Modèles d'épidémie
et mathématiques du lycée

Pierre Arnoux

6 novembre 2020
Commission Internationale des IREM

Chiffres et épidémies

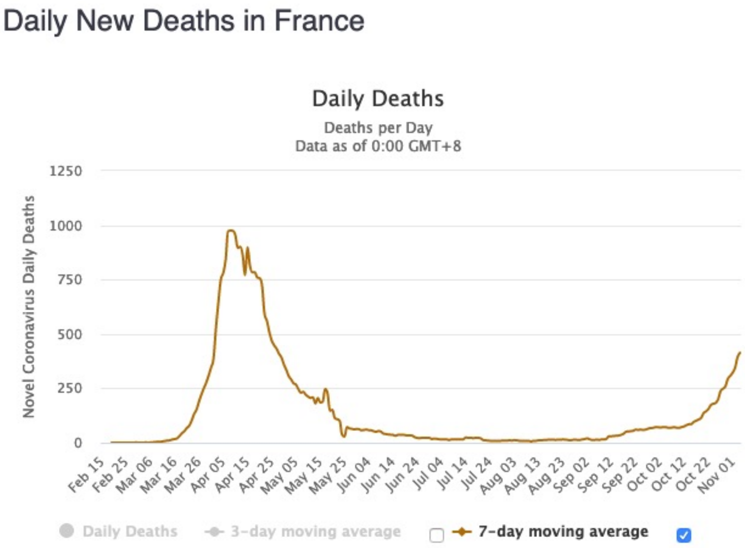
Une épidémie, c'est (aussi) une masse de chiffres, de suites, de fonctions :

- Nombre de cas
- Nombre de victimes
- Variations, graphes
- Ordres de grandeur, logarithmes
- Suites, fonctions
- croissance, dérivée, exponentielle

Chiffres et épidémies

Comment étudier ces chiffres ?
Comment les comprendre ?
Comment les prévoir (au moins un peu) ?

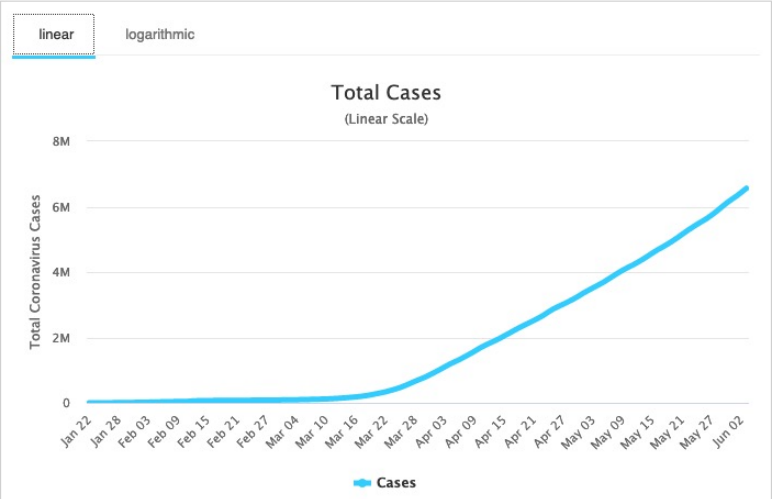
Représentation graphique



Représentation graphique : linéaire et logarithmique

Total Cases (worldwide)

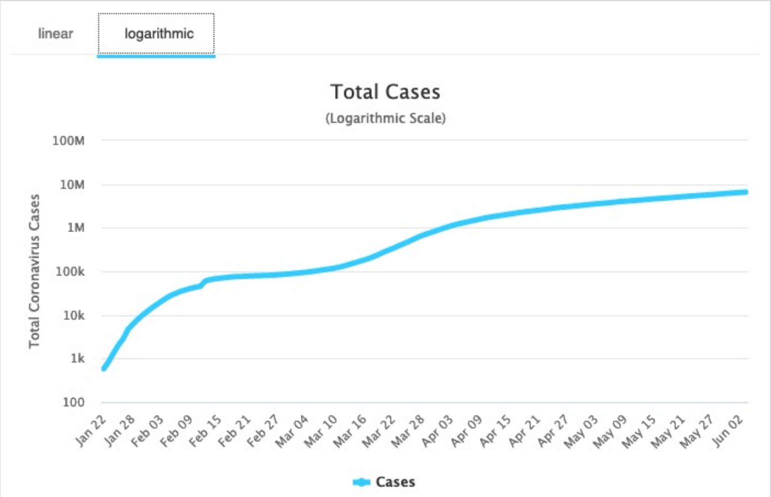
"Total Cases" = total cumulative count (6,688,922). This figure includes deaths and recovered or discharged patients (cases with an outcome).



Représentation graphique : linéaire et logarithmique

Total Cases (worldwide)

"Total Cases" = total cumulative count (6,688,922). This figure includes deaths and recovered or discharged patients (cases with an outcome).



Avertissement

- **Je ne suis pas épidémiologiste**
- but : pas faire un cours d'épidémiologie
- montrer des modèles
- et faire des mathématiques

Avertissement

- On va montrer des modèles
- Ce sont des "histoires"
- ils ne sont pas réalistes
- mais permettent de comprendre certaines choses
- on ne montrera que des modèles "déterministes"
- tous les modèles sérieux sont probabilistes
- et il faudrait aussi en faire : à vous de travailler !
- Ces modèles ont tous des défauts, et il faut les montrer !
- "*all models are wrong ; some of them are useful*"

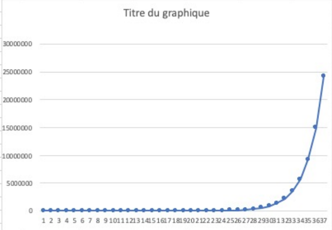
Le plus simple : le modèle linéaire

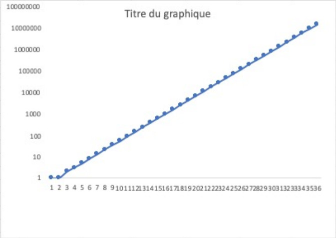
- La maladie dure deux jours
- Chaque malade contamine α personnes le premier jour
- et β personnes le second
- U_n nombre de malades depuis 1 jour au jour n
- D_n nombre de malades depuis 2 jours au jour n
- Modèle linéaire : $D_{n+1} = U_n \qquad U_{n+1} = \alpha U_n + \beta D_n$
- Condition d'épidémie ?.

Modèle linéaire : tableur

B4 f_x =B3*$D$2+C3*$E$2

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	U_n	D_n	alpha	beta	log(U_n)	U_(n+1)/Un
2	0	1	0	1	1	0	1
3	1	1	1			0	2
4	2	2	1			0,30103	1,5
5	3	3	2			0,47712125	1,66666667
6	4	5	3			0,69897	1,6
7	5	8	5			0,90308999	1,625
8	6	13	8			1,11394335	1,61538462
9	7	21	13			1,32221929	1,61904762
10	8	34	21			1,53147892	1,61764706
11	9	55	34			1,74036269	1,61818182
12	10	89	55			1,94939001	1,61797753
13	11	144	89			2,15836249	1,61805556
14	12	233	144			2,36735592	1,61802575
15	13	377	233			2,57634135	1,61803714
16	14	610	377			2,78532984	1,61803279
17	15	987	610			2,99431715	1,61803445
18	16	1597	987			3,20330492	1,61803381
19	17	2584	1597			3,41229251	1,61803406
20	18	4181	2584			3,62128017	1,61803396
21	19	6765	4181			3,8302678	1,618034
22	20	10946	6765			4,03925544	1,61803399
23	21	17711	10946			4,24824308	1,61803399
24	22	28657	17711			4,45723072	1,61803399
25	23	46368	28657			4,66621836	1,61803399
26	24	75025	46368			4,875206	1,61803399
27	25	121393	75025			5,08419364	1,61803399
28	26	196418	121393			5,29318128	1,61803399
29	27	317811	196418			5,50216892	
30	28	514229	317811			5,71115657	
31	29	832040	514229			5,92014421	
32	30	1346269	832040			6,12913185	
33	31	2178309	1346269			6,33811949	
34	32	3524578	2178309			6,54710713	
35	33	5702887	3524578			6,75609477	
36	34	9227465	5702887			6,96508241	
37	35	14930352	9227465			7,17407005	
38	36	24157817	14930352			7,38305769	





Feuil1

Prêt

Le plus simple : prolongements

- On peut allonger la durée de contamination
- L'équation de récurrence est d'ordre supérieur à 2
- On a une matrice compagnon
- Plein de mathématiques...

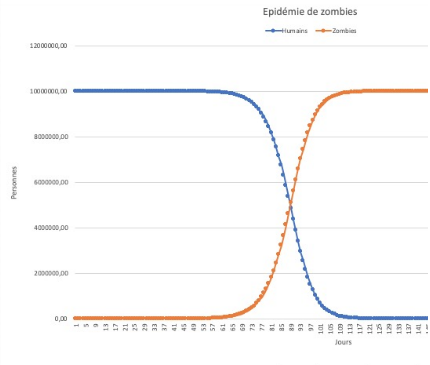
Le plus joueur : Modèle des Zombies (ou modèle logistique)

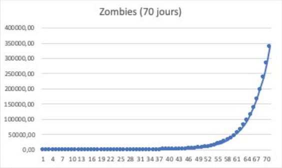
- Les malades ne guérissent jamais
- Chaque jour, le nombre de nouveaux zombies est proportionnel :
- au nombre de zombies existants I_n
- au nombre de personnes saines restantes S_n
- $I_{n+1} = I_n + \alpha S_n I_n$
- $S_{n+1} = S_n - \alpha S_n I_n$
- attention si α est trop grand !

Modèle logistique : tableur

C4 =C3+$E$2*C3*B3/$D$2

	A	B	C	D	E	F
1	n	S_n	I_n	N=population	alpha	I_{n+1}/I_n
2	0	9999999,00	1,00	10000000	0,2	1,200
3	1	9999998,80	1,20			1,200
4	2	9999998,56	1,44			1,200
5	3	9999998,27	1,73			1,200
6	4	9999997,93	2,07			1,200
7	5	9999997,51	2,49			1,200
8	6	9999997,01	2,99			1,200
9	7	9999996,42	3,58			1,200
10	8	9999995,70	4,30			1,200
11	9	9999994,84	5,16			1,200
12	10	9999993,81	6,19			1,200
13	11	9999992,57	7,43			1,200
14	12	9999991,08	8,92			1,200
15	13	9999989,30	10,70			1,200
16	14	9999987,16	12,84			1,200
17	15	9999984,59	15,41			1,200
18	16	9999981,51	18,49			1,200
19	17	9999977,81	22,19			1,200
20	18	9999973,38	26,62			1,200
21	19	9999968,05	31,95			1,200
22	20	9999961,66	38,34			1,200
23	21	9999954,00	46,00			1,200
24	22	9999944,79	55,21			1,200
25	23	9999933,75	66,25			1,200
26	24	9999920,50	79,50			1,200
27	25	9999904,60	95,40			1,200
28	26	9999885,53	114,47			1,200
29	27	9999862,63	137,37			1,200
30	28	9999835,16	164,84			1,200
31	29	9999802,19	197,81			1,200
32	30	9999762,63	237,37			1,200
33	31	9999715,16	284,84			1,200
34	32	9999658,19	341,81			1,200
35	33	9999589,83	410,17			1,200
36	34	9999507,80	492,20			1,200
37	35	9999409,36	590,64			1,200
38	36	9999291,24	708,76			1,200
39	37	9999149,50	850,50			1,200
40	38	9998979,41	1020,59			1,200
41	39	9998775,32	1224,68			1,200
42	40	9998530,41	1469,59			1,200
43	41	9998236,53	1763,47			1,200
44	42	9997883,90	2116,10			1,200
45	43	9997460,77	2539,23			1,200
46	44	9996953,06	3046,94			1,200
47	45	9996343,85	3656,15			1,200
48	46	9995612,89	4387,11			1,200
49	47	9994735,85	5264,15			1,200

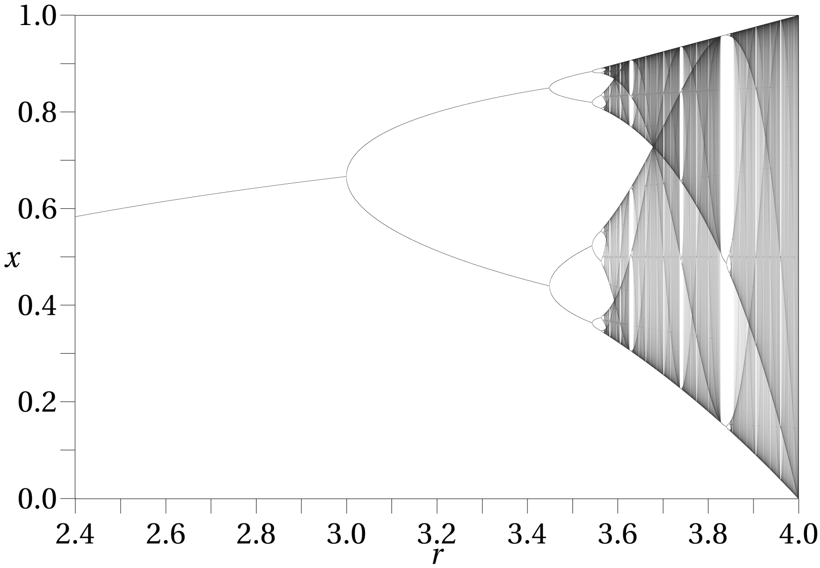




Modèle logistique : prolongement

- Il n'y a en réalité qu'une variable, car $S_n + I_n$ est constant
- On peut raisonner en pourcentage, de sorte que $S_n + I_n = 1$
- L'équation devient
- $I_{n+1} = I_n + \alpha I_n(1 - I_n)$
- On itère la fonction $f(x) = x(1 + \alpha - \alpha x)$
- c'est exactement la même fonction que pour la croissance logistique
- pousser α au-delà de 1 donne des phénomènes intéressants

Modèle logistique : bifurcation



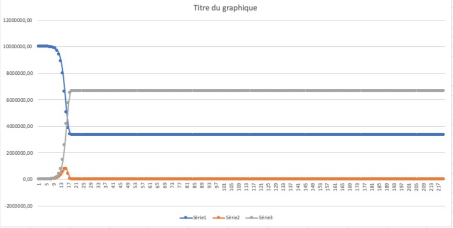
Modèle SIR

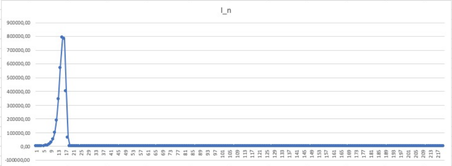
- trois *compartiments*
- Personnes Susceptibles S_n
- Personnes Infectées I_n (malades, guérissent chaque jour en proportion γ)
- Personnes "Retirées" R_n (mortes ou guéries et immunisées)
- $S_{n+1} = S_n - \alpha I_n S_n$
- $I_{n+1} = I_n + \alpha I_n S_n - \gamma I_n$
- $R_{n+1} = R_n + \gamma I_n$
- Pic épidémique, puis extinction

Modèle SIR : tableur

C3 =C2+$F$2*C2*B2/$E$2-$G$2*C2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	S_n	I_n	R_n	N=population	alpha	gamma	I_{n+1}/I_n
2	0	9999900,00	100,00	0,00	10000000	3	2,00	2,000
3	1	9999600,00	200,00	200,00				2,000
4	2	9999000,04	399,97	599,99				2,000
5	3	9997800,25	799,82	1399,93				1,999
6	4	9995401,31	1599,11	2999,57				1,999
7	5	9990606,18	3196,02	6197,80				1,997
8	6	9981027,14	6383,03	12589,83				1,994
9	7	9961914,38	12729,73	25355,89				1,989
10	8	9923870,64	25314,01	50815,35				1,977
11	9	9848506,75	50049,88	101443,37				1,955
12	10	9700631,78	97825,09	201543,13				1,910
13	11	9415942,22	186864,47	397193,31				1,825
14	12	8888090,72	340987,04	770922,25				1,666
15	13	7978873,59	568230,08	1452896,32				1,394
16	14	6618722,79	791920,72	2589356,49				0,986
17	15	5046271,68	780530,39	4173197,92				0,514
18	16	3864641,16	401100,13	5734258,71				0,159
19	17	3399608,73	63932,29	6536458,98				0,020
20	18	3334405,30	1271,14	6664323,56				0,000
21	19	3333133,75	0,41	6666865,84				0,000
22	20	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
23	21	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
24	22	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
25	23	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
26	24	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
27	25	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
28	26	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
29	27	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
30	28	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
31	29	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
32	30	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
33	31	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
34	32	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
35	33	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
36	34	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
37	35	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
38	36	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
39	37	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
40	38	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000
41	39	3333133,34	0,00	6666866,66				0,000





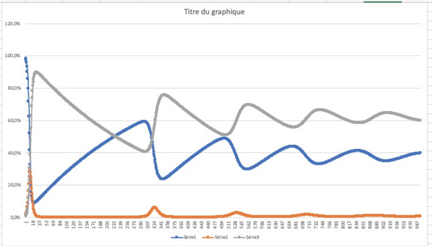
Modèle SIRS

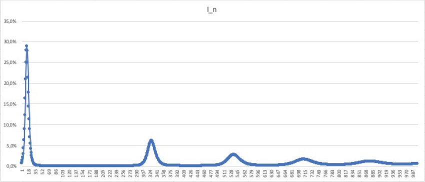
- On ajoute la perte d'immunité avec un facteur δ
- $S_{n+1} = S_n - \alpha I_n S_n + \delta R_n$
- $I_{n+1} = I_n + \alpha I_n S_n - \gamma I_n$
- $R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \delta R_n$
- Il apparaît une deuxième vague
- Puis une situation endémique (que l'on peut calculer)

Modèle SIRS : tableur

T66

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	S_n	I_n	R_n	N=population	alpha	gamma	delta	I_{n+1}/I_n
2	0	99,4%	0,6%	0,0%	1	0,8	0,30	0,0030	1,495
3	1	98,9%	0,9%	0,2%					1,491
4	2	98,2%	1,3%	0,4%					1,486
5	3	97,2%	2,0%	0,8%					1,477
6	4	95,6%	2,9%	1,4%					1,465
7	5	93,4%	4,3%	2,3%					1,447
8	6	90,2%	6,2%	3,6%					1,421
9	7	85,7%	8,8%	5,5%					1,386
10	8	79,6%	12,3%	8,1%					1,337
11	9	71,9%	16,4%	11,8%					1,275
12	10	62,5%	20,9%	16,6%					1,200
13	11	52,1%	25,1%	22,9%					1,117
14	12	41,7%	28,0%	30,3%					1,034
15	13	32,4%	28,9%	38,6%					0,960
16	14	25,1%	27,8%	47,2%					0,900
17	15	19,6%	25,0%	55,4%					0,857
18	16	15,9%	21,4%	62,7%					0,827
19	17	13,3%	17,7%	68,9%					0,807
20	18	11,7%	14,3%	74,1%					0,793
21	19	10,5%	11,3%	78,1%					0,784
22	20	9,8%	8,9%	81,3%					0,779
23	21	9,4%	6,9%	83,7%					0,775
24	22	9,1%	5,4%	85,5%					0,773
25	23	9,0%	4,1%	86,9%					0,772
26	24	8,9%	3,2%	87,9%					0,771
27	25	9,0%	2,5%	88,6%					0,772
28	26	9,1%	1,9%	89,0%					0,772
29	27	9,2%	1,5%	89,3%					0,773
30	28	9,3%	1,1%	89,5%					0,775
31	29	9,5%	0,9%	89,6%					0,776
32	30	9,7%	0,7%	89,6%					0,778
33	31	9,9%	0,5%	89,5%					0,780
34	32	10,2%	0,4%	89,4%					0,781
35	33	10,4%	0,3%	89,3%					0,783
36	34	10,6%	0,3%	89,1%					0,785
37	35	10,9%	0,2%	88,9%					0,787
38	36	11,1%	0,2%	88,7%					0,789
39	37	11,4%	0,1%	88,5%					0,791
40	38	11,6%	0,1%	88,3%					0,793
41	39	11,9%	0,1%	88,0%					0,795
42	40	12,2%	0,1%	87,8%					0,797
43	41	12,4%	0,0%	87,5%					0,799
44	42	12,7%	0,0%	87,3%					0,801
45	43	12,9%	0,0%	87,0%					0,803
46	44	13,2%	0,0%	86,8%					0,805
47	45	13,4%	0,0%	86,5%					0,808

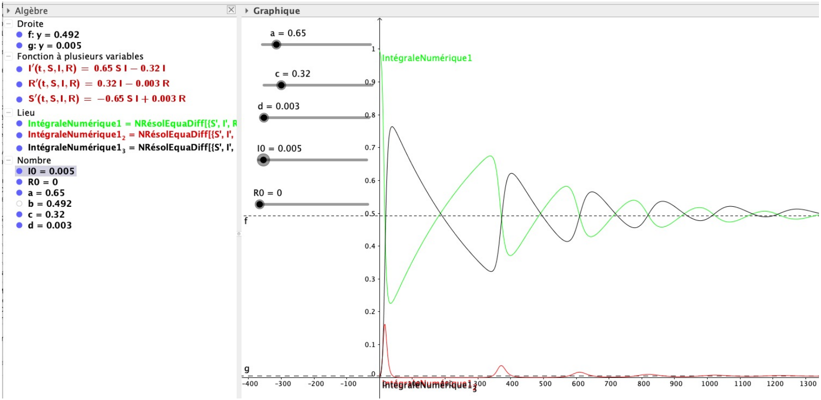




Modèles différentiels

- Considérer des fonctions
- plutôt que des suites
- La variation se transforme en dérivée
- équations différentielles
- calculables numériquement sur Geogebra

Modèle SIRS : Geogebra



Modèles probabilistes

- On doit pouvoir faire des modèles probabilistes élémentaires
- Chaque rencontre Infecté/susceptible donne une contamination avec probabilité p
- Peut-on le faire au niveau du lycée ou du collège ?
- On retrouverait les résultats des modèles SIR
- Avec des complications...

Dans la vraie vie

- bien plus compliqué ! ! !
- On ne connait pas les paramètres
- Il y a plus de compartiments (âge, maladies, comportement social...)
- Les paramètres changent tout le temps (confinement, télé-travail...)
- Mais les modèles permettent de comprendre un peu certains facteurs.
- Attention ! on est encore au début de la première vague (moins de 10% de gens atteints).