3. Transpositions didactiques du théorème de Thalès

Le détour que nous venons de faire nous a montré un itinéraire, il commence par une incursion dans les mathématiques. Nous allons donc immédiatement étudier et soumettre à la critique les composantes du théorème de Thalès, telles qu'elles apparaissent dans la culture scolaire.

3.1. L'environnement mathématique du théorème de Thalès

3.1.1. Concepts fondamentaux

La première notion, composante incontournable, est celle de **rapport** dont nous irons chercher les racines très profondément dans les mathématiques de l'école primaire.

Comme il faudra souvent non seulement utiliser des rapports égaux mais aussi les considérer ou décrire leurs transformations, le simple usage développé au niveau élémentaire ne suffira pas. Il faudra un langage spécifique, ou plutôt un "métalangage"[8]. Celui des **proportions** créé dans ce but est utile, mais l'algèbre peut le remplacer.

La deuxième notion incontournable est celle de **parallèles** (droites ou plans) pour déterminer ces rapports égaux. Celle-ci semble introduite de façon plus "primitive", tardive et mystérieuse. Le parallélisme ne parait lié à aucune nécessité évidente à l'école. il est là, seulement déjà présent et il faut le connaître.

Une troisième notion un peu plus discrète dans l'enseignement est celle de **projection**.

Enfin on rencontre toujours au collège, avec ces composantes de base, les notions de **conservation de rapports**, et par ce biais, de **similitude**, et d'**homothétie**.

Il s'agit maintenant de savoir quels rapports mathématiques entretiennent ces notions rassemblées par la tradition dans le concept que nous appelons aujourd'hui le théorème de Thalès. Lesquelles sont fondamentales ? Lesquelles sont des conséquences logiques des premières ? Quelles notions se trouvent seulement associées aux autres pour des raisons pratiques, historiques ou didactiques par exemple.

3.1.2. Triangles et faisceau de parallèles

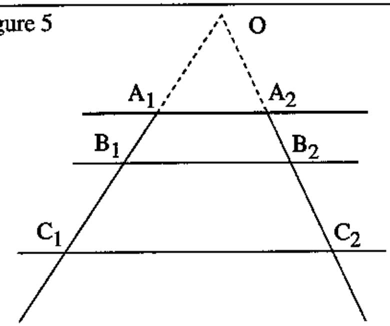
Des trois énoncés rappelés plus haut, le premier est le plus fréquemment

8 un langage pour décrire un langage

avancé en premier lieu. Dans Euclide (6ème élément, proposition 2) on trouve : "La parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les autres côtés des parties proportionnelles (et réciproquement)". Le second, qui lui est immédiatement équivalent par le calcul ne figure pas, ni le troisième sinon par l'intermédiaire de la similitude des triangles. L'homothétie n'est pas un objet mathématisé à cette époque. Ce premier énoncé ne cesse d'être repris.
Plus tard le deuxième énoncé apparaît, à peu près dégagé du triangle : "Si deux droites sont coupées par une série de droites parallèles A_1A_2, B_1 B_2, etc. leurs parties déterminées sur l'une seront proportionnelles aux parties déterminées sur l'autre.

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2} \text{ etc.}$$

Figure 5



Il faut remarquer toutefois que dans ce cas, si on ignore le point O d'intersection des deux droites, l'égalité des rapports entre les segments correspondants n'entraîne pas le parallélisme : la réciproque n'est vraie que si tous ces rapports sont tous égaux à $\frac{OA_1}{OA_2}$.

A diverses époques, on a fondé la démonstration de cet énoncé sur le théorème des milieux, ce qui obligeait à reconstruire la structure numérique de la droite avec les rapports naturels puis rationnels. L'usage essentiel de ces théorèmes est alors de permettre la construction de lignes proportionnelles (troisième, quatrième, moyenne...).

3.1.3. La dilatation ou l'homothétie dans R^2

Comme la conservation des différences détermine les translations arithmétiques et géométriques, celle des rapports conduit à la **linéarité** et aux **homothéties** numériques et géométriques. L'étude des fonctions et transformations qui conservent les rapports (arithmétiques mais surtout géométriques) est mise en avant au point que le "théorème de Thalès" n'apparaît plus parfois que comme l'instrument visible d'une modélisation : la mise en relation d'un objet et de son image réduite. Les projections et les faisceaux de parallèles peuvent n'être plus que des moyens particuliers, parmi d'autres, de conserver les rapports.

Ce point de vue s'exprime pleinement par le troisième énoncé qui centre l'attention sur le rapport d'homothétie. La forme la plus parlante est celle où on considère un ensemble de points sur une droite et leurs homothétiques (une droite est projetée sur une droite parallèle par un faisceau de droites issues d'un même point O).

Figure 6

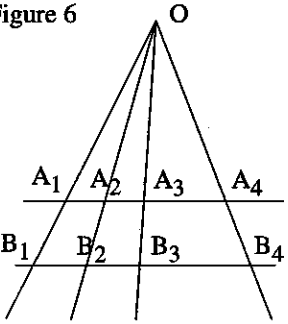
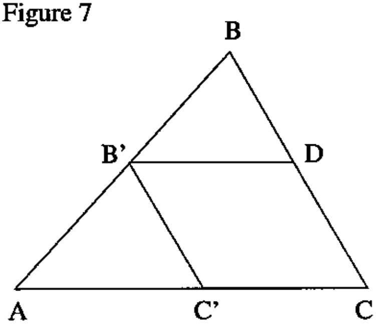


Figure 7



Il est clair que dans $\mathbb{R}^2$ les trois énoncés tels que nous les avons donnés sont mathématiquement équivalents : le premier implique le second et réciproquement, le premier et sa réciproque impliquent le troisième (il suffit de considérer (B'D), parallèle à (AC), alors

$$\frac{BA}{B'A} = \frac{BC}{DC} \text{ et comme } B'C' = DC,\ \frac{BA}{B'A} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Enfin, le troisième implique le premier (en remontant la démonstration précédente, à condition que (B'C') soit différent de (BC)). Aussi ne faut-il pas être surpris de voir à quel point le théorème de Thalès est lié et parfois même confondu - avec la notion de similitude et d'homothétie.

3.1.4. Les dilatations dans R^3

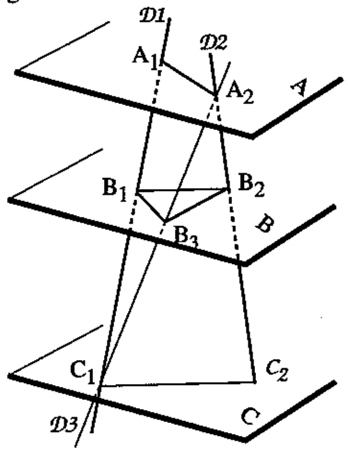
Considérons deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathbb{R}^3$ qui n'appartiennent pas à un même plan, et trois plans parallèles A, B, et C qui coupent les deux droites respectivement en A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2. La droite $\mathcal{D}_3$ déterminée par $A_2\,C_1$ coupe le plan B en B_3, distinct de B_1 et de B_2 . L'application du théorème de Thalès (sous n'importe quelle forme) dans les deux plans déterminés par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ d'une part et $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ d'autre part permet d'établir que $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2}$, ce qui correspond au premier énoncé, et donc que

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$,ce qui correspond au second.

Plus généralement toute droite non parallèle au plan A est partagée par les trois plans dans le même rapport.

Mais il n'existe aucune relation du type dilatation entre les éléments qui se trouvent dans des plans parallèles différents puisque ce qui est un triangle dans l'un correspond à un segment dans un autre et pourrait correspondre à un seul point dans un autre cas. Pour Marcel Berger, le théorème de Thalès déclare pour l'essentiel, que, dans un espace affine, des (hyper)plans parallèles (distincts) déterminent sur des droites sécantes des "vecteurs" tels que les rapports (scalaires) de leurs modules sont indépendants de ces droites (fig 8)[9].

Figure 8



[9] Explicitement

Soient H, H', H" trois hyperplans parallèles et distincts d'un espace affine X et $(D_i)_{i \in I}$ une famille de droites de X, dont aucune n'est faiblement parallèle à H.
Alors les points $d_i = H \cap D_i$, $d'_i = H' \cap D_i$, $d''_i = H'' \cap D_i$ vérifient l'énoncé :

le scalaire $\frac{\overrightarrow{d_i d''_i}}{\overrightarrow{d_i d'_i}}$ est indépendant de i e I. (Il ne dépend que de H, H' et H").

La réciproque

Sa réciproque dit que si un point sur une sécante détermine le bon rapport il se trouve à son intersection avec l'hyperplan considéré.

i.e. Si pour un i on a $d''' \in \langle d_i , d'_i \rangle$ et si $\frac{\overrightarrow{d_i d''_i}}{\overrightarrow{d_j d'_j}}$ est égal à cette valeur commune,

alors $d'''_i = d''_i = H'' \cap D_i$

On peut en déduire la réciproque formelle : "si des ensembles de points déterminent sur toute droite sécante des segments en rapports égaux, si l'un est un plan, les autres le sont aussi et lui sont parallèles".

Nous avons le choix entre attacher le nom de Thalès à l'un ou l'autre des énoncés, mais ils ne sont pas équivalents en général (explicitement dans $\mathbb{R}^n$ pour $n > 2$). Nous reviendrons plus loin sur cette alternative. Remarquons que les énoncés choisis par M. Berger éliminent toute référence à des correspondances et à des conservations quelconques entre les structures déterminées par les points d'intersections des sécantes avec les plans parallèles.

Pour qu'une homothétie apparaissent, il faut que **les droites soient concourantes**. (ou réciproquement que des triangles - ou des polygones plans - semblables aient leurs côtés parallèles, ce qui, d'après le théorème de Desargues, est équivalent). Ce n'est pas le cas en général ! Il est intéressant de souligner comment le plongement dans un espace de dimension supérieure permet de séparer des propriétés qui paraissent liées.

3.2. Transpositions didactiques du théorème de Thalès

3.2.1. Alternatives

Les programmes des cinquante dernières années ont exploré plusieurs des possibilités de présentation du Théorème de Thalès avec des succès et des difficultés divers. Mais tous ont été contraints d'introduire le théorème dans $\mathbb{R}^3$. Alors les sécantes sont dans un même plan et sont concourantes deux à deux, les hyperplans sont des droites, les structures déterminées par les points d'intersections sont toutes des segments ou des points et elles sont nécessairement homothétiques. Ces propriétés singulières, jointes à un intérêt forcené pour les triangles mettent donc en scène ce que les enquêteurs de l'APMEP ont appelé le point de vue "dilatation" une nouvelle correspondance entre les structures déterminées sur les parallèles.

Ce "mélange" avec une propriété étrangère est une conséquence d'une transposition didactique dont on peut remarquer qu'elle est assez ancienne. Est elle légitime ? Est elle efficace ? Peut on faire autrement ? Faut-il introduire les notions suivant un ordre axiomatique rigoureux ? Jusqu'où une introduction dans un cadre riche permet elle des démonstrations correctes ?

Remarquons que nous sommes dans le cas de ce que nous appelons parfois une **présentation "ostensive" du théorème de Thalès** : on en a retenu un cas particulier représentatif et on voudrait en extraire les propriétés essentielles. On peut aussi observer avec quelle force les propriétés parasites "collent" au prototype.

---

9 (suite) La notion sous-jacente à ce texte est celle de **projection** canonique. Elle n'apparaît pas explicitement dans le texte mais M. Berger l'utilise immédiatement pour le résumer.

3.2.2. Propositions

Première proposition : toute situation fondamentale du Théorème de Thalès tel qu'on l'entend aujourd'hui dans la communauté des mathématiciens devra exclure l'homothétie et donc, ou bien mettre en scène $\mathbb{R}^3$, ou bien éliminer le point d'intersection des sécantes, soit en le cachant, soit en mettant trois sécantes et en multipliant les parallèles...

Deuxième proposition : avant de blâmer et surtout de réformer les décisions didactiques non conformes à l'axiomatique mathématique, commençons par chercher à comprendre le tissu de leurs implications. Ce n'est sans doute pas sans raisons profondes que des générations de mathématiciens enseignants ont adopté ou accepté cette introduction hétérogène, et les conséquences de ce choix ne s'effaceront pas d'un trait de plume, même si c'est celle d'un ministre...

Il est temps de prolonger notre promenade en direction de l'étude des situations qui président à l'emploi de ce théorème, celles qui sont indépendantes de l'homothétie comme celles qui lui sont liées. Le but de ces études est de savoir si on peut ou non introduire pratiquement le théorème sans recours à l'homothétie, quelle place prendrait-il dans ce cas et quelles pourraient être les raisons didactiques de la co-présence constante de l'homothétie. Il faut connaître les conditions d'emploi des énoncés mathématiques pour dresser ce que Y. Chevallard appelle leur "niche écologique" si on veut prévoir les modalités, les difficultés et les conséquences d'une modification de leur position.

Nous renvoyons à une dernière partie la recherche des significations possibles et des processus d'ensemble susceptibles de modifier sensiblement la position didactique du théorème pour l'ajuster au mieux aux élèves, à sa position mathématique et à sa position culturelle.

4. L'ingénierie didactique du théorème de Thalès

4.1. Sans l'homothétie.

Existe-t-il une ingénierie propre au théorème, c'est-à-dire réalisant les conditions énoncées ci-dessus et indépendante de l'homothétie ? Nous laisserons volontairement de côté dans cet article l'étude des exercices et des problèmes auxquels ce théorème peut s'appliquer. Il existe sur ce point une abondante littérature (et je n'ai pas grand chose d'intéressant à dire, aujourd'hui, sur ce sujet). D'autre part au risque de décevoir les lecteurs, nous ne ferons qu'esquisser les conditions d'une solution. Ce problème est l'un des plus importants et des plus difficiles abordés dans cette brochure.

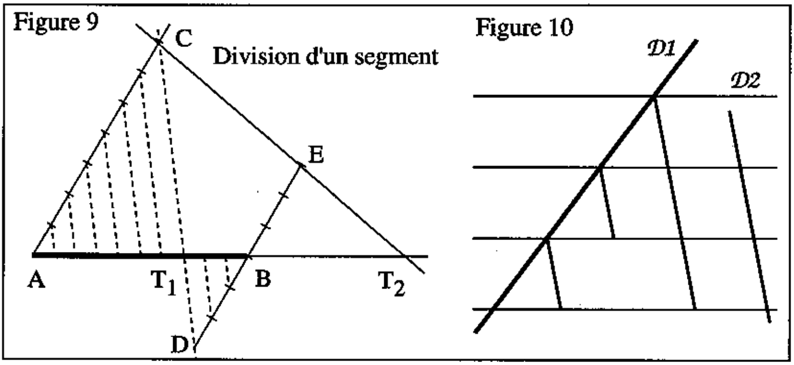
4.1.1. Une forme élémentaire de Thalès. Projections

L'environnement moderne place auprès des enfants des faisceaux de **parallèles équidistantes** : lames de parquet, rayures du cahier etc. Voilà une bonne occasion d'utiliser un cas particulier du Théorème de Thalès pour partager un bâton ou un segment en parties égales, ou pour faire un abaque servant à diviser des nombres (représentés par une longueur exprimée en millimètres par un naturel) par un nombre entier simple.

Les éléments sont dans $\mathbb{R}^2$ mais les sécantes sont nombreuses et non toutes concourantes.

Il s'agit aussi bien de transporter, de projeter une graduation d'une droite sur une autre avec un transparent réglé.

Les enfants du CM peuvent très bien apprendre la méthode, la vérifier et finir par la trouver évidente mais je ne les crois pas capables de comprendre spontanément ni d'inventer directement que l'égalité des segments ainsi déterminés sur des sécantes, ne dépend pas de leur orientation.



Le problème ne peut donc pas être utilisé tel quel comme situation d'apprentissage a-didactique dans une pédagogie "constructiviste". En revanche, il peut être utilisé dans une didactique de type formellement "dogmatique" (le professeur présente le savoir, l'élève l'apprend, puis l'applique) ou maïeutique (le professeur prend à sa charge toutes les questions qui feront surgir le savoir comme réponse, et surtout leur articulation, quelles que soient les connaissances des élèves). Ce n'est pas un argument suffisant pour s'interdire de l'enseigner et de l'utiliser dès l'école primaire. Il permet peut être d'établir le théorème relatif à des rapports quelconques.

Bien sûr, il faut que la situation permette une justification, au moins implicite, du théorème. Serait-il possible ensuite de faire chercher et trouver la démonstration aux élèves de ce niveau (entre CM et 5ème) en profitant de l'étonnement que la propriété pourrait provoquer ?

L'étude d'ingénierie a-didactique est pour moi un problème ouvert, mais je ne le crois pas insurmontable. Il est nécessaire sans doute que les élèves disposent d'une bonne connaissance du parallélogramme. Il leur suffit alors d'envisager (implicitement) les translations convenables pour imaginer/ comprendre/ et peut être expliquer pourquoi le réseau de parallèles équidistantes partage une sécante quelconque en segments égaux (fig 10).

Ce mode d'introduction a été utilisé dans le passé avec le style didactique classique, et il a été abandonné on ne sait trop pourquoi.

4.1.2. Le parallélisme

Comment développer un bonne connaissance du parallélogramme et justifier son introduction ?

Nous avons utilisé des situations a-didactiques de communication, qui favorisent la création des connaissances nécessaires à la description et à la construction des figures par les élèves en vue de leur reproduction (études dans Berthelot et Salin puis D. Fregona).

Parmi les formes que les élèves doivent reproduire dans ces situations, les quadrilatères leur posent des difficultés intéressantes. Par contre, il ne reconnaissent les propriétés caractéristiques des parallélogrammes que grâce à la culture. Cette introduction des parallélogrammes n'est donc qu'une ostension améliorée.

L'introduction des droites parallèles par une situation non ostensive est un tout autre problème. En fait, la triangulation et le mesurage des longueurs suffisent à la résolution de tous les problèmes concrets de mesure directe de la terre, la γεομετρια au sens primitif, ceux dont on doit s'occuper à l'école primaire. La notion de parallèles paraît étrangère à ce champ de connaissances.

J'avancerai l'hypothèse que les parallèles sont des objets appartenant à la conception micro-spatiale. Leur utilité essentielle pourrait être de simplifier la représentation du macro-espace dans le micro-espace. C'est donc probablement dans des situations où les symétries ou les translations de droites interviennent qu'il faut chercher une situation d'apprentissage a-didactique des parallèles. Dilma Fregona a proposé dans sa thèse[10] une excellente situation basée sur la nécessité de prévoir la position d'éléments de pavage du plan.

Je me souviens avoir été soudain choqué, en préparant mon baccalauréat, par les définitions naturalistes des objets géométriques qu'on m'avait enseignées dans mon enfance, ces points infiniment petits, ces lignes infiniment minces, cachaient finalement un univers de questions et d'axiomes fort complexe. Et plus que toutes, la définition des parallèles comme droites ne se coupant jamais, sinon à l'infini, me paraissait une complication inutilement philosophique. Pourquoi ne pas les présenter de façon constructive, comme des droites perpendiculaires à une même troisième, (ou formant avec elle un même angle quelconque) ?

Un telle définition pourrait former avec Thalès, avec l'étude des rapports et avec la construction des rationnels un environnement (un milieu) assez homogène.

4.2. La genèse scolaire du théorème de Thalès, avec l'homothétie

Pour décrire une genèse, il faut descendre le cours du temps, mais pour en comprendre la nécessité, il faut le remonter. Il s'agit de montrer ce qui détermine les choix didactiques : profiter d'une notion bien connue, renforcer un apprentissage en cours ou en préparer un futur.

A chaque étape, ces choix modifient la position des savoirs et leur rôle. Nous allons essayer de comprendre comment, tout au long de la scolarité obligatoire, l'importance de la notion de représentation et surtout celle de représentation d'un objet grand par un petit objet plus ou moins analogue, pousse les enseignants à joindre la similitude et l'homothétie à l'énoncé du théorème de Thalès.

4.2.1. De Thalès, à l'homothétie

L'introduction par la "dilatation" suppose connue la similitude. Les activités associées sont plutôt du type "agrandissement et réduction de figures et "préparent l'introduction ultérieure de l'homothétie" disent les auteurs de l'enquête APMEP (p. 31). Ne pourrait-on pas dire que l'interprétation de "dilatation" de Thalès est là POUR l'introduction future de l'homothétie ? Quels seraient les arguments pour et contre cette hypothèse ?

D'autre part, l'étude de la similitude, surtout des triangles tient une place si importante à ce moment des études que la plupart des problèmes la mettent

[10] Dilma FREGONA *"Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques"* Thèse de l'U. Bordeaux 1. 1995 (LADIST)

en œuvre. On rencontre rarement des problèmes excluant l'intersection des sécantes (car ils ne sont plus au programme). Les énoncés de la forme Thalès-projections ou Thalès-conservation trouvent donc très peu d'applications directes et devraient être interprétés dans tous les cas de "dilatations". Il est donc "rentable" pour faciliter la résolution des problèmes traditionnels d'introduire directement la troisième forme et de la lier étroitement aux deux premières, quitte à laisser entendre qu'elles sont équivalentes. Lorsqu'on abordera $\mathbb{R}^3$, une courte remarque corrective pourra paraître suffisante. Le sera-t-elle ? La collusion avec l'homothétie correspond à un équilibre didactique qui paraît difficile à rompre.

Ces observations ne doivent pas être prises comme établies, elles appellent des vérifications systématiques qui font l'objet des tâches ingrates mais nécessaires de la didactique scientifique réelle[11] .

4.2.2. De la similitude à Thalès

D'après notre étude précédente, le passage a-didactique de la similitude au théorème de Thalès devrait être le point faible de la chaîne. Comment le justifier ?

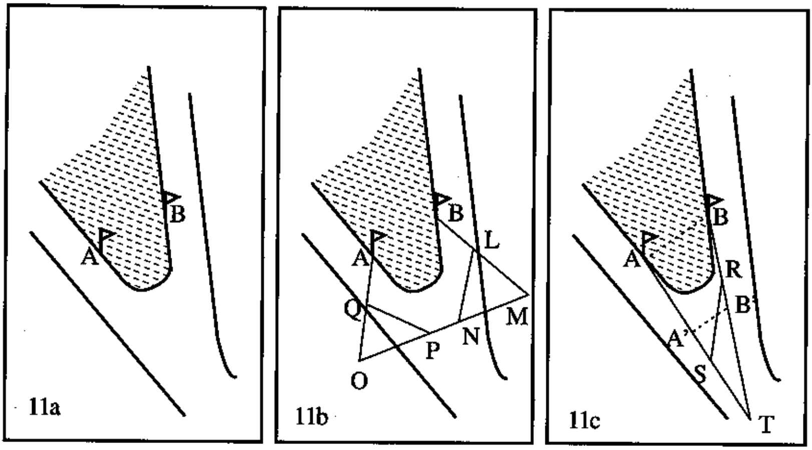
C'est probablement l'importance de la similitude, elle-même due à celle de la linéarité, qui conduit les enseignant à la faire intervenir. Il est toujours intéressant d'activer une connaissance importante en l'utilisant dans des applications et de profiter de la familiarité d'une notion pour y adjoindre un savoir nouveau.

Considérons la situation suivante qui illustre la proximité culturelle des deux problèmes. Elle ressemble à celle de la légende de Thalès : Il s'agit de connaître la distance entre deux fanions plantés dans un jardin sans passer aucun objet entre eux ni au-dessus d'un territoire interdit au bord duquel ils se trouvent (fig. 11a). Dans ce problème[12], proposé à des élèves de CM2, la représentation à l'échelle n'était pas explicitement proposée mais elle était nécessaire à la résolution.

La solution requiert la construction d'une configuration **solide** (cette condition n'est pas évidente pour les élèves) de segments extérieurs à la zone

11 qui se nourrit peut être d'environ 30 % d'observations, d'expériences, et de tâches matérielles, 20 % de sueurs rédactionnelles, 10 % d'expériences d'enseignement, 10 % de lectures scientifiques et de compilation, 10 % d'organisation méthodoque, 10 % d'activités administratives, de 5 % d'interactions scientifiques, 4 % de réflexion et 1 % d'idées originales !!

12 Extrait de *"Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire"* de N. et G. Brousseau 1987, IREM de Bordeaux



interdite et incluant les deux fanions (fig. 11b), la plus simple sera la meilleure (fig. 11c).

Une solution simple consiste à reproduire cette configuration à l'identique (échelle 1/1) dans un espace libre à côté du jardin.

Une représentation à l'échelle sera bien plus maniable et ergonomique qu'un simple déplacement. Les élèves mesurent et reproduisent à une échelle quelconque AT, BT, ST, RT, et SR puis mesurent AB sur le plan et calculent la distance réelle (avant de vérifier leur prévision).

La solution de ce problème n'est pas une simple application des cours habituels, et sa mise en scène procure aux enfants une bonne émotion, un réel sentiment du pouvoir que donne un modèle correct sur une réalité complexe.

Le théorème de Thalès semble tout proche, il suffirait de peu de chose pour que le segment SR qui détermine la valeur de l'angle prenne la position A'B' (parallèle à AB) (fig. 11c) et que le triangle A'B'T soit **sur le terrain lui même** la représentation à l'échelle du triangle ABT.

L'orientation du plan pourrait en donner cette idée qui diminue grandement le nombre des mesures et des calculs : il suffit de mesurer A'T, AT, BT, calculer B'T et le réaliser pour placer B', puis mesurer A'B' et calculer AB. Il me semble que cette idée n'a aucune chance d'être comprise et encore moins inventée à ce moment là.

La situation fondamentale qui pourrait assurer ce passage devrait répondre à la question suivante :

(1) Imaginons par exemple deux figures semblables, triangles ou même segments, libres de tourner autour de deux points correspondants. Qu'est-ce qui change, tout à coup, lorsqu'elles passent par la position qui les rend homothétiques ? Quel problème pourrait bien se trouver résolu à ce moment là ?

4.2.3. Des rapports à la similitude

Dans le même ouvrage, les nombres rationnels non entiers sont introduits comme application linéaire implicite dans une situation bien connue : l'agrandissement du puzzle.

Il s'agit pour les élèves de trouver les dimensions des pièces d'un puzzle agrandi. Les enfants connaissent l'image d'un seul des côtés des formes qui composent le puzzle. Il ne s'agit pour eux que de trouver les images d'une application linéaire (homothétie numérique rationnelle) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais le plongement dans $\mathbb{R}^2$ (similitudes) fournit les éléments de contrôle du résultat, indispensables pour obtenir les autocorrections caractéristiques des situations d'acquisition a-didactiques.

Les observations et les recherches effectuées sur cette situation montrent à quel point la reconnaissance de formes typiques joue un rôle important dans l'identification et la dénomination des figures. Mais elle montre aussi que le répertoire des formes utilisées spontanément pas les élèves est beaucoup plus fin et ne coïncide pas avec la classification mathématique : un trapèze peut être une bassine, une assiette ou une chaussure suivant le cas, et sa base peut être le fond ou la semelle. L'usage des figures de sens et principalement des métaphores et des métonymies non mathématiques (il en existe dans la culture mathématique aussi) ne peut généralement pas être retenu comme un moyen légitime de mobilisation du sens, et d'ailleurs la plupart sont totalement inefficaces ou même désastreuses pour les raisonnements.

Dans cette situation, la similitude n'est pas basée sur une appréciation perceptive des formes semblables mais sur sa propriété fonctionnelle fondamentale d'additivité des images.

4.2.4. Des proportions à la similitude

La notion de "rapport" pourrait aussi être introduite directement, dans la configuration indiquée plus haut (Thalès sans l'homothétie), par exemple pour caractériser les distances entre des droites ou des plans (forme conservation des abscisses) ou pour caractériser les pentes des sécantes (forme rapport de projection).

La figure 9 montre comment déterminer 7/10 de AB. On récupère ainsi, non seulement les rapports rationnels, mais aussi les algébriques, et sous certaines conditions les réels eux-mêmes. Peut être R.Thom pensait-t-il à ce genre d'introduction ?

Peut être qu'une des difficultés de la forme "conservation des abscisses" provient justement d'une confusion entre deux points de vue ? La conservation des abscisses permet le transport des graduations d'une droite sur une autre. Alors, dans l'espace métrique usuel, suivant les droites, les mêmes graduations ne correspondent plus aux mêmes distances. A chaque point, se trouvent associés plusieurs nombres. La décision de bien séparer les propriétés des espaces affines et métriques conduit les élèves à confondre les distances et leurs rapports, et complique leur tâche.

4.2.5. Des rapports, aux proportions

Nous n'évoquerons ici aucune des nombreuses situations qui jalonnent, dans la scolarité primaire, l'acquisition de ces notions. Quoiqu'il en soit, la similitude hérite de l'importance, légitime sans doute, donnée dans l'enseignement primaire à la fonction linéaire et à la **proportionnalité**. La plupart des manuels mettent bien en évidence, aujourd'hui, une correspondance entre deux univers - numériques le plus souvent - et bien distincts, correspondance qui conserve certaines relations. Une correspondance entre deux "espaces" est formellement plus facile à traiter qu'une transformation, même concrète dans un même espace. C'est peut-être une des raisons pour lesquelles, traditionnellement, l'étude des représentations à l'échelle se réduit à des calculs.

Lorsque ces isomorphismes sont identifiés, il sont immédiatement assimilés à celui dont l'usage est majoritaire : la multiplication par un coefficient, au point que très vite, les deux notions se confondent : toute correspondance doit exprimer une fonction linéaire et représenter un coefficient de proportionnalité.

Ce phénomène est de même nature que celui qui fait fondre le théorème de Thalès et l'homothétie. Nous pourrions appeler "**captation de sens**" le phénomène didactique qui conduit ainsi une notion ou une présentation particulière d'une notion, à absorber le sens véritable, plus général, par l'effet de la fréquence relative d'emploi du cas particulier dans les problèmes et application.

Une certaine manière de comprendre la multiplication par un nombre (naturel) peut faire de ce dernier une sorte de coefficient d'agrandissement. Mais curieusement, les coefficients qui accompagnent une équation aux dimensions sont parfois plus faciles à comprendre que les scalaires dans un même espace.

La notion de “rapport géométrique” multiple (naturel) apparaît dès le cours préparatoire lorsque le nombre naturel comme scalaire (nombre de fois) se substitue au naturel mesure. Il apparaît comme plus puissant que le “rapport arithmétique”, trop évident (?) et peu théâtral et absorbe le mot rapport.

Mais l'idée d'établir une relation de représentation entre un objet et un modèle à l'aide d'une analogie prend ses racines didactiques encore plus profondément.

4.2.6. De l'analogie aux rapports et proportions

Tout acte d'enseignement repose sur l'affirmation de certaines similitudes modulo la taille : le maître dessine en grand, au tableau, ce que l'élève doit reconnaître comme la même chose dans son livre ou sur son cahier. Mais entre cette compétence “naturelle” exigée de chaque élève et la connaissance effective des caractères qui soutiennent ces analogies et ces représentations, il y plus que l'épaisseur d'une hypothèse empiriste.

La représentation d'un rapport correct, par exemple celle d'un rectangle par un rectangle “allongé pareil” suppose un long processus de centration et de décantation des composantes contextuelles dont nous avons parlé plus haut. Ce processus s'effectue, avec ou sans le professeur, mais la maîtrise scolaire de cette connaissance passe - et combien lourdement - par le numérique.

4.2.7. De la symbolisation à l'analogie

Les notions de correspondance, de caractère commun et de représentation d'un objet par un dessin commencent à l'école maternelle. Il n'est pas indifférent pour notre propos de savoir comment se forge l'idée de représenter un grand objet par un petit.

Un enfant qui dessine une maison représente-t-il une maison ou accomplit-il une activité rituelle dont les éléments symboliques lui sont fournis par son milieu ?

Dans le premier cas, il prend effectivement en charge certaines relations entre son modèle et le dessin : par exemple il fait deux portes parce que sa maison a effectivement deux portes. Dans le second, il ne travaille qu'au niveau symbolique : une maison-icône ou métaphore a toujours une seule porte, deux fenêtres placées symétriquement et une cheminée... quatre fenêtres et c'est un château.

Type de représentation / Objet représenté	Bulldozer	Indien	Bille en porcelaine	Bille dite "triple"	Grenouille
Trace					modèle trop grand : trace impossible
Trace enrichie de caractères distinctifs					
Trace enrichie d'un caractère "oppositif" iconique					
Trace enrichie d'un caractère "oppositif" non iconique					

TABLEAU 1

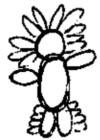
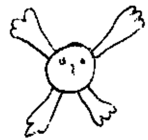
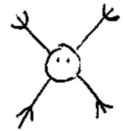
Objet représenté / Type de représentation	Bulldozer	Indien	Bille en porcelaine	Bille dite "triple"	Grenouille
Représentation figurative					
Représentation figurative réduite					
Représentation "analogique"					
Autres : métaphores, métonymies etc.					

TABLEAU 2

Nous avons étudié la création effective des divers codes [13] en proposant aux enfants de 5 ans l'activité des "trésors", une situation où ils devaient se souvenir des objets placés dans une boîte, le matin, devant eux. Ces petits objets étaient choisis parmi un ensemble assez important et étaient eux-mêmes assez nombreux pour que les élèves doivent en faire la liste. Et comme ils ne savaient pas écrire, ils devaient les représenter par des dessins. Les objets étaient choisis de manière appropriée pour nécessiter ou favoriser toutes sortes de modes d'identification et de représentations et nous avons pu en observer la mise en oeuvre.

Le premier procédé qui apparaît est la trace. Les enfants décalquent le contour de l'objet à représenter, ensuite ils enrichissent le dessin de caractères oppositifs ou de détails distinctifs (tableau 2. p. 30-31).

La grenouille, beaucoup plus grande que la feuille de dessin leur pose un réel problème.

L'idée d'inventer un dessin petit qui ressemble (qui présente quelques traits) à son grand modèle ne vient pas immédiatement. Mais lorsqu'un enfant résout le problème, la plupart des autres l'imitent et tous envisagent cette "découverte" comme une conquête précieuse.

4.2.8. Légitimité de cette transposition didactique

En appuyant aussi lourdement dans les paragraphes précédents, sur les situations, même les plus primitives, qui contribuent à faire pénétrer chez les élèves, la similitude dans l'environnement sémantique du théorème de Thalès, j'ai voulu esquisser une fresque des dépendances très complexes qui s'établissent dans un curriculum.

Les efforts didactiques des professeurs tendent à faire que chaque étape suive sans heurt les précédentes, les justifie, les rentabilise. Ainsi, chaque jour ressemble le plus possible au précédent et reproduit ses acquisitions, ses rites, et... ses erreurs. Ces liaisons doivent respecter bien d'autres contraintes que les contraintes mathématiques, et il arrive constamment qu'elles soient plus ou moins violées dans la transposition. Dans la culture scolaire, le théorème de Thalès est proche de la notion de similitude et contribue à l'étude de l'homothétie pour des raisons didactiques.

13 avec J.M. Digneau en 1980: *"Création d'un code à l'école maternelle"* DEA U. Bordeaux 1 , puis plus précisément avec J. Peres *Construction et Utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle* (1984) Thèse. U. Bordeaux 2

5. Les significations du théorème de Thalès

L'étude des situations fondamentales succinctement présentée ci-dessus nous a donné de bonnes indications sur les moyens de constituer des sens acceptables pour le théorème de Thalès, mais elle laisse soupçonner que le sens et la position mathématique devraient s'effacer à l'école devant un autre. Mais pourquoi alors le théorème de Thalès, si bien enraciné et entouré, rencontre-t-il encore des difficultés ?

Faut-il renoncer à améliorer l'enseignement pour cause de respect des traditions ou de complexité de la tâche ? Ces raisons générales et plutôt vagues ne sont pas convaincantes. Dans ces "raisons didactiques" le sens de la notion se perd à nouveau.

Alors Thalès est mal compris et mal appris, et c'est bien fait ! Est-ce irrémédiable docteur ? Comment cette transposition didactique peut-elle exister ? Quel sens donne-t-elle à la notion ? Elle donne plus d'importance à ce théorème qu'il n'en a en mathématiques : c'est la culture et la noosphère qui gèrent cet écart. Lequel des deux sens est compatible avec l'histoire.

5.1. La dimension émotionnelle des connaissances

La clé de l'acquisition des connaissances se trouve sans doute dans la dimension émotionnelle des situations où elle se produit. Celles que nous avons évoquées ci-dessus ont pour objet de montrer quelle succession de découvertes, d'aventures et de victoires exaltantes peuvent conduire un élève à connaître, à comprendre, à appliquer, à savoir discuter et à utiliser le théorème de Thalès. Mais ces découvertes doivent s'organiser, localement d'abord, puis finalement se réorganiser en une histoire intelligible appuyée sur des sentiments à la mesure de la place qu'elles tiennent dans les mathématiques, dans l'industrie et dans la culture.

Il y aurait donc deux sens, l'un donné par l'histoire des mathématiques, l'autre donné par la noosphère et la didactique ?

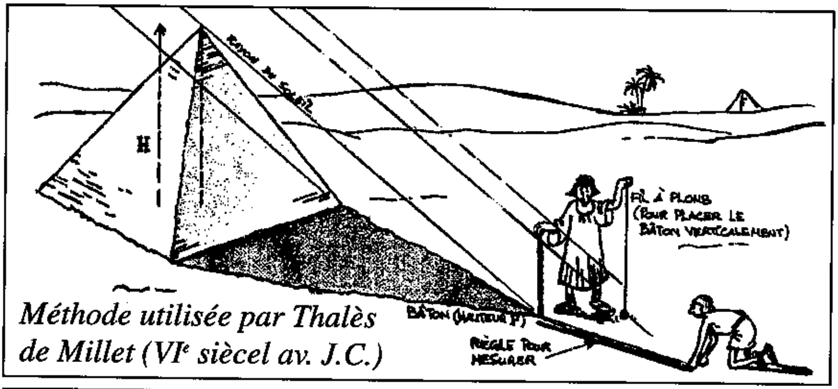
Pour reproduire ou simuler, en situation didactique, l'émotion associée à la "découverte" du théorème de Thalès il est donc nécessaire d'examiner les raisons pour lesquelles l'humanité lui a donné la résonance que nous savons. La vérité historique nous intéresse moins pour l'instant que la dimension mythique ou symbolique. Pourquoi l'humanité fait-elle si grand cas de ce résultat en apparence si dérisoire...?

5.2. La légende de la hauteur de la grande Pyramide.

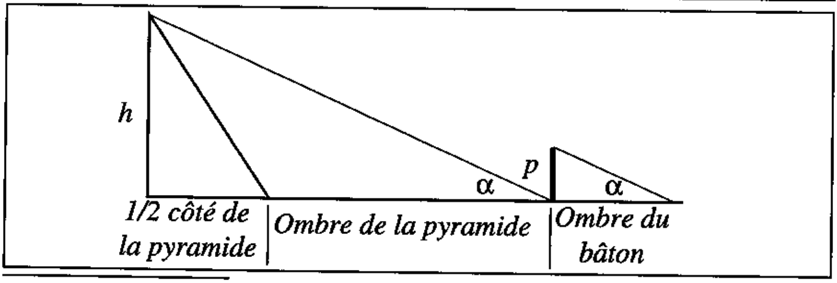
Tout d'abord, le théorème a bien été découvert à cette époque puisque deux siècles plus tard il est dans les éléments d'Euclide (et n'y est attribué à personne naturellement), sous ses deux formes, chacune à sa place correcte, la première (§ 3.1.2.) dans la partie 6 consacrée à la géométrie plane, la seconde dans l'élément 11 consacré aux relations dans l'espace, et il est présenté bien sûr sans aucun rapport avec l'homothétie.

C'est la légende qui nous intéresse. Pourquoi cette histoire de bâton planté dans le sol pour mesurer la hauteur de la pyramide a-t-elle eu ce retentissement ?

Examinons tout d'abord les méthodes que l'on prête à Thalès. Celle rapportée sur la figure 12 ci-contre est typique[14] : il s'agit toujours d'inscrire la hauteur de la pyramide et le bâton dans deux triangles placés dans un plan vertical , en position homothétique ou presque comme ici (à une translation évidente près) afin de se rapprocher de l'illustration scolaire.



Méthode utilisée par Thalès de Millet (VI^e siècel av. J.C.)



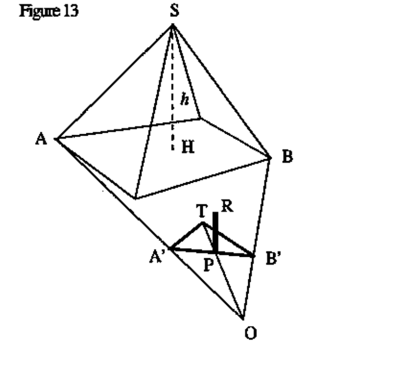
14 Cette illustration est classique, je la traduis de Lancelot Hogben : *"Mathematics for the Million"*. (W. W. Norton). Le dessin du haut est emprunté à R. Delord, G. Vinrich et P.-H. Terracher *"Mathématiques"* de 3^e chez Hachette.

Pourtant, la disposition des objets évoqués ne correspond pas bien à la configuration scolaire: il est aussi impossible de mesurer effectivement la longueur de l'ombre de la hauteur de la pyramide que sa hauteur elle-même, puisque leur extrémité commune est totalement inaccessible.

Le procédé évoqué ici est manifestement inefficace : il faut planter le bâton au moment exact où l'ombre forme un triangle isocèle (comment le déterminer ?), mesurer le coté de la base, et le diviser par deux, déterminer le milieu du coté de la base de la pyramide la plus près du bâton, mesurer la distance du pied du bâton à ce point, le long d'une droite assez difficile à repérer effectivement, mesurer la hauteur du bâton et celle de son ombre ! Trois grandes mesures et deux petites.

Existe-t-il des méthodes plus pratiques, ou plutôt plus ergonomiques ? Certainement ! Il faut ne mesurer que le moins possible de grandes distances horizontales, se servir du soleil à un moment quelconque... et du sable. En voici une qui consiste à faire coïncider l'ombre du sommet R d'un bâton planté verticalement avec l'ombre 0 du sommet S de la pyramide (fig. 13). On peut alors tracer dans le sable des segments assez longs portés par OA et OB qui joignent O au pied des arêtes **opposées** de la pyramide qui limitent son ombre.

Figure 13



Il faut alors obtenir l'image A'B' de la diagonale AB de la base de la pyramide dans l'homothétie de centre O qui applique S sur R. Pour cela il suffit de prendre le symétrique T de O par rapport au pied P du bâton puis de tracer le parallélogramme de diagonale TO et de côtés OA' et OB' portés respectivement par OA et OB et tels que PA' = PB'. Il suffit de tracer les parallèles à OA et OB issues de T. Comme la solution est visiblement unique, il est clair que A'B' est parallèle à AB et que P est l'homothétique de H.

Il ne reste alors à mesurer que la longueur d'un grand segment, OB par exemple, et celle de deux petits : PR et OB'.

Alors $$\frac{\text{hauteur SH de la pyramide}}{\text{longueur de PR}} = \frac{\text{longueur de OB}}{\text{longueur de OB'}}$$

Il n'y a à mesurer qu'une seule grande distance, le long d'une droite plus facile à déterminer, mais les droites correspondantes ne sont plus dans un même plan. Et s'il y a bien une homothétie, elle n'est plus très évidente. On pourrait utiliser bien d'autres méthodes. Il ne fait pas de doute que les méthodes attribuées sont arrangées pour un enseignement, lequel ? Il y a donc à la même époque un théorème pour les mathématiciens et un autre dans la légende pour la noosphère.

D'autre part, le soleil n'est absolument pas indispensable, les Egyptiens savaient viser des points. Il est vrai qu'en Egypte l'absence de soleil est plutôt rare en plein jour. Il est là pour d'autres raisons.

Il me paraît en outre certain que l'on savait construire des reproductions réduites "à l'échelle" des constructions projetées, bien avant Thalès. De sorte qu'historiquement la leçon "philosophique" relative à la maîtrise d'un monde inaccessible par des modèles mathématiques plus petits n'est pas très spécifique. L'apport étonnant de l'expérience prêtée à Thalès n'est pas la similitude.

C'est vraisemblablement l'homothétie, mais il aurait été plus simple et plus "démonstratif" de mesurer la hauteur d'un grand obélisque. Pourquoi fallait-il que le modèle soit un segment inaccessible à l'intérieur d'un volume ? pour accentuer le caractère théâtral et difficile du défi ? pour dissimuler une certaine simplicité et une certaine évidence ? Mais alors pourquoi vouloir trouver merveilleux, ce résultat ?

5.3. L'homogénéisation de l'espace

Le passage de la similitude à l'homothétie permet de montrer d'un coup, l'homogénéité de l'espace. Avant, les petits objets et les grands appartiennent à des mondes différents, juxtaposés mais disjoints. L'un peut représenter l'autre, mais la correspondance est un apport de l'esprit humain, elle n'est pas un objet d'étude.

La visée est une homothétie trop fugitive et personnelle pour établir le lien nécessaire entre, d'une part, le micro-espace des manipulations et des représentations primitives des formes, et d'autre part, le méso-espace dans lequel on se meut entre des objets fixes (voir plus bas).

Le soleil est indispensable comme sommet du faisceau de parallèles (pas visible car le parallélisme des rayons n'a rien d'un modèle spontané) qui objective le plongement dans un même espace du petit et du grand. L'instrument mathématique principal du théorème reste étrangement l'élément le plus caché : le parallélisme de ces plans et de ces droites ou de ces rayons n'est même pas évoqué.

Ainsi le mythe de Thalès ménage bien deux significations : l'une, la géométrique est difficile à distinguer, elle est dissimulée par des complexifications inutiles, des omissions et des ambiguïtés, de façon à bien dégager l'autre et la laisser accessible à tous : les petits objets et les grands sont des objets d'un même espace élargi au cosmos puisqu'il contient le soleil lui-même.
L'intérêt direct de ce mythe apparaît nul aujourd'hui : il ne retient pas vraiment les faits essentiels et ce qu'il présente n'a plus rien d'étonnant aujourd'hui, même pour des enfants.
Il n'a de place qu'au cours de l'apprentissage, et seulement, semble-t-il, comme commentaire "culturel" et folklorique.
Il nous a permis toutefois de comprendre un peu ce que l'invention de Thalès pourrait signifier si nous arrivions à lui trouver un équivalent actuel pertinent pour un enfant de 10 ans.

6. Non Conclusion?

Peut-être la réponse pourrait elle être cherchée dans la direction indiquée par M.H. Salin et R. Berthelot (ouvrage cité) ?

Ils se demandent comment se crée la conception de l'espace en tant que modèle implicite d'action. Ils observent que cet apprentissage est laissé entièrement à la discrétion et à l'aventure personnelle des élèves. La connaissance de l'espace n'est pas considérée comme un objet d'enseignement ni même comme un objet d'apprentissages scolaires dignes de l'intervention des professeurs. Elle est au contraire exigée comme une compétence ou même une connaissance "spontanée" ou même naturelle.

Il semble que la conception des objets, de leurs positions relatives et de leurs mouvements réciproques soit acquise dans des rapports avec des petits objets que l'on peut toucher et déplacer devant soi. Le modèle mental qui régit ces rapports a été qualifié de micro-espace. Un sujet acquiert la connaissance de ses mouvements par rapport à son environnement dans des interactions qui s'effectuent sous le contrôle de la vue. De ce fait, elles forment une conception méso-spatiale. Les rapports avec des espaces plus vastes (comme la ville, la campagne ou la mer) exigent d'autres conceptions spécifiques dites macro-spatiales.

L'homogénéisation de ces conceptions est un travail épistémologique et psychologique important qui pourrait, bien mis en scène, susciter pour les élèves des aventures intellectuelles assez réjouissantes et rendre à l'homothétie et au théorème de Thalès un peu de jeunesse. Il faudrait pour cela abandonner un peu les deux petits triangles de dimensions voisines "en position de Thalès". Je ne crois pas aux vertus du tout intuitif - l'empirisme-sensualisme fait commettre assez d'erreurs, jusque dans les nouveaux programmes - ni au tout axiomatique ou au tout calcul, mais pas davantage au tout problèmes, et pas plus à l'éclectisme qu'au systématisme.

Mais alors comment fabriquer un environnement propice à l'introduction et à la vie de "Thalès sous sa forme générale ?

Il est bien naturel qu'une promenade revienne à son point de départ après avoir laissé dans le paysage beaucoup de points inexplorés. Peut-être celle-ci donnera-t-elle à certains le désir de s'y aventurer à leur tour ?[15]

Remarques et notes personnelles ....

---

15 Je remercie vivement M.J. PERRIN et J.C. DUPERREY pour leurs observations nombreuses, précises et pertinentes, qui m'ont permis d'améliorer ce texte.