Énoncé de Thalès : support pour le calcul algébrique

Marie-José BACH - Madeleine MAROT
IREM de Poitiers

Les discussions relatives à l'introduction et à la formulation du théorème de Thalès en troisième de collège sont encore vives, chacun défendant son point de vue : projection ou agrandissement-réduction ...

Si nous nous plaçons dans une démarche d'agrandissement-réduction, nous pouvons déduire immédiatement la proportionnalité entre les longueurs des côtés du "petit triangle" et ceux du "grand triangle" (ou vice versa), le coefficient de proportionnalité représentant l'échelle entre les deux triangles.

Dans cet article, nous nous proposons de montrer que le thème "Thalès dans un triangle", abordé en début d'année de troisième, sous l'aspect évoqué au paragraphe précédent, est un thème riche. En effet, il permet de réactiver les propriétés de figures introduites en cinquième et en quatrième, de faire travailler et d'approfondir les règles du calcul algébrique établies dans les classes antérieures, en particulier la reconnaissance et l'utilisation de la distributivité et la résolution des équations.

Pour la progression suivie et l'analyse sur le thème proprement dit, nous renvoyons les lecteurs aux articles parus à ce sujet dans le Suivi scientifique de troisième et les brochures de troisième de l'IREM de Poitiers.

Lors des premiers travaux simples, donnés après l'introduction du théorème de Thalès, travaux que nous n'exposons pas ici, l'élève a le choix entre :

- le traitement arithmétique de la situation par la recherche de l'échelle ou du coefficient de proportionnalité entre les longueurs des côtés des deux triangles,

et

- le traitement algébrique en posant une équation simple du type $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.

Ensuite, il nous semble important de donner aux élèves des situations où la méthode arithmétique s'avère plus difficile à reconnaître, à appliquer, voire même inutilisable, et où il sera nécessaire de traiter algébriquement le problème en posant une équation dont la forme apparaîtra plus complexe à l'élève.

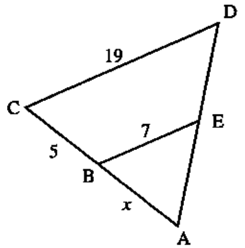
Cela impose pour le professeur un choix dans les situations proposées, un choix dans les longueurs connues et inconnues, un choix sur les nombres donnés (coefficient de proportionnalité fractionnaire) .

L'exercice suivant illustre ce propos:

Calculer x sachant que :

(CD) //(BE)

BC = 5 ; CD = 19 ;BE = 7



La propriété de Thalès conduit, selon la démarche utilisée, à $AC = \frac{19}{7}AB$ ou à $\frac{AC}{AB} = \frac{19}{7}$.

Le traitement arithmétique est envisageable par les élèves, le coefficient d'agrandissement étant $\frac{19}{7}$. Mais ne connaissant ni AC, ni AB, le fait d'écrire $AC = \frac{19}{7}AB$ ne conduit pas directement à la solution ce qui rend inefficace cette résolution et impose le passage à l'algèbre.

Deux traductions apparaissent alors :

soit $\frac{x+5}{x} = \frac{19}{7}$ (1) , soit $x + 5 = \frac{19}{7}x$ (2).

Il est intéressant de faire analyser ces deux équations aux élèves afin qu'ils prennent conscience qu'on passe de l'une à l'autre par une méthode algébrique connue.

L'équation (2) est une équation intéressante car elle peut être résolue de différentes manières, en voici deux :

$$x + 5 = \frac{19}{7}x$$

$$x + 5 - x = \frac{19}{7}x - x$$

$$5 = x \times \left(\frac{19}{7} - 1\right)$$

$$5 = x \times \frac{12}{7}$$

$$x = 5 : \frac{12}{7}$$

$$x = 5 \times \frac{7}{12}$$

$$x = \frac{35}{12}$$

$$x + 5 = \frac{19}{7}x$$

$$7 \times (x + 5) = 19x$$

$$7x + 35 = 19x$$

$$35 = 12x$$

$$x = \frac{35}{12}$$

Il existe d'autres traitements utilisés par les élèves ; cependant, dans tous les cas, les élèves ont retravaillé la résolution des équations avec des inconnues dans les deux membres, la distributivité (développement ou factorisation), les règles de calcul avec des entiers et des fractions et effectué des révisions de manière non systématique du programme de quatrième, ce qui est conforme à l'esprit des programmes de collège.

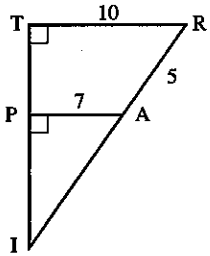
Les quatre problèmes suivants sont des situations de géométrie, ils s'inscrivent soit dans l'apprentissage à la preuve, soit dans la nécessité de réaliser un calcul préalable à une construction, soit dans la recherche de conditions nécessaires à l'obtention de propriétés de figures et présentent tous des applications du théorème de Thalès.

Pour tous, **l'algèbre devient un outil nécessaire ce qui lui donne tout son intérêt.**

Dans les deux premiers problèmes, le support choisi est le trapèze, figure connue des élèves, intéressante car elle possède deux côtés parallèles (condition nécessaire pour utiliser l'énoncé de Thalès), et lorsque l'on prolonge les deux autres côtés, on obtient des configurations-clés de l'énoncé étudiées dans le triangle. D'autre part, les équations écrites ne sont pas des équations simples $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$ mais des équations dans lesquelles l'inconnue figure à plusieurs endroits.

TRAP est un trapèze rectangle: $\widehat{T} = \widehat{P} = 90°$ $TR = 10$ $RA = 5$ $PA = 7$ *Les droites (TP) et (RA) se coupent en I.* ***Prouver que les périmètres des triangles IAP et IRT sont des nombres entiers.***

Le professeur peut selon les cas :
- soit donner le schéma ci-contre,
- soit ne pas donner de schéma et laisser les élèves construire une figure traduisant les données du texte,
- soit demander la figure en vraie grandeur, c'est déjà un vrai problème...



La recherche du périmètre de *IAP* conduit l'élève à calculer d'abord IA et IP, donc

∗ à poser $IA = x$, à écrire $\frac{IA}{IR} = \frac{AP}{TR}$ ce qui donne $\frac{x}{x+5} = \frac{10}{7}$ et $IA = \frac{35}{3}$.

∗ puis à calculer *IP* par l'utilisation du théorème de Pythagore, ce qui amène

$$IP^2 = \left(\frac{35}{3}\right)^2 - 7^2 \text{ soit } IP = \frac{28}{3}$$

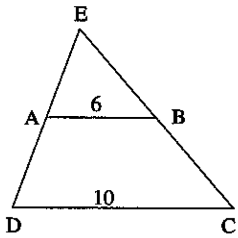
∗ le périmètre de *IAP* : $p = \frac{28}{3} + \frac{35}{3} + 7$ qui est un nombre entier.

∗ enfin la longueur *TI* et le périmètre de *TIR* qui est aussi un nombre entier.

Si le professeur demande la figure en vraie grandeur, il est probable que l'élève commencera par le calcul de la hauteur du trapèze et trouvera $TP = 4$ puis utilisera le théorème de Thalès une fois pour calculer *IA* et une nouvelle fois pour calculer *IP*, puis déduira les périmètres des triangles.

Ce problème fait réfléchir à la résolution d'équations de la forme $\frac{x}{x+a} = \frac{b}{c}$ ou $\frac{x+a}{c} = \frac{c}{b}$, à la nécessité de calculer avec des valeurs exactes (fractions), et éventuellement au calcul du carré d'une fraction. De plus, il surprend car les longueurs des côtés sont des nombres fractionnaires tandis que les périmètres sont des nombres entiers.

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD].
$AB = 6$, $CD = 10$, $BC = 5$ et $AD = 4$.
Les droites (AD) et (BC) se coupent en E.
Prouver que le triangle DCE est isocèle.



En général, l'élève commence par traduire le texte par un dessin et le plus souvent n'obtient pas un triangle isocèle, ce qui sème le doute.

Il est alors nécessaire d'analyser la situation : 6 n'étant pas la moitié de 10, les points A et B ne sont pas les milieux de $[DE]$ et de $[CE]$. Pour obtenir un triangle isocèle, il suffit de montrer que $AE = 6$ ou que $DE = 10$ et donc de les calculer. Selon le choix des inconnues, on obtiendra :

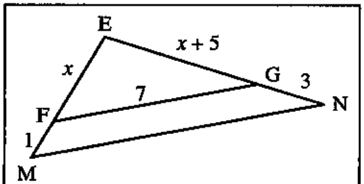
- avec $ED = x$ $\quad \dfrac{x-4}{x} = \dfrac{6}{10}$

- avec $EA = x$ $\quad \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{6}{10}$

et l'on aura des équations du même genre que celles évoquées précédemment.

Le troisième problème proposé est un problème de construction nécessitant un calcul préalable pour déterminer les longueurs inconnues.

L'unité est le centimètre. Sur le dessin ci-dessous.
EFG est un triangle tel que $FG = 7$ et [EG] mesure 5 cm de plus que [EF], on pose $EF = x$.
Lorsqu'on prolonge [EF] de 1 cm, on obtient M ; lorsqu'on prolonge [EG] de 3 cm, on obtient N et les droites (FG) et (MN) sont parallèles.
1° Construire la figure en vraie grandeur après avoir justifié toutes les étapes.
2° Le triangle EFG est-il rectangle ? Pourquoi ?



Pour réaliser la construction, il est nécessaire de connaître la valeur de x. L'équation obtenue

$\frac{x+1}{x}=\frac{(x+5)+3}{x+5}$ ou $\frac{x+1}{x}=\frac{x+8}{x+5}$ entraîne lors de sa résolution la mise en œuvre de la double distributivité dans un contexte différent des calculs d'aires souvent rencontrés en quatrième.

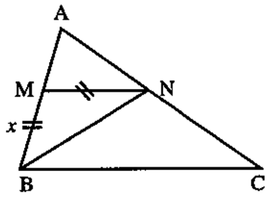
Dans cet exercice, l'élève est amené à travailler la distributivité simple de la forme $x(x + c)$ et la double distributivité sous la forme $(x + a)(x + b)$, il rencontre une équation avec des x^2 qui se ramène ensuite à une équation du premier degré en x.

La réalisation de la figure en vraie grandeur peut laisser croire que le triangle EFG est rectangle en F, les calculs $EF^2 + FG^2 = 55{,}25$ et $EG^2 = 56{,}25$ prouvent qu'il n'en est rien.

Le dernier problème que nous présentons demande une analyse des données, de la figure, de la question posée; il permet de retravailler les propriétés des triangles et des angles vues les années précédentes.

ABC est un triangle tel que AB = 4, AC = 7, BC = 6. *M est un point du segment [AB], il se projette en N sur (AC) parallèlement à (BC).* *1° On pose BM = x. Où faut-il placer M pour que le triangle BMN soit un triangle isocèle en M ?* *2° Dans ce cas, que représente la droite (BN) dans le triangle ABC ? Justifier la réponse.*

Pour un certain nombre d'élèves la difficulté majeure réside d'abord dans la compréhension de la consigne, comprendre que “Où faut-il placer M ?” revient à trouver la valeur de x, puis ensuite dans la compréhension de la situation initiale, voir que BMN isocèle en M est une condition imposée et donc que $BN = MN = x$ (alors qu'ils écrivent souvent $MN = y$ et tombent dans une impasse !).



Une fois le problème posé, l'équation à résoudre $\frac{4-x}{4} = \frac{x}{6}$ donne pour solution $x = 2{,}4$.

La seconde question est une question de géométrie "pure" sur les angles (alternes-internes, angles du triangle isocèle, bissectrice).

En conclusion, ce thème sur l'énoncé de Thalès dans le triangle, constituant une charnière entre la géométrie et l'algèbre, traité en début d'année fournit l'occasion de faire **fonctionner les règles du calcul algébrique** dans de nouvelles situations, d'**accroître l'intérêt de l'algèbre** tout en lui donnant du **sens**, d'**élargir le domaine des équations**, de **permettre le réinvestissement des connaissances** sur les figures géométriques et ainsi d'**éviter les révisions** systématiques.

Remarques et notes personnelles ....