Le Théorème de Thalès : comment est-il enseigné en Europe ?

Hélène DERUAZ et Nicole KOGEJ
Cité scolaire internationale de Lyon

Le groupe «Europe» travaille à l'IREM de Lyon et réunit des collègues enseignant pour la plupart, en collège ou lycée internationaux.Nous accueillons de nombreux élèves étrangers, en particulier européens, c'est pourquoi nous nous intéressons à l'étude comparée de l'enseignement des mathématiques dans différents pays.

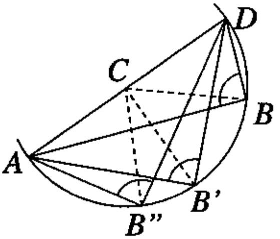
Le cas du théorème de Thalès montre une diversité assez grande dans les approches, les énoncés et les types d'exercices, et peut expliquer certaines difficultés d'adaptation spécifiques rencontrées par nos élèves étrangers.

L'analyse qui suit concerne quatre pays d'Europe (ALLEMAGNE, GRANDE-BRETAGNE, ITALIE et ESPAGNE), et a été menée à partir de manuels de mathématiques, mais aussi enrichie par des commentaires ou des réflexions de certains de nos élèves.

Nous avons choisi d'y faire figurer des énoncés d'exercices, qui nous ont paru assez représentatifs des exercices proposés dans ces manuels, ou qui sont peut-être moins posés en France sous cette forme, ce qui peut nous permettre de faire évoluer nos «stocks» d'exercices traditionnels.

En annexe, un extrait du *«Lexique de Mathématiques»* de Nicole KOGEJ, regroupant le vocabulaire relatif à ce chapitre . (Ce lexique est publié chez ALEAS EDITEUR 15, quai Lassagne 69001 LYON).

1) EN ALLEMAGNE :



Le « théorème de Thalès » existe, mais c'est un tout autre théorème qu'en France ! Il s'agit du théorème sur les triangles rectangles dont l'hypoténuse est diamètre d'un cercle :

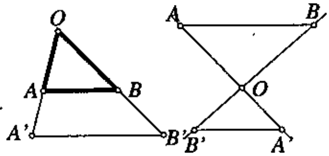
« Jeder Winkel im Halbkreis ist ein Rechter ».

Ce qui correspond à notre "théorème de Thalès" se nomme en allemand *« die Strahlensâtze »* (« théorème des faisceaux de droites concourantes »). Il est étudié en neuvième année (équivalent de notre Troisième), préparé par le théorème des milieux dans un triangle, et par des exercices de partage de segments en *n* parties égales.

S1 Wird ein Geradenbüschel von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Längen der Abschnitte auf einer Gerade wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf irgend einer andern (fig. 32. 4 und 5).

$\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'}$; $\overline{OA} : \overline{AA'} = \overline{OB} : \overline{BB'}$

S1 gilt auch, wenn man *Geraden* durch *Strahlen* ersetzt.



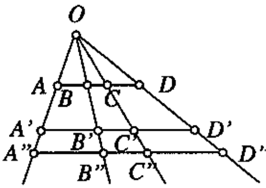
32.4 32.5

S1 Si un faisceau de droites concourantes est coupé par deux parallèles, alors le rapport des longueurs des segments formés sur l'une des droites est égal au rapport des longueurs des segments correspondants sur n'importe quelle autre droite du faisceau. : $\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'}$; $\overline{OA} : \overline{AA'} = \overline{OB} : \overline{BB'}$

(remarque : $\overline{OA}$ désigne la *longueur* du segment [*OA*]).

S1 s'applique aussi en remplaçant « droites concourantes » par « demi-droites de même origine »

S2 (deuxième théorème) : énoncé analogue, mais concernant les segments parallèles [AB] et [A'B'] : $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'}$



S3 (troisième théorème) : variante avec plus de deux droites ou demi-droites concourantes en O :

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$

La réciproque est indiquée, avec une mise en garde sur les hypothèses nécessaires à bien vérifier.

Dans les manuels de mathématiques, des démonstrations sont proposées pour les théorèmes cités ; mais j'ignore si, en classe, les professeurs les expliquent.

Sont ensuite développées de très nombreuses applications : théorème dans l'espace, partage de segments et divisions harmoniques, utilisations du théorème en technologie et pour diverses mesures concrètes (compas d'agrandissement/réduction, pantographe, échelles de cartes, etc...), forme *vectorielle* du théorème, et enfin l'étude des composées d'homothéties, et du groupe des homothéties/translations ; cependant les manuels semblent beaucoup plus ambitieux que ne peuvent l'être les professeurs allemands avec trois heures par semaine ...!

Exercices :

1- Déterminer x par le calcul, et faire une figure correspondante, pour chacune des équations :

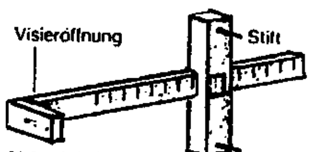
a) $3 : x = 5 : 7$ b) $x : 4 = 5 : 6$ c) $5{,}5 : 4 = x : 2,6$

2- On donne trois segments de longueurs a, b, et c. Construire un segment de longueur :

a) $x = \frac{ab}{c}$ b) $y = \frac{a^2}{b}$ c) $z = \frac{a^2 + b^2}{c}$

3- Un petit pois de 6 mm de diamètre cache complètement la pleine lune, lorsqu'on le tient à 66 cm des yeux. Quel est le rapport entre le rayon de la Lune et celui de la Terre, sachant que la distance entre la Terre et la Lune vaut 60 fois le rayon terrestre ?

4- Un vieil instrument, le *bâton de Jacob* (voir figure), était utilisé au Moyen-ge pour mesurer des hauteurs et des distances. Fabriquer un modèle, et expliquer son utilisation. Donner des exemples de mesures et de calculs.



39.2. Jakobstab

5- Montrer *vectoriellement* que dans un parallélogramme $ABCD$, si le point E partage le côté $[AB]$ de longueur 1 dans un rapport k:1 (k est un réel positif), alors (DE) partage la diagonale $[AC]$ dans le rapport $(k + 1)$:1.

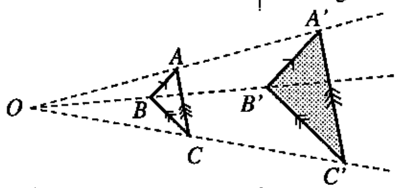
Les élèves allemands, une fois surmontée la difficulté du changement de nom du théorème en France (Thalès/Strahlensatz), s'adaptent assez facilement aux types d'exigences de l'enseignement français (en particulier la distinction entre le théorème direct et le théorème réciproque) ; cependant, ils ne semblent pas habitués à rédiger autant que nous les démonstrations.

2) EN GRANDE - BRETAGNE :

L'expression "Théorème de Thalès" est inconnue des élèves anglais, pendant tout le "tronc commun" d'enseignement qui conduit au diplôme *G.C.S.E.(General Curriculum of Secondary Education*, présenté vers l'âge de quinze ans, à un niveau équivalent à notre fin de Seconde en France).

On étudie par contre les notions d'homothétie ("enlargement"), et celles detriangles et de figures semblabes.

Enlargement is a *transformation*, i.e. a change. In an enlargement the size of the object usually changes and the scale factor of the enlargement describes the size of the enlargement. So the object and its image are similar. Matching angles in the object and image are equal, corresponding lengths are in proportion. For example, in this diagram triangle ABC (the object) has been enlarged to triangle A'B'C' (the image) by the *spider* or *ray method*. It uses a centre of enlargement O and scale factor $k > 1$. Matching lengths have been changed in the	**Une homothétie** est une transformation, c'est-à-dire un changement. Dans une homothétie,la dimension de l'objet change, en général, et le rapport d'homothétie décrit la dimension du changement. La forme de l'objet est toujours conservée dans une homothétie. Ainsi l'objet et son image sont semblables. Les angles correspondants sur l'objet et sur l'image sont égaux, les longueurs correspondantes sont proportionnelles. Par exemple, sur cette figure, le triangle ABC (l'objet) a été agrandi en un triangle A'B'C' par la méthode *de l'araignée ou des rayons*. Le centre d'homothétie est O, et le rapport k>1. Les longueurs ont toutes été multipliées



same way, i.e. by the scale factor k. Lengths from centre / Lengths on shape OA' = kOA A'B' = kAB OB' = kOB B'C' = kBC OC' = kOC C'A' = kCA Since $k > 1$, all the *image lengths* are greater than the matching *object lengths*. Matching sides of the image and object are parallel. A'B' is parallel to AB, B'C' is parallel to BC, C'A' is parallel to CA.	par le même facteur k. Longueurs depuis le centre / sur les figures OA' = k OA A'B' = k AB OB' = k OB B'C' = k BC OC' = k OC C'A' = k CA Comme k>1, toutes les longueurs images sont plus grandes que les longueurs de l'objet. Les côtés correspondants de l'image et de l'objet sont parallèles.

Sont examinés successivement les cas où le rapport k est entier positif, puis une fraction entre 0 et 1, puis négatif. On apprend à déterminer le centre d'homothétie connaissant 2 points et leurs images, ainsi que le rapport entre les aires et les volumes pour des figures homothétiques de l'espace.

L'étude des "triangles semblables" constitue ensuite un cas particulier important: «Lorsqu'une droite parallèle à l'un des côtés coupe un triangle, alors un triangle semblable apparaît. On peut le vérifier sans connaître les mesures des côtés des triangles (...) en utilisant les propriétés des angles» Les trois cas de similitude des triangles sont énumérés.

Aucune allusion n'est faite à la notion de projection, et la réciproque permettant de montrer que deux droites sont parallèles n'est pas mentionnée. Signalons aussi que le «théorème des milieux» dans un triangle n'a pas de statut spécial, il n'est pas cité comme cas particulier.

Les exercices proposés, du moins jusqu'au niveau de l'examen *National G.C.S.E.*, sont essentiellement pratiques et concrets: reconnaissance de figures semblables, sans réelle démonstration), et calculs de longueurs, aires ou volumes. Ce chapitre n'occupe pas une place très importante dans les programmes, et ne dépasse pas 5% des questions d'examen.

Exercices :

1- Exercice d'examen (*G.C.S.E.*, juin 1993)

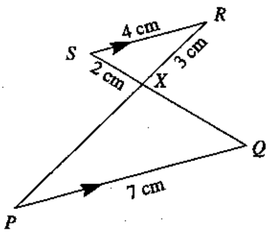
In the diagram, *SR* is parallel to *PQ*.

SR = 4 cm, *SX* = 2 cm, *RX* = 3 cm and *PQ* = 7 cm.

(i) Explain why the triangles *RSX* and *PQX* are similar.

(ii) Calculate the length of *PX* and the length of *QX*.

(iii) It is also given that the area *RSX* is 2.90 cm^2.
Calculate the area of triangle *PQX*
correct to two significate figures.



2- Reconnaître des triangles semblables parmi une série de figures (dessinées sans respecter les dimensions ni l'échelle), où l'on indique les 3 côtés, ou 2 angles, ou 2 côtés et 1 angle.

3- Deux figures homothétiques étant données, trouver le centre et/ou le rapport d'homothétie.

4- Deux cylindres C et D sont semblables, et de hauteurs 8 cm et 32 cm respectivement.Le volume de C est 73,5 cm 3. Quel est le vo-lume de D ?

5- Placer les points A(1,4), B(1,1), et C(3,1) ; puis compléter cette multiplication de matrices :

$$4 \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

Placer les 3 nouveaux points obtenus A' , B' , C' . Que dire du triangle A' B' C' ?

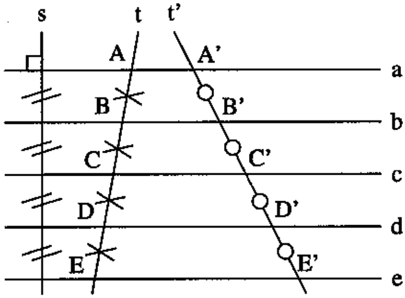
Les élèves anglaix que nous accueillons dans notre établissement sont très surpris devant nos demandes de démonstrations rédigées, et devant nos distinctions entre théorème direct et réciproque.

Le premier contact avec "l'environnement Thalès" se fait au niveau de notre cinquième française.

3) EN ITALIE :

Il teorema di Talete : I segmenti staccati da un fascio di rette parallele su due trasversali sono direttamente proporzionali.

Le lette *a, b, c, d, e* sono tra loro parallele ed equidistanti
$AC = 2AB$ cosi come pure $A'C' = 2A'B'$;
$AE = 4AB$ cosi come pure $A'E' = 4A'B'$
$AD = \frac{3}{2}\ AC$ cosi come pure $AD' = \frac{3}{2}\ AC'$
Le relazioni precedentemente scritte possono venir poste solto la forme di proporzioni :
$AC : AB = A'C' : A'B'$, $AE : AB = A'E' : A'B'$,
$AD : AC = A'D' : A'C'$, ecc



Le théorème de Thalès : Les segments déterminés par un réseau de droites parallèles sur deux sécantes à ces droites sont directement proportionnels.

Même si le mot projection n'est pas prononcé, c'est bien l'idée de : «la projection d'une échelle régulière est une échelle régulière» qui l'introduit (avec ses corollaires : «notre réciproque du théorème des milieux», suivi de «notre théorème des milieux» - seul le mot corollaire est employé -).

L'application au triangle se fait alors aussitôt après le théorème de Thalès énoncé ci-dessus, *mais sans évoquer de réciproque.*

Suivent les triangles semblables et les cas de similitude :

1- deux angles respectivement égaux
2- deux angles égaux compris entre deux côtés respectivement proportionnels
3- les trois côtés respectivement proportionnels.

Les professeurs semblent avoir assez de latitude sur le temps à y consacrer.

Exercices :

1- Démontrer que dans un triangle quelconque les milieux des trois côtés et le pied de l'une des trois hauteurs sont les sommets d'un trapèze isocèle .

2- Soient P, Q et R les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et[CA] d'un triangle quelconque Montrer que les points C et P sont équidistants de la droite (QR) .

3- Montrer que deux des quatre triangles obtenus à l'intérieur d'un trapèze, après le tracé de ses diagonales, sont semblables .

4- Démontrer que le point d'intersection P des diagonales d'un trapèze est situé au milieu du segment passant par P, parallèle aux bases et dont les extrémités sont sur les côtés non parallèles du trapèze .

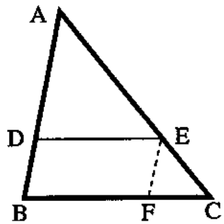
5- Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D et de grande base [AB]. Soit E le point de [AB] tel que AE = DC, soit M le milieu de [BC]. Montrer que les triangles AMD et EMB sont isocèles.(*)

4) EN ESPAGNE :

La première rencontre avec "l'environnement Thalès" se fait à treize ans : "proportionnalité géométrique et son rapport avec la mesure". Les professeurs y consacrent quatre semaines.

Enoncé 1

Teorema de Tales :



— *Toda recta paralela a un lado de un triángulo de un triangulo* **determina otro triángulo semejante al opuesto.**

Hypothesis : DE ∥ BC (fig. 158)

Tesis : $\begin{cases} \widehat{D}=\widehat{B}\ ;\ \widehat{E}=\widehat{C} \\ \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC} \end{cases}$

Demostracion :

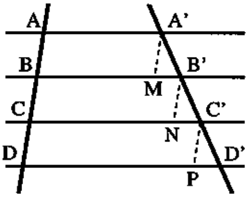
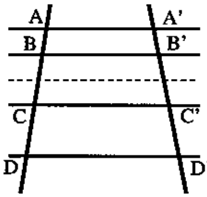
Théorème de Thalès :

Toute droite parallèle à un côté d'un triangle détermine un autre triangle semblable à celui-ci .

(*) référence de ce travail :
PERCORSI DI MATEMATICA-ALGEBRA-GEOMETRIA-INFORMATICA
par L.Tonolini et M.Certo chez Minerva Italica tome 1

Enoncé 2

Teorema de Tales :

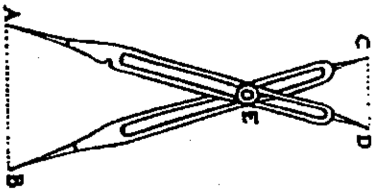
I - Si dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas de forma tal que determinan en un una de ellas segmentos iguales, los segmentos determinados en la otra son también iguales.	
II - Si cortamos dos rectas cualesquiera, por varias rectas paralelas, los segmentos correspondientes determinados en ambias, son proporcionales.	

Théorème de Thalès :

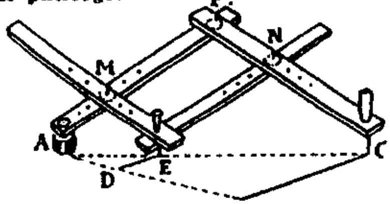
I- Si deux droites quelconques sont coupées par plusieurs droites parallèles de telle sorte qu'elles déterminent sur l'une d'elles des segments de même mesure alors les segments homologues sur l'autre sont aussi égaux.
II- Si deux droites quelconques sont coupées par plusieurs droites parallèles, les segments correspondants déterminés sur chacune d'elles sont proportionnels.

Là aussi, bien que le mot ne soit pas explicitement prononcé, la projection est présente :

- dans le cas du *premier énoncé,* un travail important sur la notion de segments proportionnels et sur les propriétés des proportions fait suite à: «notre: la projection d'une échelle régulière est une échelle régulière» pour en arriver «à la projection d'une échelle non régulière». Le triangle apparaît alors comme un cas particulier. La réciproque est citée et évoquée comme un nouvel outil pour démontrer que deux droites sont parallèles .(«Notre théorème des milieux» est présenté comme un simple exemple du cas particulier triangle cité plus haut). Viennent alors les triangles semblables, l'énoncé du théorème de Thalès et les cas de similitude des triangles (les mêmes que pour l'Italie !) Les triangles semblables conduisent alors à démontrer le théorème suivant et sa réciproque: «si un faisceau de droites concourantes coupe deux droites parallèles alors il détermine sur elles des segments proportionnels». Dans les applications, le compas de réduction et le pantographe sont cités.



El pantógrafo



- dans le cas du *deuxième énoncé*, le théorème est le point de départ, puis sont évoqués les partages de segments en parties égales puis en parties proportionnelles «Notre énoncé du théorème de Thalès, façon 3° », apparaît alors, après les cas de similitude des triangles, *mais sans évoquer de réciproque*.

Exercices :

1- Calculer la mesure des côtés du petit triangle formé en prolongeant les deux côtés non parallèles d'un trapèze dont les bases mesurent b et b' et les côtés non parallèles m et n.

2- Un point C situé entre A et B divise le segment $[AB]$ de 45 cm dans le rapport $CA/BC = 2/3$ calculer CA et BC et la distance de C au milieu O de $[AB]$.

3- M est un point de la droite (AB) mais extérieur au segment $[AB]$ et tel que $MA/MB = 9/5$,sa distance à O, milieu de $[AB]$, est 35 cm. Trouver AB, MB et MA.

4- Dans un losange $ABCD$ tracer une parallèle à la diagonale $[AC]$ qui coupe (AB) en E et (BC) en F. Par ces points tracer les parallèles à (BD); celles-ci coupent (AD) en H et (CD) en G. Démontrer que $AH \times CD = AD \times CG$.

5- Démontrer que les droites menées parallèlement aux côtés d'un triangle à partir du point d'intersection de ses médianes divise chaque côté en trois parties égales.

Page suivante :
Extrait du *«Lexique de Mathématiques»* de Nicole KOGEJ
ALEAS Editeur - 15, quai Lassagne - 69001 LYON →

Français	Anglais	Allemand	Espagnol	Italien
angles alternes-internes	interior alternate angles	Wechselwinkel (m)	ángulos alternos internos	angoli interni alterni
angles correspondants	corresponding angles	Stufenwinkle (m)	ángulos correspondientes	angoli corrispondenti
cas de similitude des triangles	Rules for two triangles to be similar	Ähnlichkeitssätze bei Dreiecken	casos de semejanza de los triángulos	criteri di similitudine dei triangoli
centre (m) d'homothétie	centre of enlargement	Streckungszentrum (n)	centro de homotecia	centro di omotecia
concourant	concurrent: converging	zusammenlaufend; schneidend	concurrente; convergente; secante	centro di omotecia
correspondant	corresponding	korrespondierend	correspondiente	corrispondente
couper (se)	to cut ; to meet	schneiden (sich)	cotarse ; encontrarse	segarsi ; incontarsi ; intersecarsi
couper au milieu	to bisect	halbieren	bisecar	dimezzare
déterminer	to determine	bestimmen	determinar	individuar
égal	equal	gleich	igual	uguale
faisceau de droites concourantes	set of straight lines which meet at the same point	Strahlenbündel	haz de rectas	fascio di rette
homologue	corresponding transformed	korrespondierend	homólogo	omologo
homothétie (f)	enlargement similarity; dilatation	Streckung (f)	homotecia	omotetia (f)
intersection (f)	intersection	Scnittstelle (f); Durchschnitt (m)	intersección	intersezione (f)
joindre	to join; to connect	verbinden	unir; juntar	congiungere
milieu	mid point	Mittlepunkt (m)	punto medio	punto medio
opposé	opposite	gegenüberliegend	opuesto	opposto
pantographe (m)	pantograph	Pantograph (m)	pantógrafo	pantografo (m)
parallèle à	parallel to	parallele zu	paralelo a	paralelo a
rapport (m) d'homothétie	scale factor of an enlargement	Streckungsfaktor	razón de homotecia	rapporto di omotetia
réseau de droites parallèles	set of parallel straight lines	Menge (f) von parallele Gerade	conjunto de rectas paralelas	fascio (m) di rette parallele ; fascio
sécante (f)	secant ; transversal	Sekante (f); schneidente Gerade (f)	secante ; transversal	secante (f); transversale (f)
triangles congruents (égaux)	congruent triangles	kongruente Dreiecke	triangulos congruentes (iguales)	triangoli uguali
triangles semblables	similar triangles	ähnliche Dreiecke (n)	triangulos semejantes	triangoli simili

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES
- Les *«Actes du Premier Congrès Européen de Mathématiques de Paris»* (Springer Verlag 1992), où l'on trouve d'intéressants articles sur l'enseignement des mathématiques en France, Allemagne, Italie, Belgique et Royaume Uni.
- *«Les mathématiques dans le système éducatif espagnol»* par Florencio VILLARROY BULLIDO ("L'Ouvert", n°79 - 1995 - Strasbourg).

Remarques et notes personnelles ....