

**De l'intérêt d'aborder
le théorème de Thalès
(de 3^{ème})
vu sous son aspect projection
dans la continuité du programme
de 4^{ème}**

Michel Jaffrot
IREM des Pays de la Loire

Introduction

Y a-t-il encore un quelconque intérêt à étudier le théorème de Thalès sous son aspect «projection» ?

Voilà une question difficile. Est-ce un combat d'arrière-garde ?

La mode est-elle passée ?

Une nouvelle mode est-elle arrivée avec le théorème de Thalès vu sous l'aspect agrandissement-réduction ?

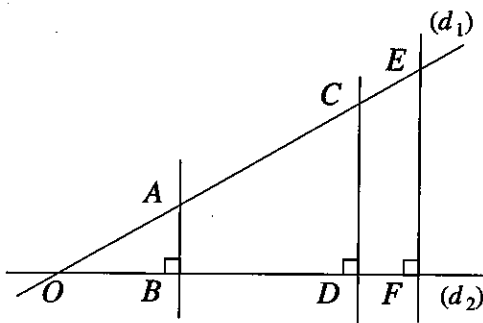
A ces questions, on peut en ajouter une autre : la projection d'une droite (d_1) sur une droite (d_2) n'est-elle pas une occasion supplémentaire de travailler la proportionnalité ?

C'est dès la quatrième, lors de l'étude de la projection orthogonale et du cosinus, puis, dans la continuité, en troisième avec la projection quelconque.

Certes des difficultés surgissent. Y a-t-il quelque avantage ?

I - De la proportionnalité dans une situation géométrique

En quatrième, l'étude de la projection orthogonale d'une droite (d_1) sur une droite (d_2) permet de définir le cosinus comme opérateur du tableau de proportionnalité associé.



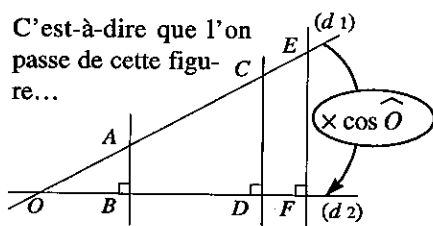
Longueurs sur (d_1)	OA	AC	OC	OE
Longueurs sur (d_2)	OB	BD	OD	OF

Sur la figure, on peut mettre en évidence des triangles rectangles « emboîtés » ayant tous l'angle $\widehat{O}$ en commun.

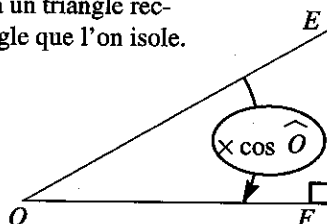
En privilégiant de compléter le tableau de proportionnalité avec exclusivement les côtés des triangles rectangles, le cosinus est défini comme lien entre deux côtés de chacun de ces triangles.

On définit ainsi dans chaque triangle rectangle le cosinus de l'angle $\widehat{O}$.

C'est-à-dire que l'on passe de cette figure...



...à un triangle rectangle que l'on isole.



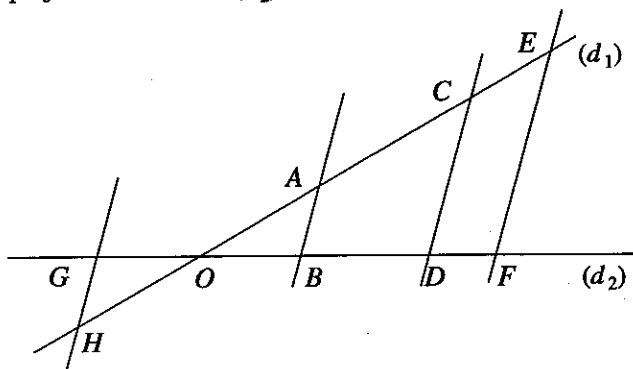
II - Continuité de la quatrième à la troisième

En Troisième, l'étude porte alors sur la projection d'une droite (d_1) sur une droite (d_2) non nécessairement orthogonale, extension de la projection particulière de quatrième.

Cela, à partir d'une question simple :

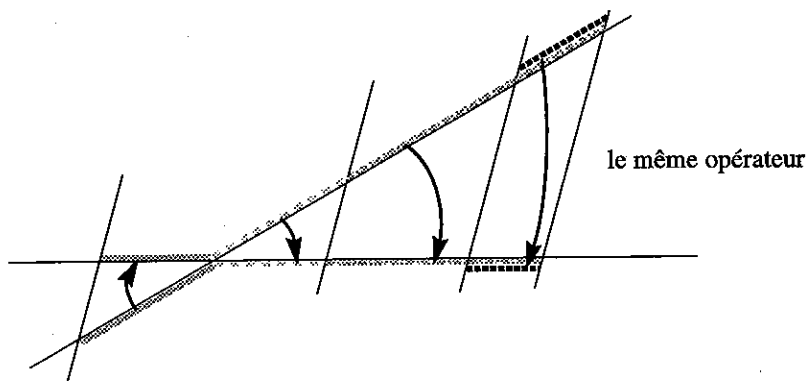
Que se passe-t-il si la direction de la projection de (d_1) sur (d_2) n'est plus orthogonale à (d_2) ?

Comme en quatrième, on obtient un tableau de proportionnalité entre les longueurs des segments portés par la droite (d_1) et les longueurs des segments projetés sur la droite (d_2) .



Longueurs sur (d_1)	OA	AC	OC	HE	...
Longueurs sur (d_2)	OB	BD	OD	GF	...

Il y a donc, comme en quatrième, un opérateur-lien entre les longueurs des segments portés par (d_1) et (d_2) .

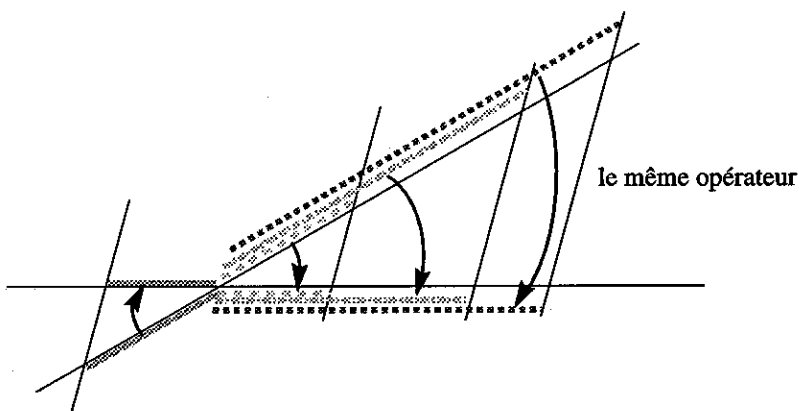


A ce stade, plusieurs pistes sont possibles :

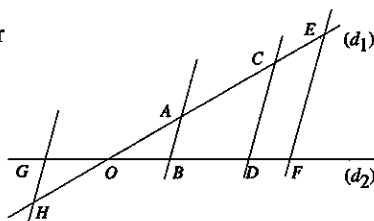
1) Première piste : **en faisant une lecture «projection» de la figure.**

* soit, restreindre la lecture de la figure aux côtés des triangles dits «en situation de Thalès».

Longueurs sur (d_1)	OA	OC	OE	OH	...
Longueurs sur (d_2)	OB	OD	OF	OG	...

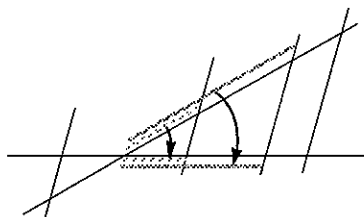


* soit, restreindre encore la figure pour écrire des proportions.



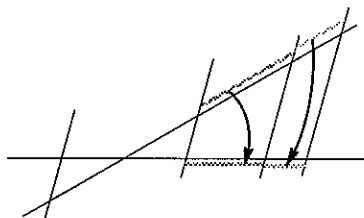
comme par exemple

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$$



ou

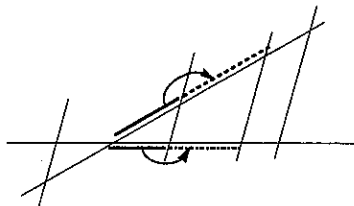
$$\frac{BD}{AC} = \frac{DF}{CE}$$



2) Deuxième piste : en faisant une lecture «rapport de deux longueurs» sur (d_1) et sur (d_2).

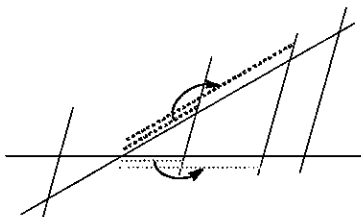
Comme par exemple :

$$\frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB}$$



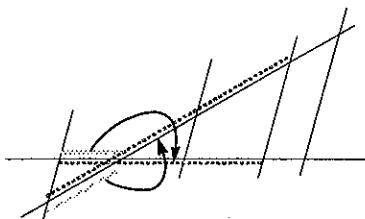
ou

$$\frac{OC}{OA} = \frac{BD}{OB}$$



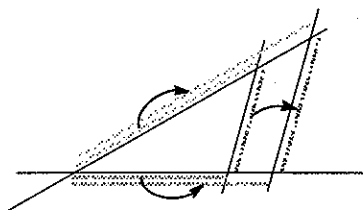
ou

$$\frac{HC}{HO} = \frac{GD}{GO}$$



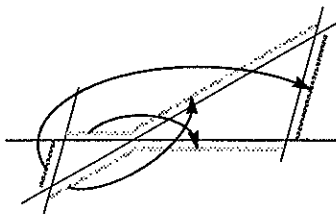
3) Puis, il faudra étendre dans le cas très particulier de deux triangles «en situation de Thalès», la proportion aux longueurs des segments portés par les deux droites parallèles.

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$$



ou

$$\frac{OC}{OH} = \frac{OD}{OG} = \frac{CD}{GH}$$



Jusque là, *ce qui est privilégié*, c'est :

- d'une part, la poursuite de l'étude de la projection d'une droite (d_1) sur une droite (d_2), de la quatrième à la troisième, du cas particulier au cas général,
- d'autre part, l'étude d'une situation géométrique où des lectures différentes amènent des situations de proportionnalités différentes.

III - Mais, faut-il taire les difficultés ?

→ Première difficulté :

Comment établir cette proportionnalité ?

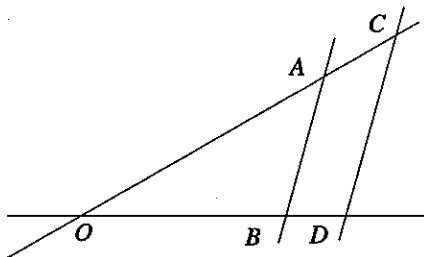
Comment faire admettre que des tableaux élaborés à partir de mesures faites sur des dessins aboutissent à des tableaux de proportionnalité ?

On retrouve ici une difficulté «classique» que l'on rencontre dès que l'on passe d'une lecture sur une figure réelle à la figure idéale.

figure réelle	figure idéale								
tableau des mesures <table><tr><td>sur (d_1)</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>sur (d_2)</td><td></td><td></td><td></td></tr></table> ↓ ↓ ↓ écriture des rapports, colonne par colonne ↓ ↓ ↓ les calculs donnent des réponses souvent approchées et différentes	sur (d_1)				sur (d_2)				le tableau est un tableau de proportionnalité ↑ les rapports sont égaux ↑ tous les calculs sont égaux ↑
sur (d_1)									
sur (d_2)									
↘ ce passage, il faut l'admettre ↗									

→ Deuxième difficulté

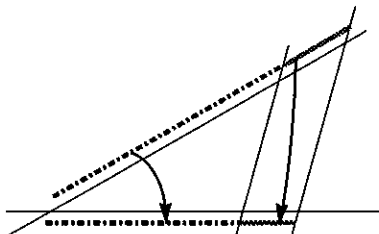
Gérer les deux types de lecture que les élèves font sur une même figure : lecture «projective» et lecture «rapport de longueurs sur chaque droite» c'est-à-dire, par exemple sur la figure suivante :



Bulletin Inter-IREM - Commission Premier Cycle

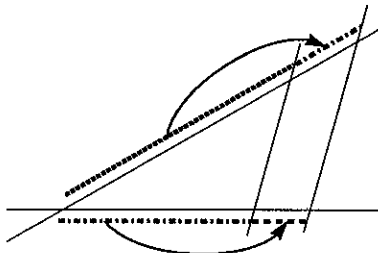
Pour exprimer une relation entre les longueurs OA , AC , OB et BD , deux élèves différents peuvent faire des lectures «spontanées» différentes de l'opérateur-lien entre certaines longueurs.

Elève A



$$\frac{OB}{OA} = \frac{BD}{AC}$$

Elève B



$$\frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB}$$

Qu'en est-il du passage d'une proportion à l'autre ?

→ **Troisième difficulté :**

Lorsque l'on veut aborder le théorème de Thalès appliqué aux triangles, ce n'est plus le lien entre les longueurs des segments portés par (d_1) et par (d_2) qui est visé, mais le lien entre les côtés des deux triangles placés en situation de Thalès.

C'est-à-dire, il faudra passer du tableau de proportionnalité suivant :

longueurs sur (d_1)	OA	OC	AC	CE	OE	...
longueurs sur (d_2)	OB	OD	BD	DF	OF	...

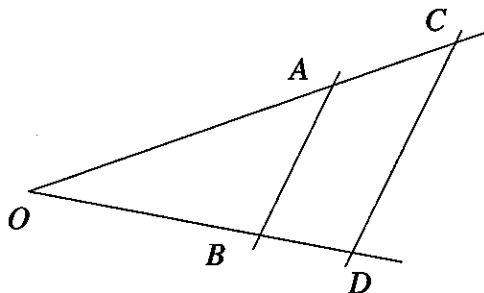
où les longueurs des segments portés par les parallèles n'apparaissent pas, à un nouveau tableau de proportionnalité où ils apparaissent.

Par exemple, pour les deux triangles OAB et OEF :

côtés du triangle OAB	OA	OB	AB
côtés du triangle OEF	OE	OF	EF
côtés portés par la droite (d_1)	côtés portés par la droite (d_2)	côtés portés les deux parallèles	

IV - Des avantages ?

1) Lorsque les calculs portent ou utilisent les «petits bouts» (ici BD et AC), les deux lectures sont possibles.



Voici deux exemples :

exemple 1

on donne $OA = 26$

$AC = 10$

$OB = 21$

on cherche BD .

exemple 2

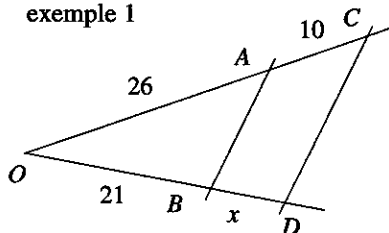
on donne $OA = 35$

$AC = 12$

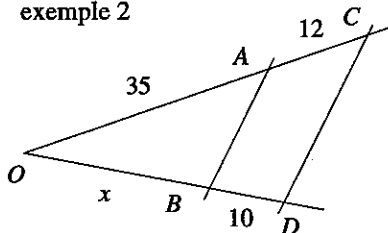
$BD = 10$

on cherche OB .

exemple 1



exemple 2



Dans ces deux cas, le théorème de Thalès appliqué aux triangles oblige à écrire par exemple les équations suivantes :

$$\frac{26}{21} = \frac{36}{21 + x}$$

$$\frac{35}{47} = \frac{x}{x + 10}$$

Quel sens peuvent bien avoir pour l'élève de telles équations ?

Est-ce vraiment nécessaire de poser de telles équations en x ?

La lecture «projection» comme l'autre lecture permettent d'écrire des équations plus simples dont la résolution ne nécessite pas de calcul algébrique annexe.

Calcul de BD
avec la lecture «projection»

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{26}{21} = \frac{10}{x}$$

Calcul de OA
avec l'autre lecture

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$$

$$\frac{35}{12} = \frac{x}{10}$$

Mais le programme actuel ne nous y invite pas... Faut-il continuer à l'interdire ?

2) Lors de l'étude de l'agrandissement-réduction, la même situation géométrique resurgit, ceci dans le cas particulier de deux triangles disposés «en situation de Thalès».

Il y a proportionnalité entre les longueurs des côtés correspondants des deux triangles ainsi disposés.

C'est à nouveau le théorème de Thalès appliqué aux triangles.

C'est ainsi l'occasion de montrer deux approches différentes de cette situation géométrique particulière, l'approche projective et l'approche agrandissement-réduction, sans en occulter aucune, l'une renforçant l'autre.

V - Quelques questions pour finir

- Faut-il vraiment abandonner l'aspect projectif du théorème de Thalès ?
- Dans ce cas, est-ce oui ou non un handicap pour les futurs élèves de lycée ?
- Que disent les programmes ? du collège ? du lycée ?
- Faut-il proposer plusieurs théorèmes suivant la situation rencontrée ?

Ce texte, écrit entre novembre 1994 et janvier 1995, est une réflexion encore en chantier sur le Théorème de Thalès actuellement au programme ; elle est certainement incomplète et inachevée.

Merci aux collègues de l'IREM des Pays de la Loire et du collège René Bernier à St Sébastien sur Loire pour leur aide à travers discussions et critiques... En particulier, je remercie Yves Thomas que je vous invite à lire quelques pages plus loin.