A propos de l'énonce de Thalès en 3ème

Anne-Marie MONFRONT

IREM de PARIS VII

Dans quels champs de connaissance la propriété de Thalès telle qu'elle est énoncée dans les programmes de 3ème peut-elle s'inscrire ?

L'optique «projection» et l'optique «agrandissement» sont toutes deux respectueuses des programmes et des commentaires de la classe de 3ème (voir annexe 1). A la lumière de notre pratique des nouveaux programmes durant plusieurs années, nous vous présentons notre point de vue sur ces deux optiques et sur les raisons qui nous ont conduits, après avoir expérimenté la première, à préférer présenter la deuxième dans nos classes. Nous vous proposons ensuite une série d'activités et d'exercices mettant en oeuvre le point de vue que nous avons choisi.

Deux optiques

Optique 1 : Pratique de la projection

La méthode consiste à dégager la proportionnalité des longueurs des segments d'une droite et de leurs projetés sur une autre droite dans une direction donnée.

Cette pratique est en continuité avec les activités de 4ème (voir annexe 2). La propriété peut être dégagée expérimentalement dans le même esprit qu'en 4ème dans le cas de la projection orthogonale qui conduit à la définition du cosinus (voir figures 1 et 2).

Elle est parfois démontrée à partir de ce cas particulier admis en 4ème (voir figure 3). Ceci ne nous semble pas intéressant d'un point de vue mathématique : pourquoi déduire une propriété affine de notions métriques ? Et, d'un point de vue pédagogique, que la projection soit orthogonale n'influe pas sur l'expérimentation et la compréhension de la conservation du rapport : dans la représentation des élèves, le cas particulier de l'orthogonalité n'est pas un préalable permettant une généralisation.

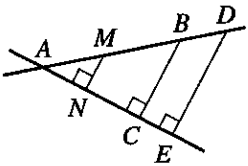


Figure 1

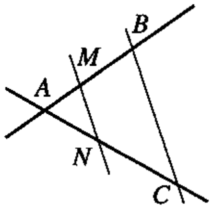


Figure 2

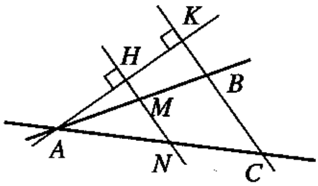


Figure 3

Avec ces projections, on obtient un tableau de proportionnalité.

AM	MB	AB
AN	NC	AC

$\times k$

Le fait que l'on doive privilégier le point d'intersection des deux droites pour se limiter au cas du triangle semble artificiel, les segments MB et NC étant ignorés.

Pour obtenir la première égalité proposée dans le programme, on utilise une propriété de la proportionnalité :

AM	AB
AN	AC

$\times k$ donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Il y a changement de point de vue entre la projection des points A,M,B en A,N,C établie d'abord et la correspondance des points du triangle ABC avec les points correspondants du triangle AMN. La notation dans la colonne de droite des commentaires de 3ème (B' sur (AB), C' sur (AC)) met en lumière le point de vue "triangle", différent du point de vue "projection" proposé en colonne de gauche. Ce changement est absolument nécessaire pour établir la propriété utilisant les troisièmes côtés de ces triangles.

Cette propriété peut être établie expérimentalement ou démontrée à l'aide d'une autre projection, mais dans tous les cas, elle ne peut être directement liée à la projection de points d'une droite sur une autre droite.

L'optique-projection plus proche de la lettre des programmes a été présentée les deux premières années dans nos classes. Mais les inconvénients et les ruptures que nous venons de signaler nous ont incités à envisager un autre point de vue.

Optique 2 : Agrandissement ou Réduction de figures planes

Une présentation en continuité avec les propriétés d'agrandissement-réduction de figures nous semble tout à fait appropriée au contenu de « la propriété de Thalès appliquée au triangle » énoncée dans le programme de troisième.

Des notions sur agrandissement - réduction sont à approfondir en classe de troisième ; elles ont été rencontrées en cinquième avec la notion d'échelle et dès la sixième où les travaux de reproduction portent sur « la réalisation d'une copie conforme d'un modèle concret ou d'un dessin »(voir annexe 3; rappelons que « conforme » signifie « qui conserve les angles »).

De nombreux exercices de reproduction de figures et de calculs de longueurs ont utilisé implicitement les théorèmes de similitude des triangles faisant intervenir un ou deux angles. Les « figures-clés » de Thalès peuvent être considérées comme des cas particuliers intéressants de deux triangles ayant les mêmes angles et donc agrandis l'un de l'autre. La proportionnalité entre les côtés correspondants qui en découle éclaire l'énoncé proposé par le programme.

Cette approche nous semble plus près des représentations des élèves ; elle leur permet une appropriation réelle de la propriété et son intégration dans un champ plus vaste de connaissances.

Mise en œuvre d'activités dans l'optique d'agrandissement

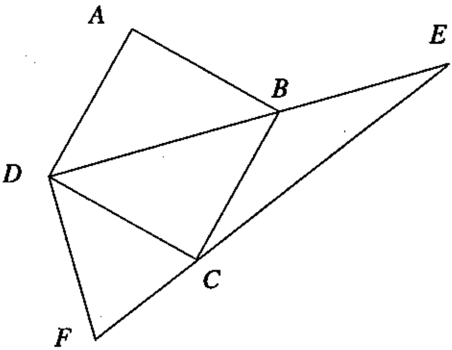
Première activité : Pour agrandir ou réduire des triangles

Objectif

Cette activité permet d'utiliser et de préciser des théorèmes-outils mis en actes depuis la cinquième dans l'agrandissement ou la réduction de triangles (voir bilan de la première activité). Ces propriétés seront réinvesties dans les deux activités suivantes : vers l'énoncé de Thalès et vers sa réciproque.

Consigne

ABCD est un carré de 3 cm de côté. Les points *D,B,E* sont alignés dans cet ordre et $BE = 3$ cm. Le point *F* est l'intersection de la perpendiculaire à *(DB)* passant par *D* et de *(CE)*. En utilisant les données, sans faire de mesures supplémentaires :



a) Reproduire cette figure à l'échelle 2 (ou 2/3) .
b) Reproduire uniquement les triangles BEC et DFC à l'échelle 2 (ou 2/3).

Remarques sur le déroulement

La figure complète est agrandie ou réduite sans difficulté en utilisant la conservation de l'orthogonalité et la proportionnalité des mesures correspondantes.

Pour éviter une reproduction des triangles demandés à l'aide de la règle et du compas à partir de la figure complète obtenue, on relève celle-ci dès qu'elle est terminée.

Pour la reproduction des triangles, les élèves remarquent que si les mesures des trois côtés étaient connues, on pourrait calculer les trois nouvelles mesures et construire le triangle demandé. C'est l'impossibilité d'utiliser cette méthode familière qui mène à calculer des angles : d'une part l'angle $\widehat{CBE}$, d'autre part l'angle $\widehat{CDF}$ et l'angle $\widehat{ECB}$ pour obtenir l'angle $\widehat{DCF}$ Après ces calculs, les élèves utilisent des procédures que l'on explicite collectivement (voir bilan). Ces procédures ont pu être rencontrées dans les classes antérieures, comme dans l'exercice proposé en annexe 4.

La validation de la construction des triangles se fait par superposition sur la figure complète à la même échelle.

Bilan

On énonce :

1-Dans un agrandissement ou une réduction, toutes les longueurs de la première figure sont multipliées par un même nombre pour obtenir les longueurs correspondantes de la deuxième figure (les longueurs de l'une sont proportionnelles aux longueurs correspondantes de l'autre) ; les angles sont conservés.

2- Pour agrandir ou réduire un triangle, il suffit d'utiliser l'une des trois méthodes suivantes :

a) Tracer trois côtés de longueurs proportionnelles à celles des côtés du triangle donné.

b) Tracer un angle égal à l'un des angles du triangle donné et les côtés adjacents de longueurs proportionnelles à celles des côtés correspondants du triangle donné.
(construction du triangle *BCE*).

c) Tracer deux angles égaux à deux angles du triangle donné, en respectant l'échelle choisie pour construire le côté adjacent aux deux angles.
(construction du triangle *DCF*).

Deuxième activité : vers l'énoncé de Thalès

Objectif

Construire les figures-clés de Thalès.

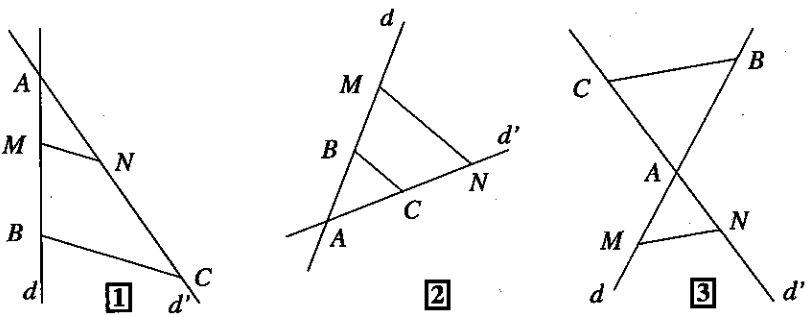
Démontrer que, dans chacun des cas, les deux triangles sont agrandis ou réduits l'un de l'autre.

Cette démonstration est l'occasion d'un réinvestissement des propriétés énoncées dans l'activité précédente et des propriétés relatives aux angles formés par deux droites parallèles et une sécante.

Consigne

Soit deux droites *d* et *d'* sécantes en *A*, placer les points *B* et *M* sur *d*, *C* et *N* sur *d'* tels que les droites *(MN)* et *(BC)* soient parallèles. Faire plusieurs figures en plaçant les points *A, M, B* dans des ordres différents.

Comparer les triangles *AMN* et *ABC*.



Remarques sur le déroulement de l'activité

Contrairement à nos attentes, la figure 3 a été mieux « vue » que les deux autres où les triangles *AMN* et *ABC* sont placés dans la même position mais en inclusion et donc moins séparés et moins visibles pour plusieurs élèves. Des coloriages superposés ont levé en grande partie les obstacles, des découpages et superpositions pourraient aider aussi.

Après cette étape de mise en évidence des triangles *ABC* et *ABM*, la réponse « ils ont la même forme ; ils sont agrandis ou réduits l'un de l'autre » est immédiate. La recherche en groupe permet de trouver les justifications.

Bilan

On retient les trois figures ci-dessus. Sur chacune, on conjecture que le triangle *AMN* est un agrandissement ou une réduction du triangle *ABC*.

La démonstration utilise les angles formés par deux parallèles coupées par une sécante, correspondants dans les cas 1 et 2, alternes-internes dans le cas 3, puis le « théorème en acte » n° 2c énoncé dans la première activité. On en conclut que les longueurs des côtés du triangle *AMN* sont proportionnelles à celles des côtés du triangle *ABC*, d'où l'énoncé des égalités à retenir.

Troisième activité : vers la Réciproque

On donne la consigne suivante : sur les droites *d* et *d'* se coupant en *A*, placer les points *M* et *B* sur *d*, *N* et *C* sur *d'*, de façon que les longueurs *AM* et *AN* soient proportionnelles aux longueurs *AB* et *AC*. Comparer les triangles *AMN* et *ABC*.

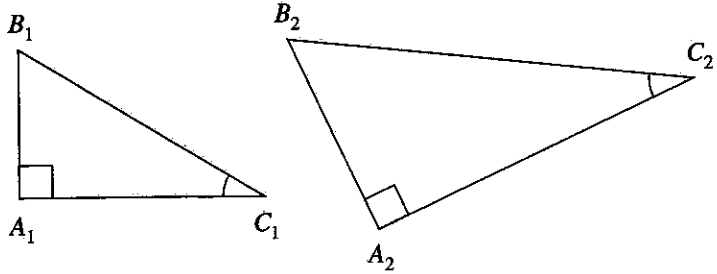
Il y a nécessité de placer les points *A,M,B* et *A,N,C* dans le même ordre pour que les triangles *AMN* et *ABC* aient un angle égal en *A*. On utilise alors le « théorème en acte » n° 2b pour conclure que le triangle *AMN* est un agrandissement ou une réduction du triangle *ABC*. On en conclut que les angles correspondants des triangles sont égaux ce qui permet de déduire le parallélisme des droites *(MN)* et *(BC)*.

Introduction d'autres notions dans la même optique

La première activité sur les agrandissements peut servir de point de départ pour l'étude de l'effet d'un agrandissement sur les longueurs et les aires.

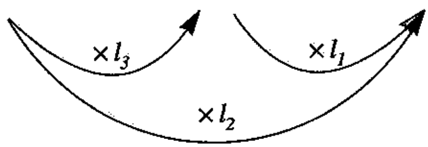
Elle peut aussi permettre l'introduction des fonctions trigonométriques dans le triangle rectangle. Les triangles rectangles ayant un angle égal sont des agrandissements ou des réductions les uns des autres (voir bilan de la première activité n° 2c), ce qui entraîne les trois rapports constants entre les côtés de ces triangles rectangles que l'on nomme cosinus, sinus, tangente de l'angle considéré.

Le fait que ces rapports sont indépendants des triangles considérés peut ainsi être nettement mis en lumière, ce qui est primordial pour une acquisition correcte des notions trigonométriques.



k est le coefficient d'agrandissement ou de réduction du triangle $A_1B_1C_1$ au triangle $A_2B_2C_2$.

triangle	côté opposé à $\widehat{C}$	côté adjacent à $\widehat{C}$	hypoténuse	
$A_1B_1C_1$	A_1B_1	A_1C_1	B_1C_1	
$A_2B_2C_2$	A_2B_2	A_2C_2	B_2C_2	$\times k$



$$l_1 = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2} = \cos \widehat{C} \qquad l_2 = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \sin \widehat{C}$$

$$l_3 = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} = \tan \widehat{C}$$

Sur le long terme du collège, la notion d'agrandissement-réduction est une ligne directrice qui permet d'aborder de nombreux contenus dont l'énoncé de Thalès appliqué au triangle et les relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Elle est tout à fait accessible aux élèves du collège et permet de construire des savoirs dans une continuité favorable à leur appropriation.

ANNEXES

ANNEXE 1 : Programme de troisième

1.a.*Enoncé de Thalès relatif au triangle, application à des problèmes de construction*

Des activités expérimentales, reliées à la pratique de la projection, permettront de dégager le théorème de Thalès relatif au triangle et sa réciproque: cette réciproque sera formulée en précisant dans l'énoncé les positions relatives des points.

- Connaître et utiliser dans une situation donnée le théorème de Thalès relatif au triangle:

($\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}$, *B'* est sur la droite *(AB)*, *C'* est sur la droite *(AC)*).

et la réciproque.

- Connaître et utiliser dans la même situation la propriété:

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

Dans le cadre du programme, le professeur a toute liberté pour l'organisation de son enseignement.

L'approfondissement des notions déjà acquises, l'entraînement au raisonnement déductif sont conduits dans l'esprit des classes antérieures, sans reconstruction systématique et à propos de situations nouvelles, de façon à développer les capacités de découvertes et de conjecture autant que de démonstration.

ANNEXE 2 : Programme de quatrième

1 - *Dans le plan, projection sur une droite selon une direction.*

- *Conservation du milieu par projection; configurations triangulaires prenant appui sur cette propriété.*
- *Projection orthogonale; cosinus d'un angle comme opérateur de projection orthogonale.*

- Quant à la proportionnalité des longueurs entre segments et projetés, elle sera expérimentée dans le seul cas de la projection orthogonale et conduira à la définition du cosinus d'un angle aigu comme coefficient de proportionnalité.

ANNEXE 3 :

Programme de sixième

Les travaux de reproduction porteront sur la réalisation:

- soit d'une copie conforme d'un modèle concret ou d'un dessin.

Programme de cinquième

- Calculer et utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin.

Programme de troisième

c- *Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, aires et volumes.*

Les activités, notamment en classe de Cinquième, de dessin et de reproduction à une échelle donnée, ont mis en œuvre le principe de la multiplication des longueurs initiales par un même coefficient.

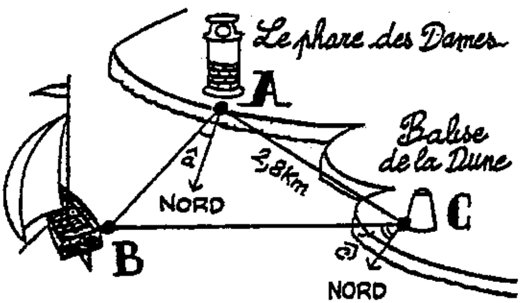
Ces activités expérimentales dégageront l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires, les volumes.

ANNEXE 4

Pythagore 5ème - Hatier.

68. *Au large du phare des Dames*

Un bateau B croise au large du phare des Dames situé en A.



Pour connaître sa position le capitaine du bateau mesure les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{c}$ (voir dessin) :
mes($\widehat{a}$) = 24° ; mes($\widehat{c}$) = 56°.
La distance entre la Balise C et le phare des Dames A est lue sur la carte marine : 2,8 km ; ainsi que la mesure de l'angle entre (AC) et la direction du Nord : 90°.
Construire un plan précis à l'échelle 1:50 000.
Mesurer et en déduire la distance entre le bateau B et le phare des Dames A.