

Pour un Thalès dynamique

Jean Claude Duperret
IREM de Reims

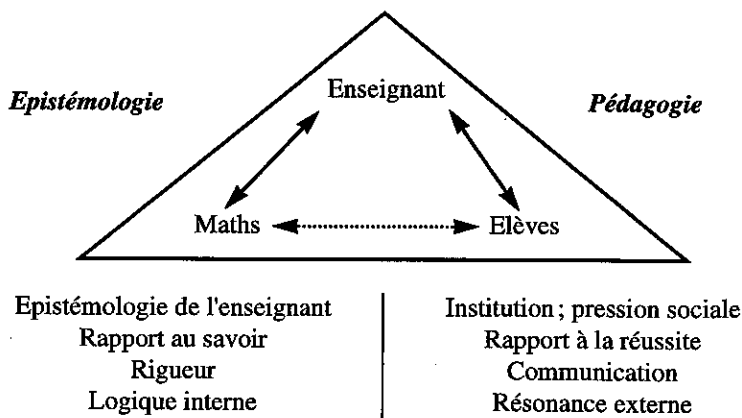
La plupart des enseignants (de mathématiques ou d'autres disciplines) vont commencer leur carrière fortement imprégnés de leur propre apprentissage et, au fil des années, vont amplifier ou corriger, atténuer ou remettre en cause leur conception de l'enseignement, leur ligne de conduite directrice étant la recherche constante d'un équilibre entre le sens profond qu'ils donnent à leur matière et la communication qu'ils vont en faire. Deux facteurs marquent particulièrement cette évolution : la variation du public auquel ils s'adresseront et les changements de programmes successifs qu'ils rencontreront.

Si certains changements de programmes ne sont que des modifications légères de contenus n'entraînant chez l'enseignant qu'un soupir devant certaines préparations à réactualiser, d'autres, au contraire, sont des changements de fond remettant en cause tout à la fois les objectifs, les structures et les démarches d'apprentissage. Ces derniers entraînent en général une fracture chez les enseignants et dans chaque enseignant, fracture qui se bipolarise entre deux extrêmes : les tenants du nouveau, apôtres de la réforme, illustrant tous les aspects positifs ; les tenants de l'ancien (généralement les plus nombreux), critiques des premiers, mettant en évidence le sens perdu ! Et si ce changement de programme s'appuie sur la prise en compte d'un changement de public, tous les épiphénomènes décrits ci-dessus s'en trouveront amplifiés.

Mon propos actuel n'est plus de dire si ces programmes sont bons ou mauvais, question qui n'a de sens que dans la passion de la première année d'application, mais d'énoncer un protocole minimal d'observation qui aurait

permis d'en corriger certains effets pervers. Cette observation pourrait être constituée par trois pôles de réflexion.

1 - La mesure de la fracture



Le schéma très caricatural ci-dessus a pour objectif d'illustrer quatre endroits de déséquilibre possibles lors d'un changement.

- Si l'enseignant a un rôle social qui lui est dévolu par l'institution, il ne peut cependant l'effectuer à l'encontre de ses conceptions personnelles.
- Si l'objectif essentiel du système est la réussite de ses utilisateurs (ici, les élèves), cette réussite ne peut avoir de sens que dans un rapport du savoir clairement défini.
- Si la question fondamentale de l'enseignement (des mathématiques) n'est pas de choisir entre rigueur et compréhension (la compréhension est première, sinon, à quoi bon enseigner !), un certain « excès pédagogique », souvent lié à des choix sociaux, peut masquer un déficit d'analyse.
- Si la résonance « externe » des concepts qui sont construits doit être un souci constant, elle ne peut se faire au détriment d'une logique interne qui en justifie la construction.

2 - La réduction de la fracture et le rôle de la formation continue

Les nouveaux programmes de collège ont, je crois, particulièrement « déséquilibré » le triangle ci-dessus, obligeant les enseignants à retrouver rapidement de nouvelles marques. Un tel déséquilibre nécessite la mise en place de rencontres entre enseignants avec deux objectifs :

- formation, c'est-à-dire proposition d'activités et de démarches illustrant les nouveautés,
- débat pour que l'ancien et le nouveau puissent se réguler.

L'objectif essentiel est que l'enseignant donne ou redonne très rapidement du sens au nouveau :

- le sens donnera des savoirs dynamiques qui déboucheront sur un enseignement de type « expertise » chez l'élève,
- l'absence de sens entraînera des savoirs statiques qui déboucheront sur un enseignement de type « recettes ».

3 - L'analyse à long terme

Cette analyse peut être de deux ordres, que je vais essayer d'illustrer dans mon article :

- L'évolution d'un élève au cours de sa scolarité : j'ai choisi d'en mesurer certains effets en analysant une activité auprès de stagiaires P.L.C.2, c'est-à-dire d'étudiants qui, après une licence, ont réussi le concours de recrutement d'enseignants de mathématiques.
- L'évolution de l'enseignement d'un concept ; j'ai choisi « Thalès ». Pourquoi ? Thalès a toujours été un moment redoutable d'enseignement. D'axiome en résultat, de propriété en théorème, déformé, dénaturé, il est cependant toujours resté comme un passage obligé dans tous les programmes. A la fois liaison entre le géométrique et le numérique, et ouverture sur le vectoriel, la barycentrisation et l'homothétie, il apparaît comme une dernière organisation en premier cycle et une première organisation en second cycle. A chaque changement de programme, il se retrouve donc au cœur des réflexions et des débats.

Les nouveaux programmes me semblent marqués par deux choix dictés de toute évidence par un grand souci pédagogique de rendre Thalès accessible à la plupart des élèves :

- sa restriction à une configuration triangulaire,
- sa confusion entre les aspects « projection » et « homothétie ».

Je me propose d'analyser quelques effets pervers de ces choix.

I - Le "Thalès du collège"

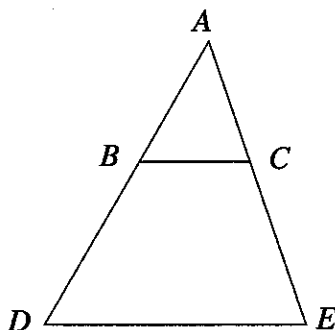
Les nouveaux programmes de collège ont fortement mis en avant la notion de « configuration-clé », dont une appellation didactique est « figure prototypique ».

Si cette notion a permis à beaucoup d'élèves de déclencher des réflexes de « reconnaissance » (C'est Pythagore ! C'est Thalès ! C'est une symétrie centrale !...), elle n'a pas permis de rendre dynamique cette reconnaissance

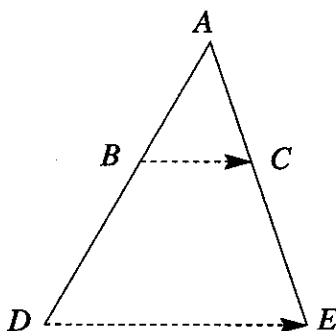
et d'en faire une connaissance opérationnelle, conduisant à une "expertise" du problème. Et c'est cette expertise qui me paraît être un véritable objectif d'apprentissage.

A - Les deux dynamiques de Thalès

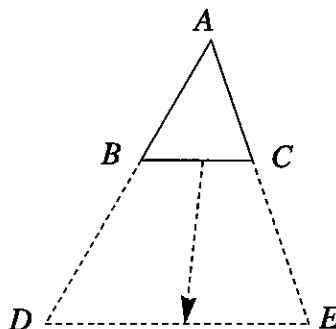
Thalès apparaît trop rapidement pour les élèves comme une configuration statique



qui cache les deux dynamiques qui ont pu le faire naître.



aspect « projection »



aspect « homothétie »

Si l'aspect « projection » va mettre en évidence le passage de la droite (AB) à la droite (AC), l'aspect « homothétie » va privilégier le passage du triangle (ABC) au triangle (ADE).

L'un des deux aspects est-il plus naturel chez l'élève ? Il est bien difficile d'en décider. En effet, dès la classe de sixième (et même avant), l'élève est capable de réaliser des réductions ou des agrandissements. Cependant, demandez-lui de trouver le milieu de deux points d'un quadrillage et il utili-

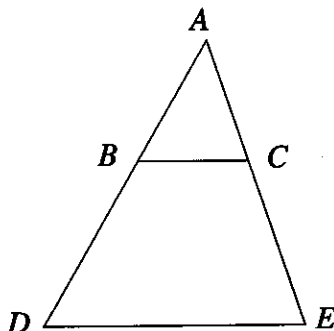
Bulletin Inter-IREM - Commission Premier Cycle

sera la projection des milieux.

- Y a-t-il un ordre privilégié dans l'apprentissage ? D'un point de vue mathématique, je pense que « OUI » et je développerai cette idée.
- Faut-il privilégier l'une des approches, occulter l'autre ? Je pense que non, car cela conduit rapidement à des impasses pédagogiques, telles celle des "petits bouts" que j'exposerai un peu plus loin.
- Faut-il que leur enseignement soit proche ou au contraire laisser du temps entre les deux approches ? Là, je ne sais pas. Je pense simplement qu'il faut que les deux aient le temps de s'installer, de se confronter et de se réorganiser en fonction de l'autre.

B - Deux dynamiques, donc deux rapports

Le schéma ci-dessous met en évidence les deux rapports spécifiques à chacun des deux aspects et l'égalité commune à ces deux aspects est justement celle donnée par Thalès.



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Thalès

k_p , rapport de projection
de (AB) sur (AC)

$$k_p = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}$$

k_h , rapport d'homothétie
de (ABC) à (ADE)

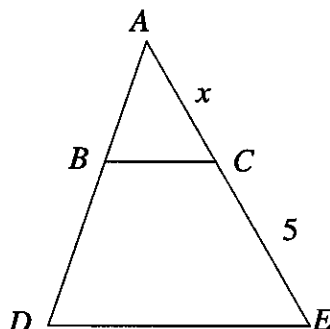
$$k_h = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

- Le rapport de projection k_p débouchera sur la notion de « cosinus »
- Le rapport d'homothétie k_h débouchera sur les notions de « sinus » de « tangente » et d'« application linéaire ».

C - Une nouvelle impasse pédagogique : « Les petits bouts »

Qu'appelle-t-on les « petits bouts » ? Dans la figure précédente, il s'agit des segments $[BD]$ et $[CE]$. Pourquoi une appellation contrôlée ? Parce que les « petits bouts » donnent lieu à des débats passionnés dans les salles de professeurs de collège ou lors de la correction du Brevet.

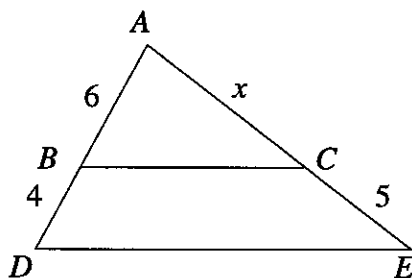
Précisons le problème.



Devant une telle configuration, l'élève se verra souvent sanctionner sans pitié le rapport $\frac{x}{5}$. On attend de lui qu'il fasse apparaître $\frac{x}{x+5}$ (soit $\frac{AC}{AE}$).

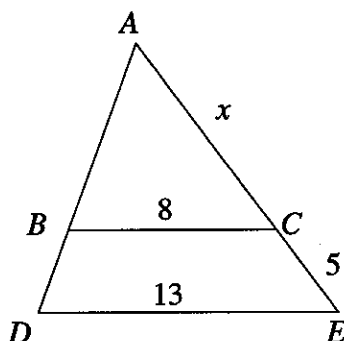
Cela a-t-il du sens ? Aucun dans l'absolu.

Si le problème proposé à l'élève est



lui interdire d'écrire $\frac{x}{5} = \frac{6}{4}$, c'est lui interdire d'utiliser une propriété de linéarité à un endroit où le seul objectif n'est pas de compléter un tableau de façon astucieuse.

Si, au contraire, le problème proposé est :



lui interdire $\frac{x}{5}$ part d'une volonté pédagogique de l'empêcher de se tromper, mais la conséquence est qu'on l'empêche de réfléchir !

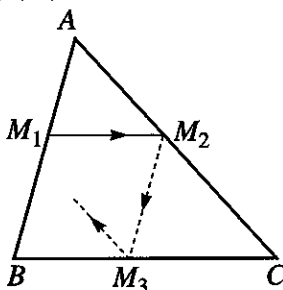
D - Pour une expertise des situations

Ce problème des « petits bouts » met bien en évidence qu'un regard statique de la figure et des rapports associés conduit trop souvent l'élève dans l'impasse. Il faut donc créer une expertise, c'est-à-dire une prise de décision dynamique, en fonction du problème rencontré. Il convient pour cela de multiplier les situations à logique différente.

En voici deux, typiques et classiques :

Situation 1

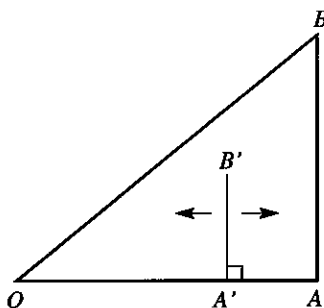
Je projette M_1 en M_2 sur (AC) parallèlement à (BC), puis M_2 en M_3 sur (BC) parallèlement à (AB), puis... Que se passe-t-il « au bout d'un moment » ?



Situation 2

$OA = 12$; $AB = 5$; $A'B' = 3$.

Où faut-il placer A' pour que O , B' et B soient alignés ?



Développer l'expertise chez l'élève, c'est l'amener à prendre des décisions :

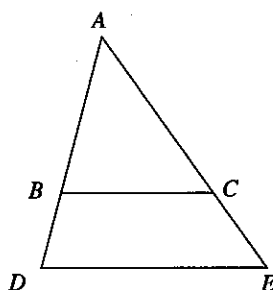
Dans la situation 1, je privilégie l'aspect « projection »

Dans la situation 2, je privilégie l'aspect « homothétie ».

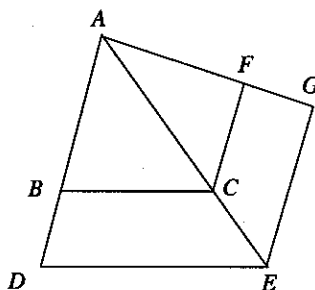
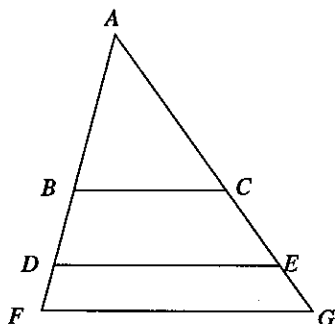
E - Un moyen d'expertise : les invariants et l'«élargissement» de la figure

Une projection est caractérisée par une direction ; un rapport de projection est alors défini par la donnée de deux droites (l'une étant le «départ», l'autre l'«arrivée»).

Une homothétie est caractérisée par son centre et la donnée d'un point et de son image qui définissent alors le rapport d'homothétie. En jouant dans un premier temps sur une seule variable à la fois, on peut amener l'élève à voir ce qu'il a le droit d'écrire (invariant) et ce qu'il ne peut pas écrire (variant) dans une modification de la « figure-clé »



Situation-mère
Situation A ← → *Situation B*



Situations-«filles» engendrées par modification d'une variable

Bulletin Inter-IREM - Commission Premier Cycle

Dans la situation A, l'invariant est l'aspect «projection» (même direction, mêmes droites de départ et d'arrivée), le variant est l'aspect «homothétie» (l'homothétie qui envoie (ABC) en (ADE) n'est pas la même que celle qui envoie (ABC) en (AFG)).

On peut donc écrire sans risque (aspect «projection») :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF} \quad (1) \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AG} \quad (2)$$

Mais aucune conclusion possible entre $\frac{BC}{DE}$ et $\frac{DE}{FG}$.

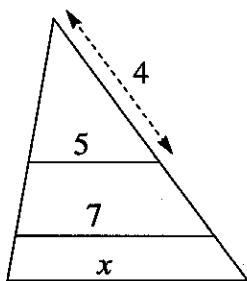
Dans la situation B, l'invariant est l'aspect «homothétie» et le variant l'aspect «projection».

On peut donc écrire sans risque (aspect «homothétie») :

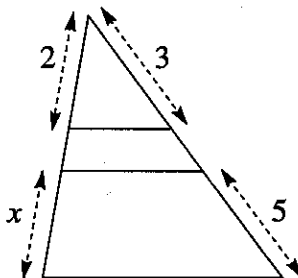
$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{EG} \quad (1) \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{AF}{AG} \quad (2)$$

Mais aucune conclusion possible entre $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{AF}{AC}$.

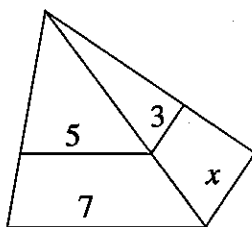
On peut alors proposer différentes configurations en demandant si l'on peut calculer x avec les «données géométriques» proposées :



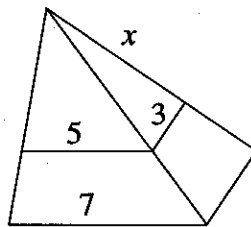
je ne peux pas calculer x



je peux calculer x

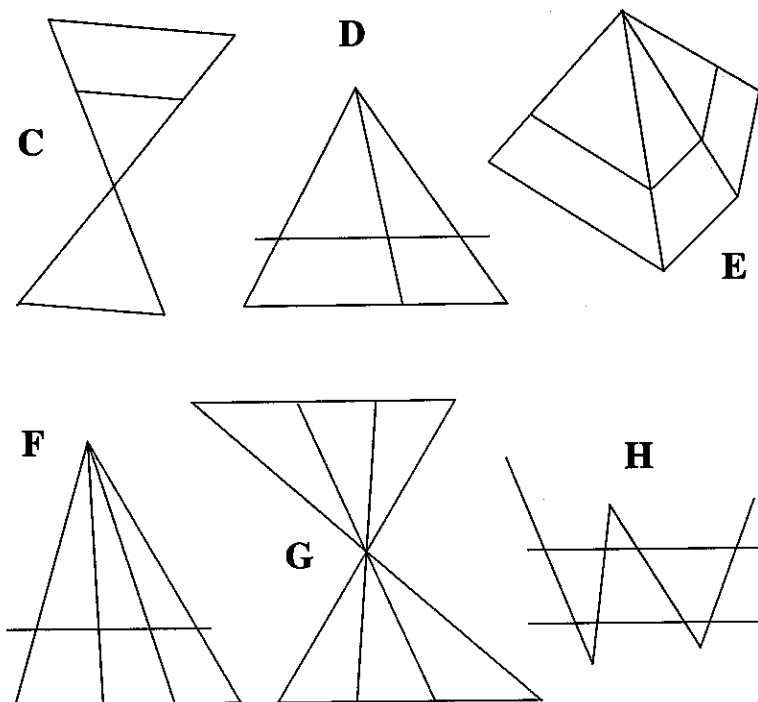


Je peux calculer x



Je ne peux pas calculer x

Beaucoup d'autres «filles» peuvent naître



Les égalités (2) ci-dessus mettent en évidence que le véritable invariant de toutes ces situations est le «vrai Thalès», c'est-à-dire celui que ne s'occupe pas du troisième côté. On n'est alors pas loin de l'énoncé en «langue française» qu'on peut par exemple trouver dans le Millet ¹ (1945), p. 137 :

«Plusieurs droites parallèles déterminent sur deux sécantes des segments proportionnels.» (Théorème de Thalès).

Et vous pouvez retrouver dans ce même manuel scolaire p. 150, fig. 306, les figures F et G ci-dessus qui illustrent le théorème :

«Des droites concourantes découpent sur deux droites parallèles des segments proportionnels.»

N'allez pas voir dans mon propos une quelconque nostalgie de l'enseignement des années 45, mais un point d'ancrage de ma réflexion : comme je

1. Ce Millet, contrairement à ce que pourrait laisser croire le sujet, n'a rien à voir avec le Thalès de Millet.

le disais dans mon introduction, Thalès a souffert d'une trop grande générosité de communication. Dans l'espoir de permettre à un maximum d'élèves de le rencontrer, on l'a coupé de deux grandes branches : dépasser la configuration triangulaire de base (objet principal de ce paragraphe) ; faire se confronter les deux logiques dynamiques qui le font vivre. Je plaide donc pour une «géométrie en mouvement».

II - L'«après Thalès»

A- En second cycle

Curieusement, Thalès, si présent dans nos programmes de troisième, disparaît assez rapidement en tant que tel dans les programmes de second cycle, ce qui pourrait conduire quelques élèves nostalgiques à écrire sur leur cahier de Maths : «*Thalès, né en Troisième, mort en Seconde*» et le plus grand nombre à dire : «*Chut! Thalès s'endort!*». Mais, s'il disparaît sous sa forme «collège», il se transforme et s'enrichit avec le vectoriel ; il accompagne la naissance d'un nouveau concept : le produit d'un réel par un vecteur. La tentation est donc grande d'attendre l'arrivée du calcul vectoriel pour introduire un «Thalès sans risque».

On peut, en second cycle, schématiser (donc caricaturer) deux grands courants d'utilisation indirecte de Thalès :

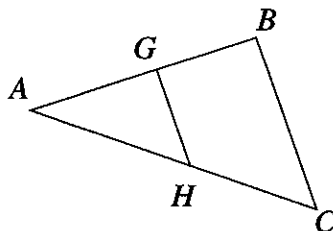
Le problème de barycentration

Si G est le barycentre de $A(a)$, $B(b)$, alors H est le barycentre de $A(a)$, $C(b)$.

On traduit alors Thalès vectoriellement :

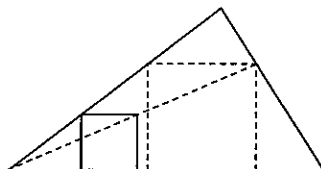
$$\text{Si } \overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB} \quad \text{alors} \\ \overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AC}.$$

Une telle utilisation met en évidence l'aspect «projection».



Les problèmes d'homothétie

Comment faire «entrer» un carré dans un triangle ? Une telle utilisation s'appuie sur l'aspect «homothétie».



Pour que des élèves de seconde puissent expertiser de telles situations, il n'est évidemment pas suffisant d'avoir introduit en seconde le produit d'un vecteur par un réel et l'homothétie. Une telle expertise repose sur toute la sensibilisation de ces deux dynamiques qu'on aura faite en collège.

De manière plus précise, une présentation purement vectorielle du théorème de Thalès lui fait perdre son sens. Si le calcul vectoriel est puissant, il occulte, pour le débutant, les aspects géométriques, la rencontre avec les «cas de figures». En outre, une présentation purement vectorielle du théorème de Thalès laisse de côté la façon dont s'est construit le calcul vectoriel.

La classique relation de distributivité $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ n'en est-elle pas une conséquence ?

Ici, le souci pédagogique rejoint le problème mathématique en jeu (la signification du théorème de Thalès) pour sauver «Thalès de premier cycle» : accepter l'imperfection momentanée d'un concept, les concessions à la rigueur de la construction, préparer les images mentales, laisser les questions sans réponses, n'est-ce pas là contribuer à donner du sens aux mathématiques, lorsqu'elles seront à même de polir cet objet d'étude !

B - Beaucoup plus tard

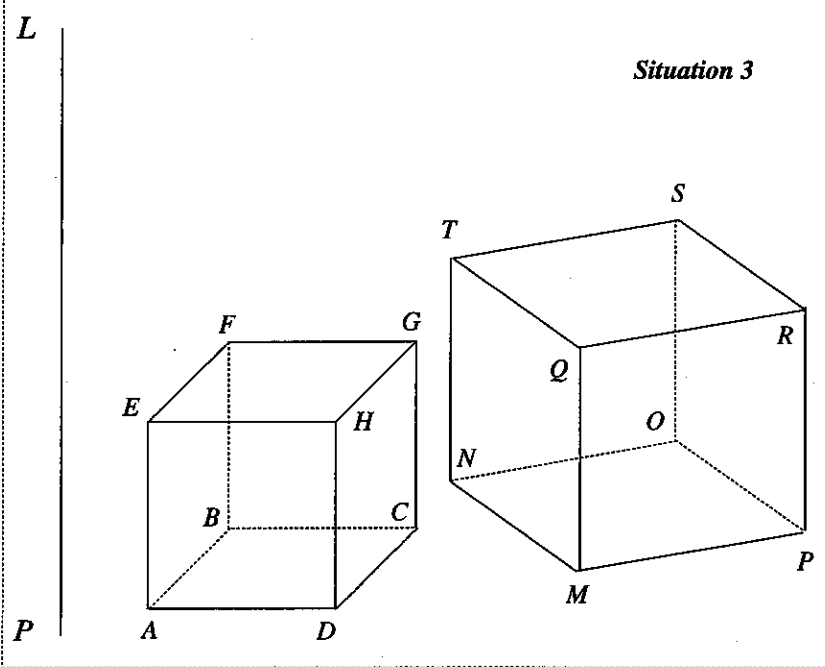
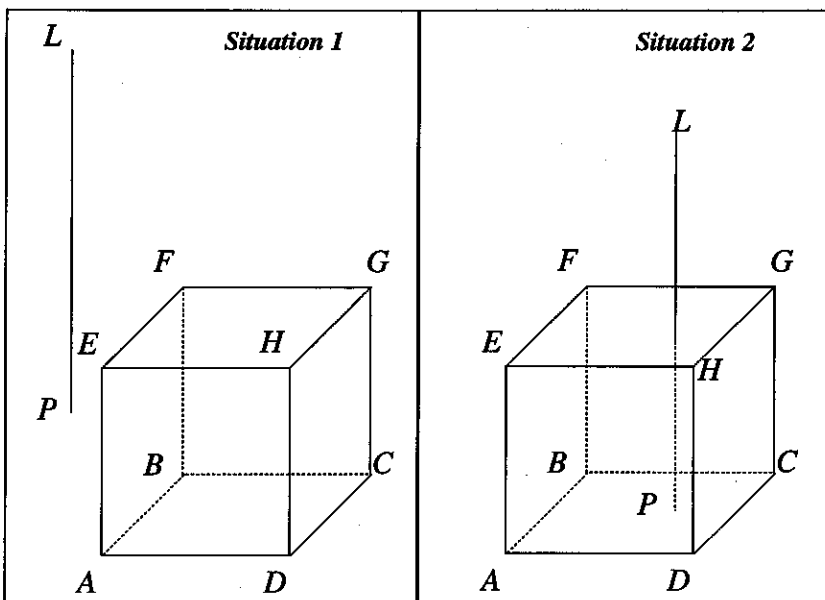
Intervenant au centre de Troyes de l'I.U.F.M. de Reims auprès des stagiaires P.L.C.2, je leur ai récemment proposé une séquence intitulée «*Observation de l'espace*» dont les sous-titres étaient : «*Pour une vision plane des objets de l'espace !*», et «*De la démonstration à la figure !*». Je m'appuyais, entre autres, sur une remarquable activité de l'IREM de Lille : «*Jeux d'ombres*». Cette activité, tout à fait adaptée à un élève de seconde, a pour objet essentiel de travailler sur les axiomes d'incidence et de mettre en évidence qu'en représentation plane d'un objet de l'espace, la démonstration précède la construction. J'avais ajouté une consigne : «Vous n'avez le droit d'utiliser qu'une règle (pas de traceur de parallèles !), c'est-à-dire de ne construire des points que par intersection de droites. Le parallélisme ne doit être que la conséquence du tracé».

Présentation de l'activité

Une lampe est située en L . Π est le plan déterminé par A , B , C et D . P est le projeté orthogonal de L sur Π .

Dans chacun des cas suivants, dessiner l'ombre du cube $ABCDEFGH$ sur le plan Π .

Les figures représentant ces situations sont situées sur la page suivante.



Analyse de l'activité

Il est d'abord à noter que cette activité fut loin d'être évidente pour nos jeunes collègues (comme elle est loin d'être évidente pour beaucoup d'entre nous la première fois !). Si les situations 1 et 2 finissent par déboucher et si elles ont mis en évidence un «Thalès» omniprésent, comme vous pouvez vous-mêmes en juger (figures 1 et 2), la situation 3 bloque beaucoup plus longtemps.

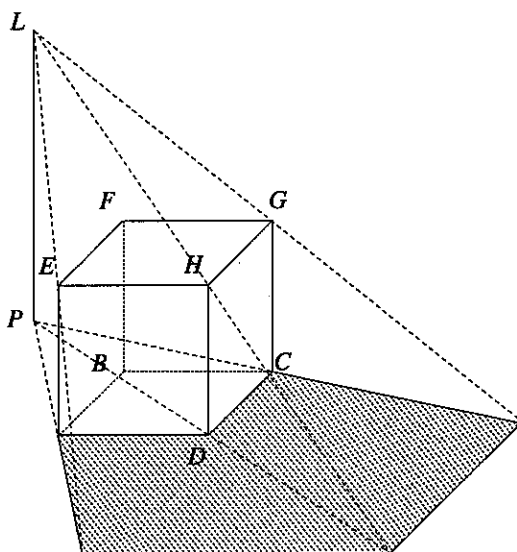


Figure 1

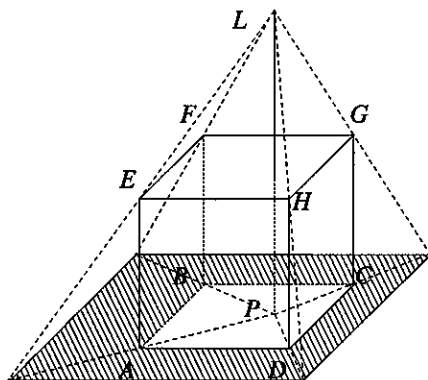


Figure 2

Trois questions firent l'objet d'une longue réflexion et d'un débat parfois animé :

- Quelle est la forme de l'ombre du premier cube sur le second ?
- Comment récupérer le sommet X de ce triangle (figure 3) ?
- Peut-on y arriver sans tracer une parallèle à (GC) ou à (PL) ?

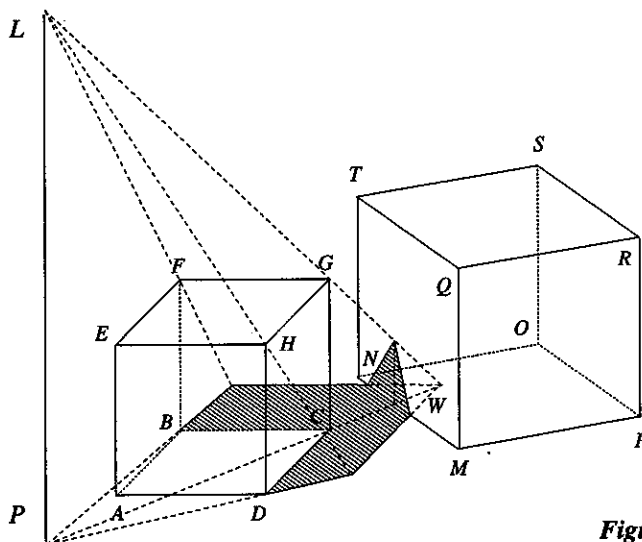
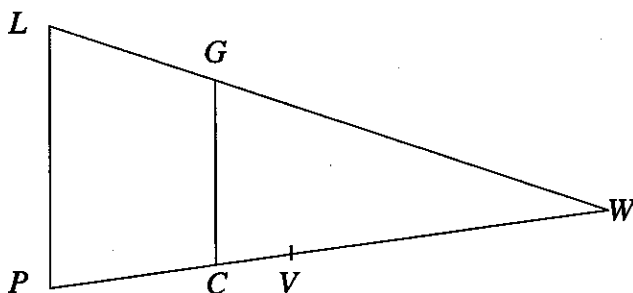


Figure 3

La troisième question a offert une grande résistance et, pour en débattre, j'ai proposé de «sortir» le problème :



Peut-on tracer, uniquement à la règle, la parallèle à (GC) passant par V ?
De multiples essais, certainement aussi de vieilles images mentales, conduisent à une solution du type :

tentation, dans le cadre d'un allègement de programme, de le renvoyer en seconde. Ce serait, je crois, une erreur : Thalès est la mise en forme mathématique des règles liant les figures et les proportions. On pourrait le résumer en disant : « donnez-moi trois points non alignés et je tiens votre plan ! ». Il est important que cette théorisation des liaisons entre numérique et géométrie, entre proportionnalité et parallélisme, soit faite pour tous les élèves, c'est-à-dire en premier cycle. En le supprimant, c'est en fait le sens même de la géométrie qui disparaît dans la mesure où la géométrie élémentaire est liée à la notion de figures semblables : que la notion vague de « même forme » conduise à des relations de proportionnalité est un des points fondamentaux de l'enseignement de la géométrie au collège ; qu'à son sujet, on amène les élèves à comprendre comment on fabrique des instruments intellectuels permettant d'une part de préciser la notion, d'autre part de l'utiliser pour résoudre un certain nombre de problèmes est l'illustration de l'enseignement scientifique.

Si Thalès est donc un incontournable du premier cycle, il existe des enseignants, de plus en plus nombreux, qui, toujours pour des raisons pédagogiques, proposent qu'on ne développe qu'un seul aspect de Thalès, le plus riche, l'homothétie (agrandissement- réduction, en l'état actuel). Cette idée est séduisante, reposant sur la conviction qu'en ne présentant qu'un aspect, Thalès sera plus facilement et plus rapidement accessible à la majorité des élèves. Pour ma part, je pense que le gain immédiat en termes d'efficacité n'évitera pas à l'élève les impasses dans lesquelles le conduiront certaines situations, comme j'ai essayé de le montrer précédemment.

Si les programmes actuels de collège proposent effectivement ces deux aspects, ils le font de façon trop mêlée pour que les élèves puissent comprendre la spécificité des apports de chacun d'eux. Plus grave, la progression proposée entre la quatrième et la troisième (théorème des milieux, cosinus, application linéaire, puis Thalès, trigonométrie en troisième, ...) ne compense pas un manque de logique mathématique interne par des choix pédagogiques justifiés.

Comme il est bien facile de critiquer, je vais aller jusqu'à faire des propositions pour améliorer (peut-être) cet état des choses :

D'un point de vue de la forme

Actuellement, une mode veut que l'on introduise Thalès avec un certain nombre de pseudo-situations (en particulier celle de la fameuse pyramide, récusée par les historiens, et dont tout enseignant honnête sait qu'elle conduit à une impasse). Je crois qu'il faut, au contraire, épurer les situations d'introduction, réduire à de strictes « figures mathématiques » l'approche de Thalès.

Les situations plus complexes viendront enrichir la vision des élèves après !

Epurer ces figures, c'est évidemment, dans un premier temps, revenir à cette fameuse configuration triangulaire. C'est un passage qui permet, sur une figure simple, de donner vie à Thalès. Mais, comme je le proposais précédemment, il ne faut pas hésiter à faire varier cette figure, la casser pour mieux la recomposer. Cette partie relève justement de la pédagogie de l'enseignant et des choix qu'il peut faire en fonction de ses élèves.

Si les deux dynamiques de Thalès doivent faire partie de notre enseignement, tant qu'à faire que de construire dans le temps ces deux approches, autant privilégier un ordre qui permette aux mathématiques de valider les différentes étapes de la progression.

D'un point de vue de la progression

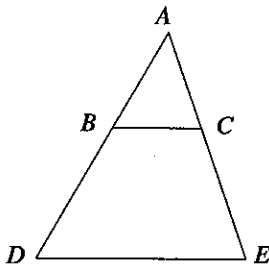
Prenant en compte toutes ces considérations, j'ai envie de proposer une progression possible :

- En quatrième, on ne travaille que sur l'aspect «projection»

Premier point : Le théorème de Thalès réduit à deux côtés

Un avantage indéniable avec les programmes actuels est qu'on peut parfaitement établir ce théorème avec des aires et ceci dès le début de quatrième.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$



Deuxième point : La projection, le rapport de projection

Sur la figure précédente, le rapport de projection de (AB) sur (AE) , parallèlement à (BC) sera $k = \frac{AC}{AB}$, car on aura pu établir avec Thalès : $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$;

on aura par linéarité $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}$.

Troisième point : Le cosinus comme cas particulier du rapport de projection

L'absence de mesures algébriques n'est pas un handicap car on ne travaille qu'avec des angles aigus.

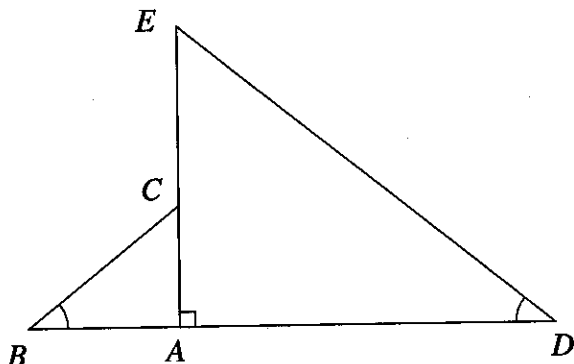
Quatrième point : Le théorème des milieux

Par contre, il vaut mieux renvoyer tout ce qui concerne l'application linéaire et l'équation $y = kx$ d'une droite en troisième.

- En troisième : On complète avec l'aspect «homothétie».

Les programmes actuels parlent d'agrandissement-réduction. Si ces mots ont l'avantage d'avoir déjà un sens auprès des élèves, en particulier après les problèmes d'échelle qu'ils ont rencontrés en cinquième, ils me paraissent d'une trop grande imprécision mathématique en troisième, car ils recouvrent de façon informelle les notions d'homothétie et de similitude.

Par exemple, sur la figure ci-contre :



Le triangle (ADE) est-il un agrandissement du triangle (ABC) ?

Si la notion de triangles semblables, liée à l'égalité des angles, peut être intéressante, il me semble préférable de la dégager dans un premier temps de Thalès.

C'est pourquoi je verrais volontiers employer en troisième le terme «homothétie». (On n'a pas hésité à parler de «rotation» en quatrième !).

Premier point : Le théorème de Thalès aspect «homothétie» ou la mise en place du rapport des troisièmes côtés.

Il est bien évident qu'alors le champ des problèmes proposés se différencie notablement de celui de quatrième.

Deuxième point : Le sinus et la tangente

Troisième point : L'application linéaire et l'équation de droite
 $y = kx$

Depuis longtemps, les élèves savent associer à la notion de proportionnalité la notion de points alignés à l'origine. Ce qu'on fait actuellement en quatrième n'est que de répéter cette chose. Attendre la troisième et le Thalès homothétie, c'est donner une justification mathématique à cet alignement, donner un sens au coefficient k , et permettre, sans le dire aux élèves, bien entendu) le passage du discret au continu.