

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_{m-1}^k = a_{m+1}^l + \cdots + a_{m+r}^l$$

$a_n = F_n$; unique solution[9,10], $F_1^8 + F_2^8 + F_3^8 = F_5^2 + F_6^2 + F_7^2$

[9] Behera, A., Liptai, K., Panda, G. K., and Szalay, L. (2011). Balancing with Fibonacci powers. Fibonacci Quart, 49(1), 28-33.

[10] Alvarado, S. D., Dujella, A., and Luca, F. (2012). On a Conjecture Regarding Balancing With Powers of Fibonacci Numbers. Integers, 12(6), 1127-1158.

[11] Irmak, N. (2013). Balancing with balancing powers. Miskolc Mathematical Notes, 14(3), 951-957.

Encore une extension; power sequence center

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels,

a_n is a $(k, l)-$power sequence center si

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_{m-1}^k = a_{m+1}^l + \cdots + a_{m+r}^l$$

$a_n = F_n$; unique solution[9,10], $F_1^8 + F_2^8 + F_3^8 = F_5^2 + F_6^2 + F_7^2$

$a_n = B_n$; pas de solution[11] $k \leq l$ $(r, n) > 2$ et $(k, l) = (2, 1); (3, 1); (3, 2)$.

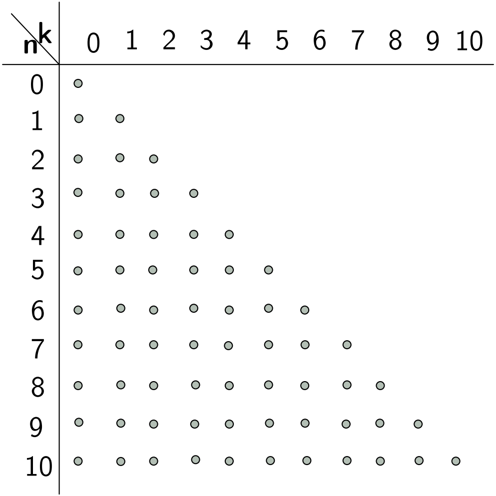
---

[9] Behera, A., Liptai, K., Panda, G. K., and Szalay, L. (2011). Balancing with Fibonacci powers. Fibonacci Quart, 49(1), 28-33.

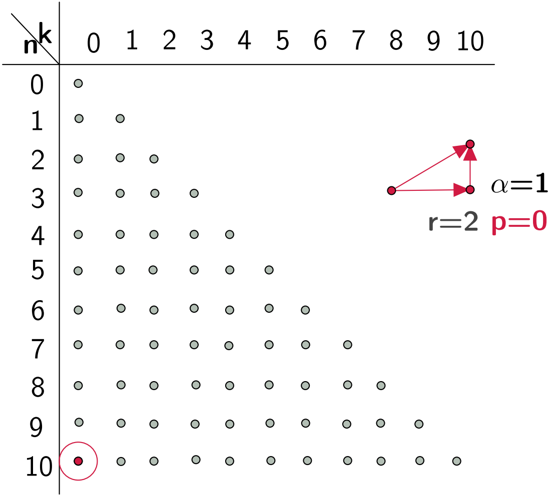
[10] Alvarado, S. D., Dujella, A., and Luca, F. (2012). On a Conjecture Regarding Balancing With Powers of Fibonacci Numbers. Integers, 12(6), 1127-1158.

[11] Irmak, N. (2013). Balancing with balancing powers. Miskolc Mathematical Notes, 14(3), 951-957.

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure

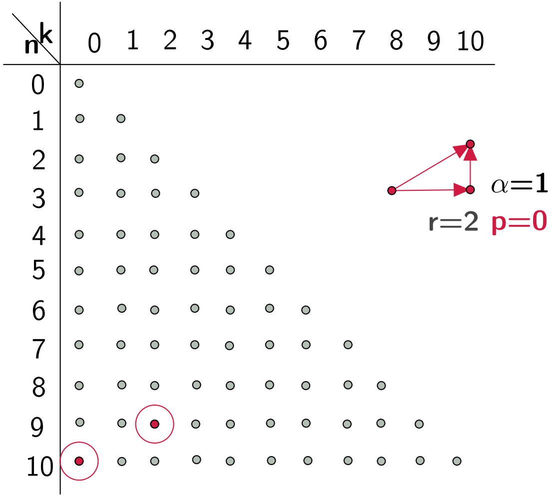


Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



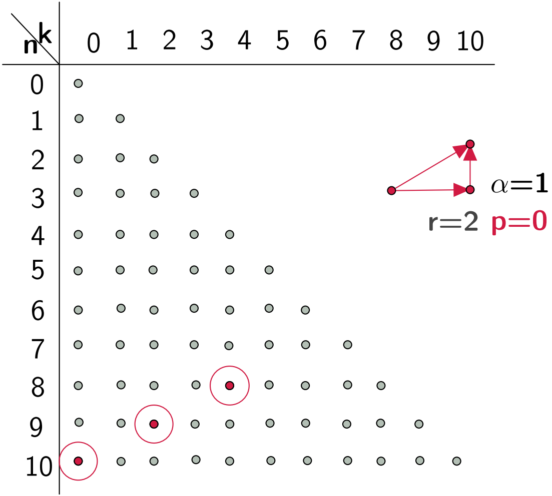
Direction (r, α)

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



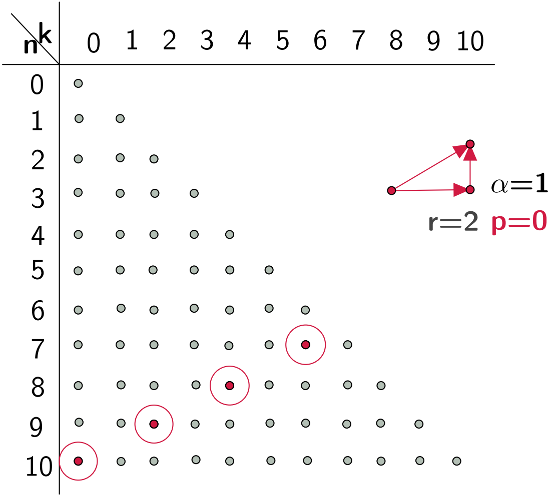
Direction (r, α)

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



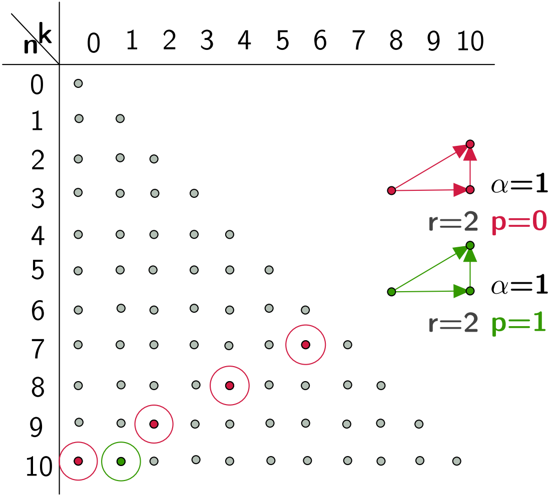
Direction (r, α)

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



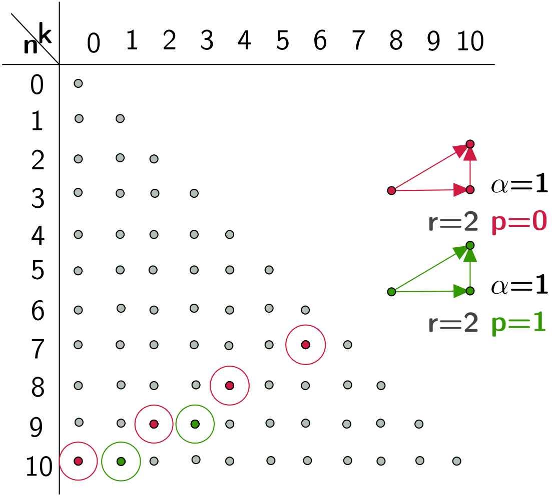
Direction (r, α)

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



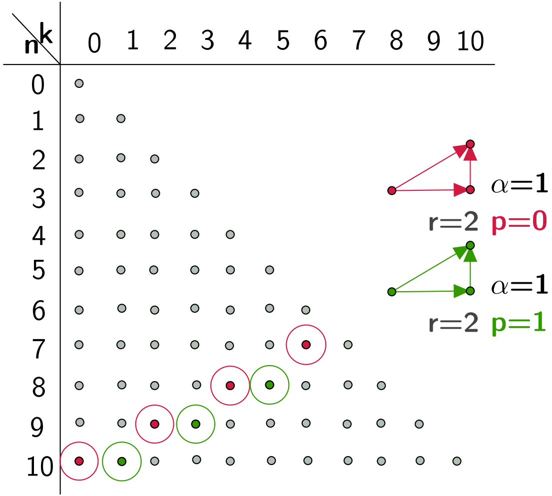
Direction (r, α)

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure

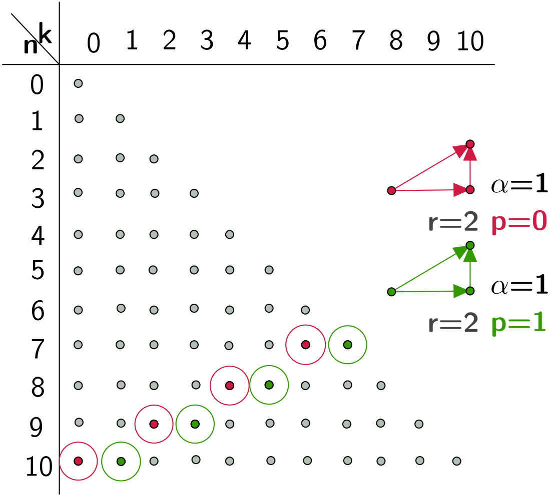


Direction (r, α)

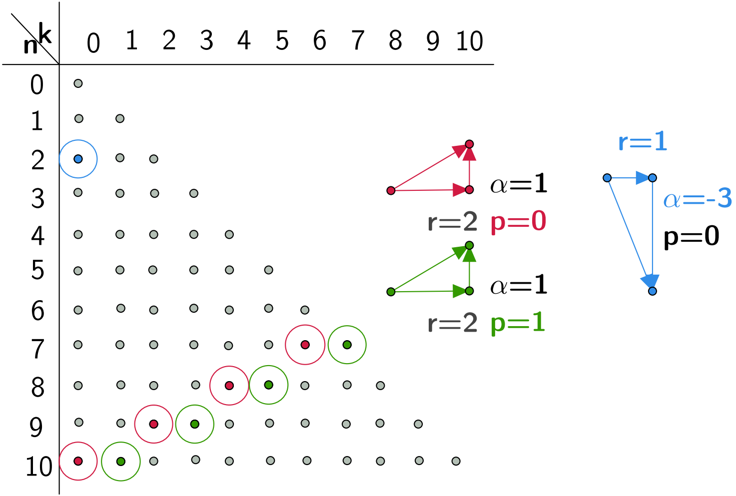
Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure

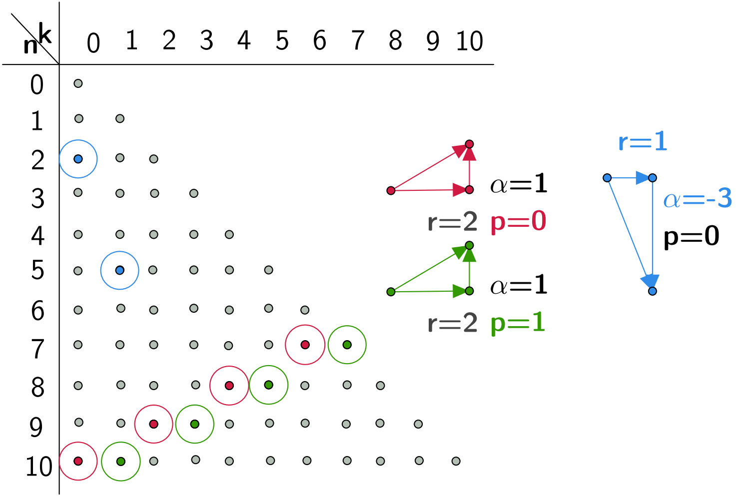


Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



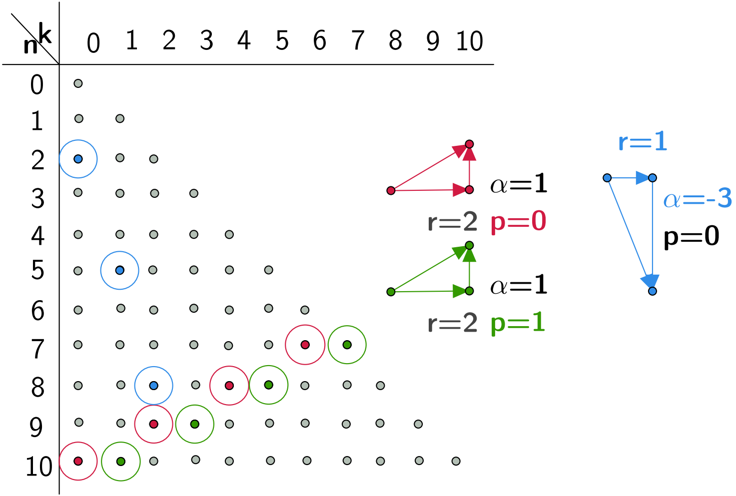
Direction (r, α)

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



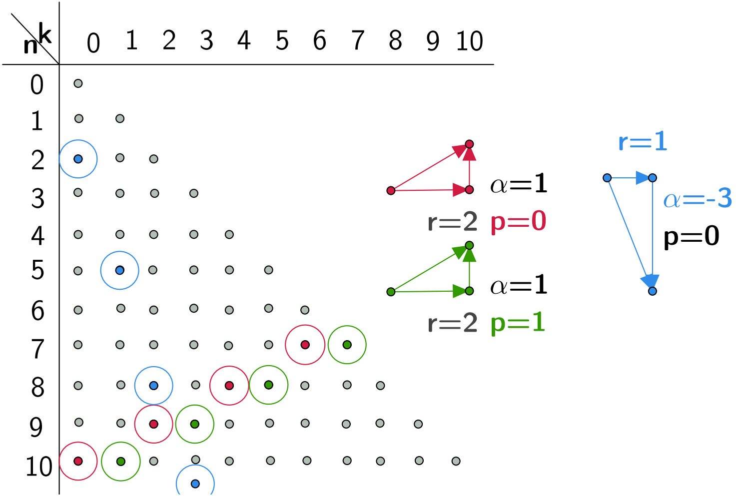
Direction (r, α)

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



Direction (r, α)

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure

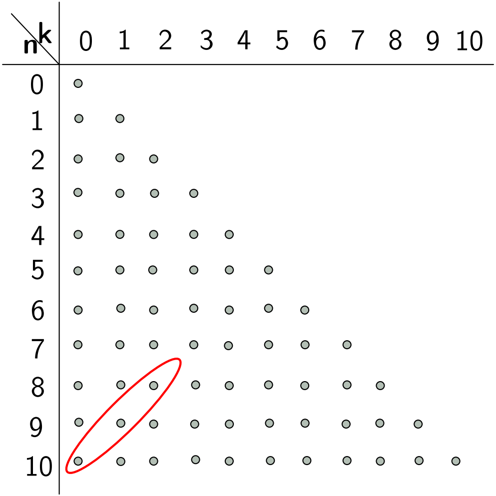


Problème équilbre

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure

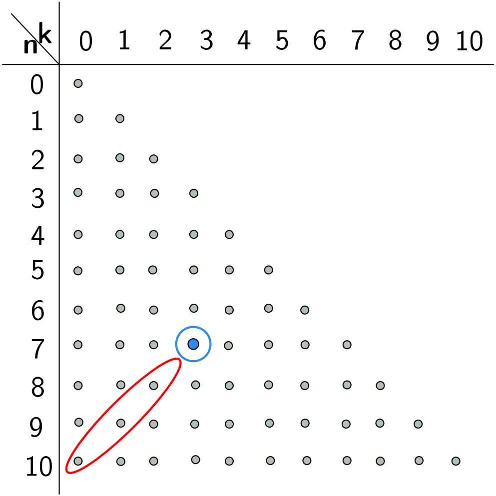
n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	∘										
1	∘	∘									
2	∘	∘	∘								
3	∘	∘	∘	∘							
4	∘	∘	∘	∘	∘						
5	∘	∘	∘	∘	∘	∘					
6	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘				
7	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘			
8	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘		
9	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	
10	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘	∘

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



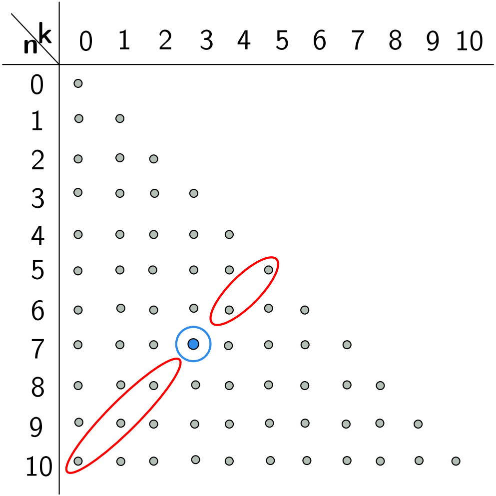
Problème équilbre

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



Problème équilbre

Soit $a(n, k)$ une matrice triangulaire inférieure



Le triangle de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

n\k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

[12] Problèmes d'équilibre et co-équilibre pour $(r, \alpha) = (1, -1)$ dans le triangle de Pascal

$$\sum_{k=0}^{x-1} \binom{n+k}{k} = \sum_{k=x+1}^{y-1} \binom{n+k}{k}; \qquad n \geq 1,$$

[12] H. Belbachir, L. Szalay. Balancing in direction $(1, -1)$ in Pascal's Triangle. Armenian Journal of mathematics 2014; 6 (1): 32–41.

[12] Problèmes d'équilibre et co-équilibre pour $(r, \alpha) = (1, -1)$ dans le triangle de Pascal

$$\sum_{k=0}^{x-1} \binom{n+k}{k} = \sum_{k=x+1}^{y-1} \binom{n+k}{k}; \qquad n \geq 1,$$

- $n = 0$, $A_n = 1$.

[12] H. Belbachir, L. Szalay. Balancing in direction $(1, -1)$ in Pascal's Triangle. Armenian Journal of mathematics 2014; 6 (1): 32–41.

[12] Problèmes d'équilibre et co-équilibre pour $(r, \alpha) = (1, -1)$ dans le triangle de Pascal

$$\sum_{k=0}^{x-1} \binom{n+k}{k} = \sum_{k=x+1}^{y-1} \binom{n+k}{k}; \qquad n \geq 1,$$

- $n = 0$, $A_n = 1$.
- $n = 1$, $A_n = i$; $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

[12] H. Belbachir, L. Szalay. Balancing in direction $(1, -1)$ in Pascal's Triangle. Armenian Journal of mathematics 2014; 6 (1): 32–41.

[12] Problèmes d'équilibre et co-équilibre pour $(r, \alpha) = (1, -1)$ dans le triangle de Pascal

$$\sum_{k=0}^{x-1} \binom{n+k}{k} = \sum_{k=x+1}^{y-1} \binom{n+k}{k}; \qquad n \geq 1,$$

- $n = 0$, $A_n = 1$.
- $n = 1$, $A_n = i$; $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$
  Les solutions sont les solutions du problème classique.

[12] H. Belbachir, L. Szalay. Balancing in direction $(1, -1)$ in Pascal's Triangle. Armenian Journal of mathematics 2014; 6 (1): 32–41.

[12] Problèmes d'équilibre et co-équilibre pour $(r, \alpha) = (1, -1)$ dans le triangle de Pascal

$$\sum_{k=0}^{x-1} \binom{n+k}{k} = \sum_{k=x+1}^{y-1} \binom{n+k}{k}; \qquad n \geq 1,$$

- $n = 0$, $A_n = 1$.
- $n = 1$, $A_n = i$; $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$
  Les solutions sont les solutions du problème classique.

Pour $n \geq 2$?

[12] H. Belbachir, L. Szalay. Balancing in direction $(1, -1)$ in Pascal's Triangle. Armenian Journal of mathematics 2014; 6 (1): 32–41.

Direction $(1, -1)$ pour $n = 2$

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Direction $(1, -1)$ pour $n = 2$

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Theorem (Belbachir et Szalay 2014)

Pour $n = 2$, il n'y a pas de nombre d'équilibre sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Pascal.

Direction $(1, -1)$ pour $n = 2$

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Theorem (Belbachir et Szalay 2014)

Pour $n = 2$, il n'y a pas de nombre d'équilibre sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Pascal.

Theorem (Belbachir et Szalay 2014)

Pour $n = 2$, le seul nombre co-équilibre sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Pascal est $\binom{4}{2}$.

Direction $(1, -1)$ pour $n = 3$

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Direction $(1, -1)$ pour $n = 3$

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Theorem (Belbachir et Szalay 2014)

Pour $n = 3$, il n'y a pas de nombre d'équilibre sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Pascal.

Direction $(1, -1)$ pour $n = 3$

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Theorem (Belbachir et Szalay 2014)

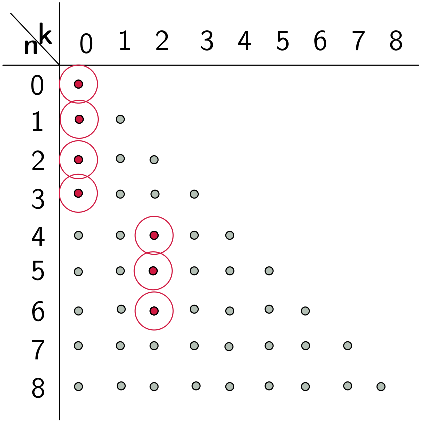
Pour $n = 3$, il n'y a pas de nombre d'équilibre sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Pascal.

Theorem (Belbachir et Szalay 2014)

Pour $n = 3$, le seul nombre co-équilibre sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Pascal est $\binom{6}{3}$,

Equilibre sur les colonnes

Equilibre sur les colonnes



$$\sum_{i=0}^{x-1} \binom{i}{k} = \sum_{j=x+1}^{y-1} \binom{j}{l}; \qquad x \geq 0,\ y \geq x+2;$$

Komatsu et Szalay [13] ont montrés,

- Pour $k+1<l$. Il n'y a pas de solution $x \geq k+l$.
- Pour $k+1=l$. Il n'y a pas de solution $y \geq x+2$.
- Si $k=1$, toutes les solutions avec $l \geq 2$ sont données par, $l=\binom{\omega}{2}-2$, $x=\omega$ et $y=\binom{\omega}{2}$.
- Si $k=2$, toutes les solutions avec $l \geq 3$ sont données par, $(l,x,y)=(13,10,6),(53,22,56),(117,36,120)$ et, $l=\binom{\omega}{3}-2$, $x=\omega$ et $y=\binom{\omega}{3}$.
- Pour $k \geq l$, $k \geq 2$. Il existe un nombre fini de solutions positifs $x \leq y-2$.
- Si $(k,l)=(2,1)$, les solutions sont $(x,y)=(11,22)$ et $(45,175)$. (MAGMA)
- Si $(k,l)=(2,2)$ et $(k,l)=(3,3)$. Le problème n'a pas de solution (Belbachir et Szalay 2014).

[13] Komatsu, T., Szalay, L. (2014). Balancing with binomial coefficients. International Journal of Number Theory, 10(07), 1729-1742.

Computational results

Un programme JAVA a été exécuté sur le serveur du CERIST dont les caractéristiques sont: Processeur $i7$ à $8coeurs$, 32gb Ram.

- Pour un triangle de 200 lignes et directions (r, α) quelconques, nous avons trouvé plus de 3700 Nombres d'équilibres.
- Pour un triangle de 1000 lignes et directions (r, α) quelconques, nous avons trouvé plus de 74450 Nombres d'équilibres.

Un exemple non trivial est dans la direction $(r, \alpha) = (4, -4)$, on trouve $B = \binom{140}{139}$ avec $n = 4$, $r = 14$ et $p = 3$.

$$\binom{4}{3} + \binom{8}{7} + \cdots + \binom{136}{135} = \binom{144}{143} + \cdots + \binom{196}{195},$$

Les résultats précédents pourraient être réduits car,
La symetrie du triangle de Pascal permet de faire le calcul sur $\alpha > 0$ seulement. Pour la même raison, le calcul peut se faire seulement pour

$\beta > 0$.

Thank You!