Contraposée et réciproque

René MULET-MARQUIS
IREM de LYON

Faut-il, pour des élèves de collège, distinguer l'usage de la réciproque d'une propriété (De Pythagore, de Thalès) de celui de sa contraposée ?

La question ci-dessus, proposée comme thème de travail aux membres de la commission premier cycle a suscité des réactions fortes (y compris à l'extérieur de la commission). Pour certains, engager un tel débat est presque un scandale : que reste-t-il à enseigner si on renonce à ces distinctions ? Pour d'autres, que les premiers qualifieraient de laxistes, ce n'est peut-être pas une priorité. Pour d'autres, enfin, la difficulté à faire entrer les élèves dans ces subtilités est telle que n'ayant pas le sentiment de pouvoir enseigner avec profit ces notions ils préfèrent éviter de les aborder.

1) Introduction

Prenons un instant le regard d'un collègue de bonne volonté (comme nous le sommes tous ...) qui souhaite se forger une conviction. Il peut consulter les programmes de collège : la notion de contraposée n'y figure pas. Il va ensuite feuilleter les manuels scolaires : il cherchera en général en vain l'énoncé explicite de la contraposée de propriétés étudiées, en tout cas dans la partie connaissance ou savoir des manuels.

Si parfois elle est évoquée, c'est avec une grande discrétion... Mieux, sous le titre *Réciproque*, dans plusieurs ouvrages, on trouve des exercices relevant de la contraposée.

Enfin si notre professeur corrige le Brevet, il constate que, dès qu'un élève marque sur sa copie « d'après Pythagore » sans énoncer la propriété, sa réciproque ou leur contraposée, le barème l'invite, en général, à attribuer tout ou partie des points.

En résumé, les programmes, les manuels, les consignes de correction du brevet, montrent un engagement modéré de leurs auteurs au sujet de l'initiation à l'usage de la contraposée, qui peut laisser perplexe notre collègue.

Arrivé à ce stade de ses investigations, un professeur éprouve sans doute le besoin d'un retour aux sources. Il lui faut se remémorer quelques éléments de logique. (Précisons qu'il ne s'agit pas d'enseigner ces éléments tels quels aux élèves...).

2) L'implication

L'implication simple

L'implication $P \Rightarrow Q$ est ***fausse*** uniquement si : P vrai Q faux (1)

Elle est ***vraie*** dans tous les autres cas :

$$\begin{cases} \text{P vrai Q vrai} & (2) \\ \text{P faux Q vrai} & (3) \\ \text{P faux Q faux} & (4) \end{cases}$$

La réciproque de $P \Rightarrow Q$ c'est l'implication $Q \Rightarrow P$.

Quelques remarques :

A - Savoir que $P \Rightarrow Q$ est vrai ne *donne aucun renseignement sur la vérité de P ni sur celle de Q.*

Exemple : $OR = 13$ cm, $OL = 5$ cm, $LR = 12$ cm. Le triangle ORL est-il rectangle ?

Si $OL^2 + LR^2 = RO^2$ alors
le triangle est rectangle en L.
Donc le triangle est rectangle en L.

B - Savoir que P vrai et P $\Rightarrow$ Q vrai nous place dans le cas (2). C'est la situation usuelle de déduction. On peut alors affirmer que Q est vrai.

$OR^2 = 13^2$ $\quad$ $OL^2 + LR^2 = 5^2 + 12^2$
$= 169$ $\quad$ $= 25 + 144$
$= 169$

Propriété : Si $OR^2 = OL^2 + LR^2$ alors le triangle ORL est rectangle en L

Conclusion : Le triangle ORL est rectangle en L

C - Savoir que P faux et P $\Rightarrow$ Q vrai nous place dans le cas (3) ou le cas (4). Nous ne savons rien de la vérité de Q. (Beaucoup d'élèves, dans ce cas pensent qu'ils peuvent conclure que Q est faux).

$LR^2 = 12^2$ | $RO^2 + LO^2 = 13^2 + 5^2$
$= 144$ | $= 169 + 25 = 194$

Démonstration : Si $RO^2 + LO^2 = LR^2$ alors le triangle ORL est rectangle en L

Conclusion Le triangle ORL n'est pas rectangle en L car $RO^2 + LO^2$ n'est pas égal à LR^2

D - Savoir que Q est faux et P $\Rightarrow$ Q vrai nous place dans le cas (4). On peut alors affirmer que P est faux.

Un raisonnement tel que :

Je sais que : $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ (non Q)

De plus : si ABC est un triangle rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (P $\Rightarrow$ Q)

Donc ABC n'est pas un triangle rectangle en A (non P)

est parfaitement cohérent du point de vue logique. Il risque d'être assez troublant pour un élève en cours d' apprentissage à la recherche et à la rédaction de démonstration, ce qui peut faire penser à utiliser la contraposée.

3) La contraposée

La contraposée

La contraposée de P $\Rightarrow$ Q c'est l'implication (non Q) $\Rightarrow$ (non P).

Elle est fausse uniquement dans le cas où
(non Q) vrai et (non P) faux
donc Q faux et P vrai (c'est la même chose que (1)).

Elle est vraie dans tous les autre cas.

L'implication P $\Rightarrow$ Q et sa contraposée, (non Q) $\Rightarrow$ (non P) sont équivalentes.

L'exemple ci-dessus devient :

Je sais que : $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ (non Q)
de plus : Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ alors
le triangle ABC n'est pas rectangle en A.
(non Q) $\Rightarrow$ (non P).

Donc ABC n'est pas un triangle rectangle en A. (non P)

On retrouve le schéma déductif usuel.

On a présenté plus haut l'implication simple.

En pratique, on utilise souvent en mathématique l'implication généralisée :

L'implication généralisée

Dans un référentiel E
$\forall x, x \in E$ $P(x) \Rightarrow Q(x)$
Pour être ***vraie***, une telle implication doit être vérifiée quel que soit x appartenant à E.
Elle est fausse dès qu'elle n'est pas vérifiée pour un élément x.

Pour comprendre un tel énoncé (qui ne lui est pas donné sous la forme formalisée ci-dessus) l'élève doit repérer ce qu'est P, ce qu'est Q, ce que sont les objets x et quel est le référentiel E, ce référentiel étant souvent implicite, ainsi que le quel que soit. Il doit aussi admettre les critères de validité ou de non validité de ces énoncés.

Les propriétés données aux élèves dans les cours de géométrie relèvent de l'implication généralisée. Par exemple :

Dans l'ensemble T des triangles du plan	E
Quel que soit le triangle ABC appartenant à T	$\forall x, x \in E$
Si $AB^2+AC^2 = BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A	$P(x) \Rightarrow Q(x)$

4) Reformuler la question de départ

Muni des éléments de logique qui précèdent, il nous faut revenir à la question de départ. Faut-il pour les élèves de collège distinguer l'usage de la réciproque (de Pythagore, de Thalès) de celui de la contraposée ? Cette question semble plus abordable en la reformulant en une double interrogation :

(1) Faut-il pour les élèves de collège distinguer l'usage de la réciproque de celui de la contraposée ?

(2) Pythagore et Thalès sont-ils le bon champ de travail pour opérer cette distinction ?

La formulation de la première question peut faire croire qu'il s'agit simplement de former les élèves à faire un choix entre deux possibilités. En fait, du point de vue de l'apprenant si on l'initie à l'usage de la contraposée, la situation est beaucoup plus complexe. Après avoir repéré que, par exemple, Pythagore intervient dans la résolution d'un problème, il doit faire un choix entre quatre propriétés (directe, réciproque et leur contraposée) dont deux ne sont en général pas données explicitement dans le cours.

Pour des élèves en cours d'initiation au raisonnement déductif cela semble une difficulté déjà importante qui peut devenir insurmontable dans le cas de propriétés à la formulation complexe comme celle de Thalès.

Laisser à la charge de l'élève l'écriture de la contraposée des propriétés semble dépasser les objectifs du collège. Si l'on veut qu'il distingue l'usage des diverses propriétés étudiées (dont leur contraposée et leur réciproque) il semble nécessaire qu'elles soient données explicitement.

5) Pythagore , réciproque et contraposée

Venons-en à la deuxième question :

Le raisonnement :

Je sais que : $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$

De plus, si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors le triangle est rectangle en A.

Donc le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

est un raisonnement faux assez fréquent chez les élèves (On peut remplacer le si....alors....par la contraposée de sa réciproque pour qu'il devienne juste).

Faire percevoir aux élèves qu'il est faux se heurte à de gros écueils. Tout d'abord, il conduit à un résultat juste, d'autre part **aucune des lignes écrites prises isolément ne peut être mise en défaut !**

Dans le domaine numérique, un élève peut admettre qu'un calcul est faux, bien qu'il conduise à un résultat juste, quand on lui fait observer des erreurs qui se compensent. En revanche admettre qu'un raisonnement est faux bien qu'aucune des lignes qui le composent ne soit contestable est extrêmement difficile.

Chaque fois que l'on tente de faire distinguer réciproque et contraposée au sujet de propriétés qui sont des équivalences, on se heurte aux difficultés ci-dessus .

Si l'on souhaite distinguer réciproque et contraposée il semble utile de travailler avec des propriétés pour lesquelles la réciproque est fausse.

L'usage de la réciproque à la place de la contraposée peut plus facilement être mis en défaut puisque la propriété utilisée est alors fausse.

Par exemple, pour la propriété :

Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.

La contraposée :

Si les diagonales d'un quadrilatère ne sont pas perpendiculaires alors ce n'est pas un losange.

se distingue de la réciproque :

Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange,

puisque cette dernière est fausse et qu'un contre-exemple s'exhibe facilement.

Pour en revenir au théorème de Pythagore on peut considérer que c'est une propriété caractéristique des triangles rectangles, comme il existe une propriété caractéristique des triangles équilatéraux. Est-il justifié d'avoir des exigences de rédaction différentes dans l'utilisation de l'une ou de l'autre ?

6) Thalès , réciproque et contraposée

Il nous reste à aborder le théorème de Thalès. Le programme du collège hésite entre un point de vue "projection" et un point de vue "triangle". On retrouve cette hésitation dans les manuels qui proposent parfois plusieurs formulations pour ne pas privilégier l'un des deux points de vue.

La réciproque du théorème de Thalès, telle qu'elle est énoncée dans la plupart des manuels de troisième, possède une particularité pour le moins surprenante : ce n'est pas en général la réciproque du théorème direct ! (laquelle est fausse au demeurant).

Version 1

Théorème de Thalès

Si ABC et AMN sont deux triangles tels que :

M soit sur la droite (AB)

N soit sur la droite (AC)

$(MN)//(BC)$

alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

Réciproque

Si, dans un triangle ,

la place du point M sur (AB) par rapport à A et B est la même que celle du point N sur (AC) par rapport à A et C,

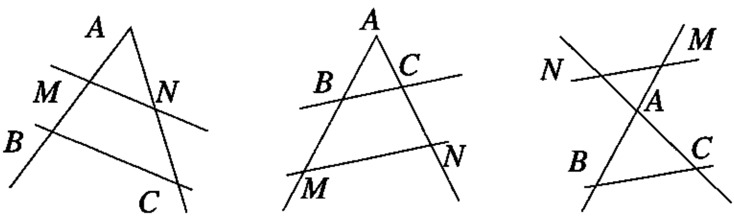
et $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

alors : $(MN)//(BC)$.

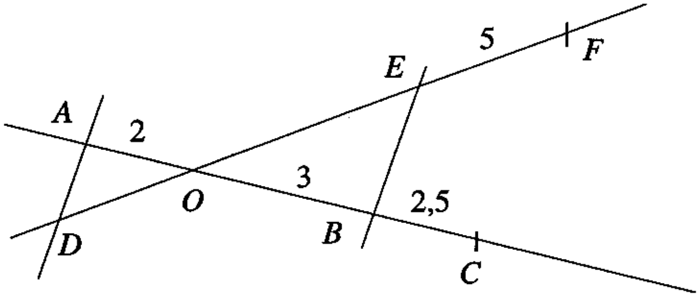
On trouve par exemple dans la conclusion du théorème direct Version 1 l'égalité de trois rapports. Les prémisses de la réciproque ne contiennent que l'égalité de deux rapports. De plus les prémisses de la réciproque précisent la place respective de M et N par rapport à A et B, d'une part, et A et C, d'autre part, ce qui n'est pas fait dans la conclusion du théorème direct.

> ***Version 2***
>
> **Théorème de Thalès**
>
> ABC est un triangle. B' est sur la droite (AB), C' est sur la droite (AC).
>
> Si les droites $(B'C')$ et (BC) sont parallèles, alors : $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$
>
> **Réciproque :**
>
> Si, dans un triangle ABC, deux points B' et C' occupent des positions relatives analogues sur les droites (AB) et (AC)
>
> et
>
> si $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$,
>
> alors les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.

Dans la Version 2, une certaine " symétrie " est rétablie en supprimant le troisième rapport , mais comme pour la Version 1 la "position analogue des points" figurant dans la réciproque vient rompre cette symétrie .

> ***Version 3***
>
> 
>
>
> **Théorème de Thalès**
>
> Dans les trois cas de figures ci-dessus,
>
> si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors :
>
> $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$
>
> **Réciproque**
>
> Dans les trois cas de figures ci-dessus,
>
> si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$,
>
> alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

La Version 3 en s'appuyant explicitement sur l'observation du dessin («Dans les trois cas de figure ci-dessus») évacue les questions d'ordre et d'alignement. La propriété réciproque énoncée ressemble bien, au troisième rapport près, à la réciproque de la propriété de Thalès. Cette formulation a l'avantage de la simplicité. Elle a l'inconvénient de conduire à lire sur le dessin les alignements ou l'ordre des points ce qui semble en contradiction avec l'initiation à la démonstration en géométrie menée au collège.



Exercice (extrait des épreuves du Brevet de Nantes 1994)

Sur la figure ci-dessus, les droites *(AD)* et *(BE)* sont parallèles.

a) Calculer *OD* et *AD*,

b) Les droites *(EB)* et *(CF)* sont-elles parallèles ? Justifier.

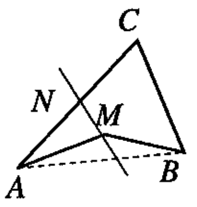
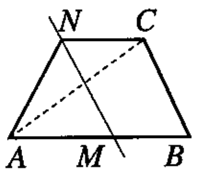
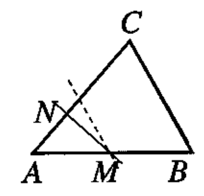
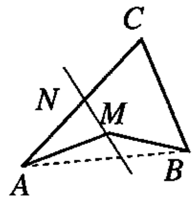
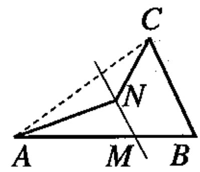
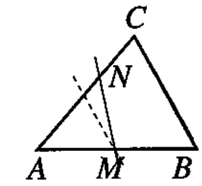
Choisir la Version 1 ou la Version 2 ne permet pas d'échapper obligatoirement à ce problème. En effet dans la plupart des manuels, et ce quelle que soit la formulation utilisée, on trouve des exercices où comme dans celui reproduit ci-dessus l'alignement n'est pas précisé dans le texte et doit être lu sur le dessin. Par analogie avec la notion de «Théorème élève» proposée par A.Bouvier on peut y voir le fonctionnement d'un «Théorème maître» qui peut s'énoncer : *«Quant on travaille sur Thalès, il est licite de lire sur la figure les alignements mais pas le parallélisme».*

Tentons d'écrire la contraposée du théorème de Thalès Version 1 :

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ ou $\frac{AN}{AC} \neq \frac{MN}{BC}$

alors $M \notin (AB)$ ou $N \notin (AC)$ ou les droites *(MN)* et *(BC)* ne sont pas parallèles .

Voici quelques figures illustrant cette propriété :

	$M \notin (AB)$	$N \notin (AC)$	(MN) et (BC) ne sont pas parallèles
$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$			
$\frac{AN}{AC} \neq \frac{MN}{BC}$			

Telle quelle cette contraposée n'est guère utilisable. Elle est loin de l'idée usuelle associée à la contraposée où une inégalité de rapports entraîne le non parallélisme de deux droites.

Pour la Version 2, la contraposée devient :

> *ABC* est un triangle, *B'* est sur la droite *(AB)*, *C'* est sur la droite *(AC)*.
>
> Si $\frac{AB'}{AB} \neq \frac{AC'}{AC}$,
>
> alors les droites *(B'C')* et *(BC)* ne sont pas parallèles.

Cette formulation est utilisable et correspond à l'usage habituel de la contraposée.

Enfin, pour la Version 3 :

> Dans les trois cas de figure ci-dessus :
>
> si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ ou $\frac{AM}{AC} \neq \frac{MN}{BC}$,
>
> alors les deux droites *(BC)* et *(MN)* ne sont pas parallèles.

On retrouve les problèmes évoqués pour le théorème (lecture sur la figure des alignements).

7) Conclusion

Arrivés au terme de cet article, il nous faut tenter d'apporter une conclusion :

D'une part, il ne nous semble pas déraisonnable d'amorcer au collège un travail sur la distinction des notions de réciproque et de contraposée. Traditionnellement Pythagore et Thalès sont des supports privilégiés pour l'apprentissage de la démonstration : ils ne semblent pas être le champ de travail approprié pour distinguer réciproque et contraposée. Sans doute faut il chercher d'autres supports en géométrie, mais aussi en algèbre.

Quel que soit le support, des conditions semblent devoir être remplies :

- Il est souhaitable que les énoncés soient donnés explicitement.
- Il est souhaitable de travailler avec des énoncés qui ne soient pas uniquement des équivalences (voir ce qui est dit plus haut pour Pythagore).
- Il est souhaitable d'utiliser des propriétés pour lesquelles on écrive une véritable réciproque (voir ce qui est dit plus haut pour Thalès).

D'autre part, compte-tenu des pratiques et des formulations très variées des enseignants au sujet de Thalès, il nous semble qu'évaluer des élèves sur ce thème au Brevet des Collèges doit être fait avec la plus grande prudence. En particulier, on peut s'interroger sur la pertinence de questions faisant appel à une contraposée.

Remarques et notes personnelles..........................

....

....

....

....

....

....

....

....