Promenade avec Thalès, entre la Maternelle et l'Université.

par Guy BROUSSEAU

1. Les présentations du théorème de Thalès au Collège et difficultés

1.1. Trois points de vue principaux

Une très précieuse enquête de l'APMEP[1] identifie diverses présentations du Théorème de Thalès proposées dans les programmes français de la deuxième moitié du XX[e] siècle. Elle relève trois points de vue principaux, relatifs au cas de deux triangles dans la position classique et qui se succèdent, disparaissent et reviennent au gré des réformes.

Les deux premières expriment que "des droites parallèles déterminent sur deux sécantes des segments correspondants proportionnels" et se différencient suivant les correspondances choisies. La troisième prend appui sur la correspondance du troisième côté.

1.1.1. la conservation des abscisses (sur les sécantes)

Ce point de vue (fig. 1) exprime que les rapports entre les vecteurs portés par une même sécante ne dépendent pas de cette sécante, mais seulement des parallèles considérées :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC'}}$$

1 Enquête APMEP *Evaluation du programme de maths* 3° 1990 et 2de 1991

que l'on présente parfois sous la forme :

$$\text{Si } \overrightarrow{AB} = \alpha.\overrightarrow{AB'} \text{ alors } \overrightarrow{AC} = \alpha.\overrightarrow{AC'}$$

pour éviter d'habituer les élèves à écrire des rapports de vecteurs (qui n'ont pas de sens en général).

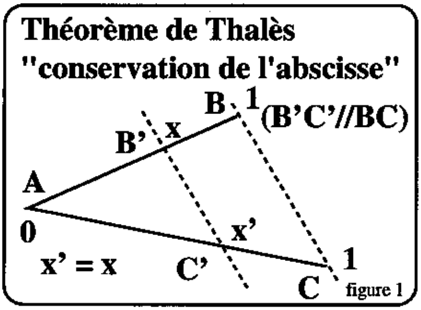


figure 1

1.1.2. la conservation du rapport de projection (de AC sur AB)

Ce point de vue (fig. 2) exprime l'égalité des rapports entre les mesures algébriques de segments correspondants déterminés sur deux sécantes.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$$

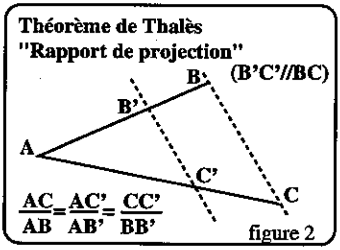


figure 2

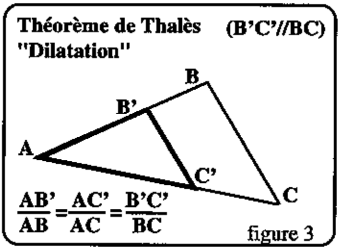


figure 3

1.1.3. la dilatation

Ce que l'enquête de l'APMEP appelle le point de vue "**dilatation**" (fig.3) exprime la similitude des vecteurs portés par les parallèles dans une homothétie ayant pour centre l'intersection des sécantes :

$$\frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}} \text{ ou encore Si } \overrightarrow{B'C'} = \alpha.\overrightarrow{BC} \text{ alors } \overrightarrow{AB'} = \alpha.\overrightarrow{AB}$$

Les auteurs remarquent que les nouveaux programmes présentent le point de vue dilatation comme le faisaient déjà les programmes de 1947, dans le cadre de la similitude (p.31).

1.2. Résultats et difficultés

Pour orienter notre promenade, suivons le chemin des difficultés rencontrées par les élèves ? Quelles sont-elles ? Les exercices de l'enquête permettent-ils de choisir entre ces trois points de vue ?

1.2.1 Dispositions simples.

Les taux de réussites varient beaucoup, peut-on dire sous l'effet de quelles variables ?

Dans une configuration "reconnaissable" par 75 % des élèves, en troisième,

- avec des renseignements et des questions du type "*rapport de projection*" (dans $\mathbb{R}^2$, Q E 21-22) , 69% des élèves calculent correctement le quatrième segment (il est le plus grand dans le rapport conservé). Ce résultat se maintient en seconde, mais tombe à 45% dans un questionnaire à choix multiple alors qu'il est de 74% au Japon.
- avec des renseignements du type *dilatation,* dans $\mathbb{R}^2$, (Q B31-32), 63% réussissent dans un calcul où le côté demandé est plus petit que son correspondant et 65% interprètent correctement Thalès dans le cas d'une homothétie de $\mathbb{R}^3$ (Q P 14-15).

1.2.2. quelques modifications

Le plongement de la configuration dans une figure légèrement plus complexe (et avec un rapetissement au lieu d'un agrandissement) conduit à 51% de réussite dans le cas "*rapport de projection*" correspondant à (Q E 21-22), et à 41% seulement dans celui d'une *dilatation,* correspondant à (Q B31-32). La même combinaison avec le point d'intersection entre les parallèles fait tomber la réussite à moins de 20 % (Q N 25-26).

1.2.3. réciproque et calculs

La réciproque du théorème de Thalès est maîtrisée par 51% des élèves lorsque les segments caractéristiques sont dans la configuration habituelle (Q C 18-19), et à 23% sinon (Q M 4-5).

En seconde, lorsque le rapport de projection est donné sous forme décimale, l'application directe est réussie par 56% des élèves dont 24% seulement font référence au théorème.

L'utilisation du théorème, non plus dans un calcul mais dans une démonstration, n'est réalisée que par 24% des élèves en troisième (Q F 18-19), 10% (Q A 30-32) à 33% (Q D 25-27) des élèves de seconde mais le placement d'un point est correct pour plus de 90% des copies.

1.2.4. Commentaires

Le point de vue semble agir assez peu par rapport aux variables de configuration, au théorème (direct ou réciproque), au rapport d'homothétie (supérieur ou inférieur à un, naturel, quantième ou décimal etc.) et surtout à la forme de question (QCM ou question classique).

Les écarts entre le pourcentage des démarches correctes et celui des réponses exactes sont particulièrement faibles lorsqu'il s'agit de calculs et plus grands lorsqu'il s'agit des démonstrations. Ils sont de l'ordre de ceux que l'on observe sur les questions ayant fait l'objet d'un entraînement.

Le choix des variables qui différencient les divers exercices et les commentaires des auteurs montrent qu'ils considèrent la *reconnaissance des figures* comme un facteur décisif et parmi les conditions d'utilisation du théorème, la disposition et la complexité des figures leur paraît la principale source d'erreurs. Faisons une petite incursion de ce côté.

1.3. Recherches sur les facteurs de difficultés

1.3.1. Une recherche sur les configurations typiques

Récemment, deux chercheurs[2] se sont intéressés à l'effet de diverses variables sur la *reconnaissance des conditions scolaires d'application du théorème de Thalès*. Ils commencent par rafraîchir la mémoire des 40 élèves de seconde interrogés en leur rappelant l'énoncé suivant :

"Soient deux droites (D) et (D') et trois points a, b et c sur (D). On projette (D) sur (D') suivant une direction donnée. a, b, et c se projettent en a', b' et c' sur la droite (D').

Dans ces conditions on a : $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \dfrac{\overline{a'b'}}{\overline{b'c'}}$

Cet énoncé correspond au cas de la "conservation de l'abscisse", mais remarquons que la formulation fait référence à la projection suivant une

2 F. et J. Cordier. *"L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs"*. Recherches en didactique des mathématiques, Vol.11 1 La pensée sauvage. Grenoble.

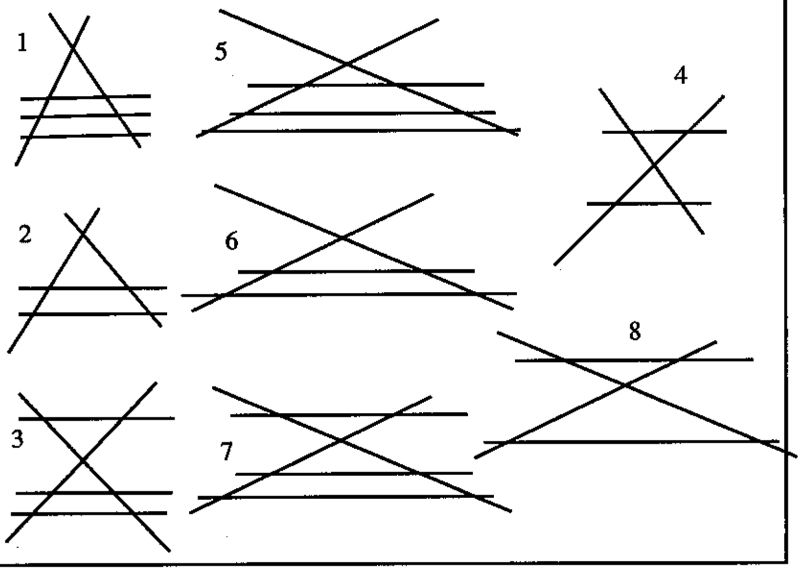
direction et gomme ainsi beaucoup le rôle des droites parallèles (le mot n'est pas prononcé).

Leur première expérience consiste à demander aux élèves de faire autant de figures différentes que possibles "caractéristiques de l'application du théorème".Elle montre que certaines dispositions appelées *typiques* sont plus familières, d'autres plus rares et d'autres absentes. Les variables observées sont essentiellement l'*angle des deux droites* (D) et (D') (aigu ou obtus), la *disposition des parallèles* (d'un côté ou de part et d'autres du point d'intersection) et le *nombre de parallèles envisagées* (2 ou 3).

Dans une deuxième expérience il s'agissait pour les élèves de disposer les points a, b, c et a', b', c', conformément à l'énoncé du théorème, sur diverses figures (fig. 4). Cette expérience montre que les élèves font moins d'erreurs d'application du théorème aux figures typiques. Plus précisément la valeur de l'angle n'influence pas le nombre d'erreurs à l'encontre du nombre de parallèles et plus encore de leur disposition.

Une troisième expérience montre que le temps mis par les élèves à répondre dépend lui aussi des trois variables et en particulier que le caractère obtus de l'angle allonge le temps de réponse.

Figure 4- Matériel des expériences 2 et 3. Les n° 1-8 sont communs aux deux expériences.



Ces résultats confirment les observations des enquêteurs de l'APMEP, mais ne prennent pas en compte toutes les variables.

1.3.2. Les variables des situations didactiques

Cette sorte de recherches pourrait être étendue à toutes les variantes possibles de la présentation **SCOLAIRE** du théorème de Thalès. Ces variantes pourraient être obtenues par le jeu de différents paramètres, ceux évoqués ci-dessus, et tous ceux que suggère une théorie des situations didactiques. Nous en donnons quelques exemples dans le tableau 1. On peut alors rechercher l'influence de ces paramètres par des méthodes du même genre.

Tableau 1.
Quelques variables des situations d'introduction du théorème de Thalès

Variables des figures (milieu proposé)	Valeurs des variables	
Dimension de l'espace	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
Nombre de parallèles (droites ou plans)	2	3
Disposition	même côté	de part et d'autre
Nombre de sécantes	2	3 ou plus
Sécantes toutes concourantes	oui	non
Différence de taille image-objet	petite	grande
Figure typique	oui	non
Milieu	figure effective	figure fictive
Complexité	seuls figures les éléments utiles	la figure est plongée dans une configuration plus complexe

Variables de la situation a-didactique[3] autres que celles de la figure	Valeurs des variables
Définition utilisée	"Conservation des abscisses" "Conservation du rapport de projection" "Dilatation"

3 situation a-didactique : situation que l'élève essaie de résoudre sans chercher à utiliser sa connaissance des intentions didactique du professeur.

Nature du rapport	naturel rationnel	décimal réel
Type de question	tracé calcul	énoncé démonstration
Rapport entre l'objet donné et l'objet correspondant cherché	du petit au grand	du grand au petit
Théorème	direct	réciproque
Manifestation nécessaire et fonction	connaissance, moyen de résoudre formulation moyen de démonstration explicite implicite	

Variables de la situation didactique	Valeurs des variables	
Forme	exposé	problème
Situation didactique pour l'élève	situation d'institutionnalisation situation d'apprentissage a-didactique	
Fonction didactique	cours, information	exposé problème introductif effectif problème exposé
	exercice	entraînement contrôle
	problème d'application	

1.4. Conclusions

Il existe de nombreux travaux de ce type. Nous pourrions continuer notre promenade en examinant de même les pratiques et leurs résultats aux différents niveaux scolaires. Ces recherches de type psychologique sont très utiles, mais elles ont l'inconvénient de n'être pas indépendantes des enseignements pratiqués et de ne pas fournir d'informations directement exploitables par les enseignants. Aussi bonnes soient-elles, elles ne laissent à l'enseignant que des faits "dont il devrait tenir compte", ici, pour "interpréter les erreurs des élèves". Elles ne peuvent cerner aucun des problèmes de décision posés ni aucun des phénomènes didactiques observables. La didactique le peut-elle ?

Laissons donc nos pas s'égarer un peu au gré de quelques réflexions théoriques dans ce domaine. Ils nous éloignent en apparence de notre but, mais peut être y glanerons-nous quelques outils pour continuer le voyage.

2. Conceptions et reconnaissance ; conséquences didactiques

2.1. Connaissance conceptuelle et connaissance "prototypique"

2.1.1. Deux formes de connaissances ?

F. et J. Cordier attirent l'attention des lecteurs sur une intéressante conséquence de leur travail. Celui-ci tendrait à confirmer que l'utilisation du théorème par les élèves relève de deux modes distincts de connaissance :
- une connaissance **conceptuelle** basée sur une analyse des caractères de la figure ;
- et une connaissance plus "**perceptive**", basée sur le rapprochement de la figure observée avec des figures **typiques** bien connues.

Selon les élèves et les cas, il est fait recours à l'un ou l'autre ou même aux deux de ces deux modes de traitements. Toute figure proposée à l'élève pourrait ainsi être l'occasion de sa part d'une recherche intuitive de rapprochement avec diverses figures typiques de divers théorèmes : représentation de figures, de projections etc.

Ces observations sont une bonne introduction à l'étude des problèmes d'enseignement du théorème de Thalès. Les auteurs observent qu'on ne saurait ni se résoudre à renoncer à la connaissance conceptuelle et à son "apprentissage abstractif", ni empêcher l'apparition et le fonctionnement "naturels" de la connaissance prototypique. Ils suggèrent néanmoins qu'il "pourrait être très important de diversifier très tôt les figures géométriques" mais ne peuvent guère indiquer les motifs, les limites et les conséquences de cette suggestion. Il convient pour cela de préciser un peu la nature et le rôle de ces deux formes de connaissances.

2.1.2. Connaissances conceptuelles

Remarquons tout d'abord qu'elles sont parfaitement identifiables et qu'il en existe plusieurs modèles.

La connaissance **conceptuelle** détermine un objet ou une classe d'objets par la conjonction logique de leurs propriétés communes. Ici, elle consiste à contrôler **indépendamment, toutes** les conditions d'application d'un théorème, c'est-à-dire ses hypothèses et à identifier les éléments de sa conclusion. Elle suppose que chacune des conditions peut donc être traitée comme un prédicat par le sujet identifiée, énoncée et traitée logiquement comme une propriété, conjuguée avec d'autres etc. Cette forme de connaissance correspond à une organisation du savoir acceptée depuis Aristote.

2.1.3. Connaissance prototypique

La reconnaissance par des **objets typiques** détermine une classe par un objet "réel" particulier. Cet objet doit posséder naturellement les propriétés communes à tous les objets de sa classe comme l'objet conceptuel. Mais aucun objet "réel" ne peut être réduit à celles-ci. Par exemple la voiture "conceptuelle" d'une série de voitures identiques, mais peintes de couleurs différentes, ne pourrait pas avoir de couleur. Mais il n'existe pas de voiture sans couleur, la voiture type de cette série adoptera donc la couleur la plus fréquente.

Il est clair alors que, lors de la présentation d'un objet typique, il n'est pas possible de savoir immédiatement quelles sont les propriétés communes, déterminantes, et quelles sont les propriétés sans signification.

Cette forme de reconnaissance a fait l'objet de nombreux travaux théoriques pour imaginer des modèles (H. Wermus, M. Pavel par exemple), ou expérimentaux pour établir ses règles. La reconnaissance d'un objet géométrique quelconque peut être envisagée comme la composée de l'identification d'une **configuration** composée de figures élémentaires typiques suivie d'une certaine déformation. La reconnaissance de structures par des grammaires de configurations et de déformations a des applications de toutes sortes.

Selon Piaget et Wermus, la reconnaissance d'objets s'effectue par le traitement **global** (sous forme de prédicats amalgamés) de paquets de propriétés (composantes contextuelles) dont chacune échappe individuellement à la connaissance conceptuelle du sujet. L'objet n'est reconnu que lorsque ces composantes prennent certaines valeurs. Par exemple, un rectangle n'est reconnu par un jeune enfant que s'il est dessiné, s'il est très proche d'un rectangle, s'il n'est pas très proche d'un carré, s'il n'est pas trop allongé, si ses côtés sont parallèles au bord de la feuille, s'il n'est pas trop petit ni trop grand. La reconnaissance de l'objet s'affine par la "centration" sur les composantes puis par la "décantation" qui les transforme à leur tour en prédicats et permet alors la connaissance conceptuelle.

2.2. Ergonomie didactique de la reconnaissance des structures

2.2.1. Connaissances obstacles

L'étude des conditions qui justifient, par des raisons ergonomiques, le recours à l'un ou à l'autre de ces deux modes de connaissance, sort du cadre de cet article mais il est possible d'imaginer des situations qui rendent de façon décisive, plus efficace l'un ou l'autre des deux procédés (la situation dite "des trésors" qui sera évoquée plus loin montre un exemple d'utilisation didactique de ces principes pour développer la pensée logique et le raisonnement à l'école maternelle ; ce genre de travail entre dans le cadre de la théorie des situations).

Or ces deux modes de connaissance, sans être contradictoires, sont souvent incompatibles en tant que moyens de gestion des informations utiles au cours d'une action. Ils seront donc concurrents sur toutes les situations qui n'avantagent ni l'un ni l'autre ou qui, pire, appellent à les conjuguer. Dans ce cas, l'apprentissage de l'un sera contrarié par l'usage de l'autre. Nous avons un cas typique de **couple de connaissances obstacles**.

On voit comment le choix et la structuration des situations qui servent de base aux apprentissages, s'il ne peut pas changer ces phénomènes, peut en modifier profondément le résultat et les conditions. Le temps passé à "étudier" les divers cas générés par des variables logiquement non pertinentes mais favorables à la reconnaissance prototypique n'est pas passé à l'étude des cas générés par les variables pertinentes : autres définitions, lemmes, corollaires, objets "voisins", etc.

2.2.2. Conjonction de connaissances et de savoirs

Il est vraisemblable que le raisonnement mathématique ne s'effectue réellement que par la conjonction de procédés divers dont une partie seulement coïncide avec les méthodes standard de communication des connaissances mathématiques : définitions, théorèmes, démonstrations. Ces dernières sont les seules à bénéficier d'un statut culturel qui leur permet de figurer comme des objectifs d'enseignement. Les professeurs ne disposent pas de moyens de gestion (le droit et les techniques d'enseignement) des autres connaissances qui néanmoins seraient indispensables à leurs élèves. Elles se développent donc plus ou moins mais spontanément et interviennent sans cesse de façon incontrôlée dans les choix didactiques des enseignants qui, tour à tour, sur ou sous évaluent leur action.

Plusieurs recherches récentes et d'autres encore en cours étudient le rôle joué par les différentes sortes de situations et de milieux utilisés dans l'enseignement de la géométrie (interactions spatiales, manipulations, figures, communications, débats etc.).

2.2.3. Ergonomie didactique locale.

Il est certainement avantageux pour un professeur, à un instant donné, de gagner du temps dans la mobilisation des conditions qu'il veut étudier du point de vue mathématique en ayant recours à des formes typiques. Si, lorsqu'il veut étudier une propriété quelconque dans le triangle, il choisit comme illustration une figure du type scalène, il économise ainsi (pour toutes sortes de raisons) du temps et des erreurs dans la détermination et le repérage des différents éléments en présence (hauteurs, médiatrices, etc.) sans rien perdre de la généralité de son propos (si les élèves sont capables de convertir les informations recueillies par reconnaissance prototypique en informations conceptuelles). Le choix réitéré des conditions localement favorables contribue donc fortement à créer les figures types. Ce procédé crée des difficultés mais n'est pas du tout un insuccès total. Au contraire. La rapidité avec laquelle les élèves peuvent traiter les figures types est avantageuse. Elle provient de notre puissante faculté naturelle à analyser des messages iconiques, même complexes. Mais cette puissance repose sur des systèmes de classification qui vont à l'encontre des catégories d'objets géométriques[4]. Alors que le professeur obtient des succès avec ses figures prototypiques, les configurations complexes résistent : l'élève "ne voit pas" les deux triangles en position de Thalès "cachés" dans la figure étudiée.

2.2.4. Conséquences : les procédés "ostensifs" et leurs résultats

Les professeurs sont tout de même conduits à penser de façon optimiste que très souvent, la catégorie logique est visible à travers son objet prototypique.

Cette opinion (elle appartient à l'épistémologie des professeurs en ce sens qu'elle naît et se fortifie dans l'interaction didactique) tend à justifier les **procédés "ostensifs"**[5] d'introduction des objets mathématiques. Le professeur "montre" une représentation typique d'un objet mathématique et pense

4 Voir les différentes interprétations données à des trapèzes par les élèves dans la Thèse Berthelot et Salin *"L'enseignement de l'epace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire"* U. Bordeaux 1, 1992, LADIST.

5 J'ai entrepris l'étude des procédés "ostensifs" en 1976 avec H. Ratsimbah Rajohn : *Etude de l'introduction ostensive des objets mathématiques* (DEA U. Bordeaux 1, 1977). Il en a poursuivi l'étude dans sa deuxième thèse : *Contribution à l'étude de la hiérarchie implicative : application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradiction"* U. Rennes, 1992

avoir ainsi défini sa classe logique. Il exige ensuite "la perception" ou même la "déduction" de ses propriétés[6] (exemple : "un vecteur est un segment de droite orienté").

S'il est conscient des limites de ce procédé, il pense qu'il suffit d'enrichir "la vision" du "prototype" par des exemples variés (un vecteur "achat" dans un commerce de tissus).

Ce raisonnement est discutable. La multiplication des exemples "perceptivement" différents les uns des autres tend à détruire la valeur informationnelle du "prototype". Si les "déformations" nécessaires à la reconnaissance de l'objet à l'aide du "prototype" sont trop importantes ou n'appartiennent pas à la grammaire spontanément développée par le sujet, il va plutôt créer plusieurs "prototype"s, reliés par une entité "théorique". Ceci aura l'avantage de rendre plus familier l'objet théorique. Mais le bilan de l'opération n'est pas nécessairement, à terme, très avantageux même du point de vue informationnel et les temps d'apprentissages de reconnaissance de configurations peut devenir très vite prohibitif. N'importe, les premiers succès entretiennent l'idée que la reconnaissance des objets doit accompagner leur connaissance conceptuelle.

2.3. Approche Didactique des problèmes d'enseignement

Nous avons suivi jusqu'ici dans notre promenade la pente "naturelle" de ce qu'il est habituel de considérer comme des recherches expérimentales en didactique : sujet scolaire, organisation, repérage des difficultés, étude systématique des facteurs de ces difficultés. Ces recherches semblent en effet traiter des conditions *effectives* qui président aux difficultés *réelles* des professeurs et des élèves avec le théorème de Thalès.

2.3.1. Problématique

Mais la place que nous leur avons donnée paraîtra excessive à tous ceux qui refusent de ne voir dans le théorème de Thalès que ces quelques exercices de reconnaissance d'occasions d'appliquer une formule pour faire un calcul élémentaire. Comme beaucoup d'études semblables, elles sont, en fait, enfermées dans des questions immédiates, posées dans le cadre d'une conception très étroite des recherches sur l'enseignement et de l'enseigne-

6 Un exemple donné par Y. Chevallard et J. Tonnelle dans *"Le monde clos de la factorisation au premier cycle"* (DEA Marseille 2 - Bordeaux 1), 1979. On définit les polynômes comme somme de monômes, eux-mêmes décrits comme produits de constantes et de variables, au lieu de donner la liste des propriétés caractéristiques d'un anneau de polynômes.

ment lui-même. La connaissance et l'usage de cette connaissance ne seraient-ils que le résultat d'une assez grande familiarité avec des configurations typiques ?

Dans quelle mesure une meilleure connaissance du théorème de Thalès dépend-elle d'une compréhension plus large de sa signification et de son rôle ?

Que pourraient avoir appris d'utile à son sujet les élèves avant la troisième, que peuvent-ils entrevoir alors des problèmes que ce théorème résout, et d'autres, aussi intéressants, qu'il permet de poser ? Autrement dit, quelles sont les connaissances actuellement associées comme composantes à la connaissance du théorème et quelles sont celles qui pourraient en être dissociées ou qui pourraient être associées différemment ?

Ces connaissances antérieures et cette insertion problématique jouent-elles un rôle dans la qualité des résultats de l'apprentissage ? Comment les modifier ? Que peut-on espérer de leur amélioration ?

Telles sont quelques unes des questions que se posent les professeurs. La didactique peut-elle contribuer à répondre à ces questions ?

2.3.2. Méthode d'étude : les situations fondamentales.

a) Méthode

Il s'agit, dans un premier temps, d'identifier le théorème dans son environnement mathématique actuel, les connaissances qui interviennent dans son énoncé, et ses différentes formes.

En première approche, certains didacticiens construisent directement - souvent par compilation et classification naïve d'exercices classiques.- les exercices et les problèmes d'évaluation qui "opérationnalisent" les objectifs de l'enseignement. Mais ces problèmes d'évaluation sont la trace, fort travaillée, de situations d'acquisition, et, d'ailleurs, si nous ne voulons pas nous enfermer a priori dans un projet didactique particulier il vaut mieux commencer par la construction de *situations caractéristiques d'une notion.* En effet, pour étudier la dépendance entre les acquisitions du théorème et celles de l'une et l'autre de ses composantes, il faut d'abord produire les situations où elles se manifestent.

Cette construction est l'occasion d'un examen critique original dont nous allons essayer de donner un exemple ci-après. Il aboutit - parfois - à la conception de situations fondamentales, en petit nombre.

b) Définition d'une situation fondamentale

L'étude consiste à fabriquer des situations fondamentales (au sens de la théorie des situations), c'est-à-dire des problèmes

- *spécifiques* : qui réclament la connaissance du théorème comme moyen de "contrôle ou de résolution" (Cette connaissance du théorème, sous ses différents points de vue, peut se présenter sous les différentes formes déterminées par les types de situations : moyen d'action, de formulation ou de preuve),
- *génériques* : qui peuvent générer la totalité des problèmes qui utilisent ce théorème, par le jeux des variables cognitives et didactiques.
- *non-didactiques*, c'est à dire dont l'énoncé peut se comprendre sans que le théorème soit déjà connu, et qui peuvent se résoudre à l'aide du théorème si on le connaît, sans intervention extérieure didactique,
- et si possible *génétiques*, c'est-à-dire qui engendrent un processus de recherche, de questions et de découvertes aboutissant à l'élucidation des différents aspects du théorème et de sa position dans une théorie mathématique.

Une suite de situations détermine un processus et constitue son sens. La première difficulté vient de ce que la signification d'une situation et son déroulement dépendent du processus et réciproquement. L'analyse finale devra donc conjuguer les deux approches.

2.3.3. Analyse et utilisation

a) Situations

Les situations que *l'ingénierie didactique* a ainsi produit peuvent d'abord être confrontées à celles qui sont proposées effectivement aux élèves. Cette confrontation permet alors d'identifier les processus d'enseignement utilisés, puis d'évaluer les effets du contrat didactique (leur caractère plus ou moins a-didactique par exemple) et de la transposition didactique. Le but principal est de les expliquer. Il n'est pas indiqué de tirer des conclusions hâtives lors de la constatation d'un écart entre une pratique scolaire et sa référence "savante".

Elles peuvent bien sûr, aussi, être étudiées expérimentalement, puis, peut-être mises en expérimentation et en études de développement, afin de préparer des réformes et des "innovations".

Les situations d'acquisition, qu'elles soient d'enseignement ou d'apprentissage, et qu'elles soient a-didactiques ou non, sont les moyens utilisés par les professeurs pour transformer l'apparition des connaissances en événements historiques dans la vie de leurs élèves, puis pour transformer une partie de ces événements en histoires, en culture et en savoirs.

Il s'agit donc de déterminer (et/ou d'observer) un ensemble optimal de situations qui forme une trame d'aventures aboutissant à la connaissance de Thalès et de son environnement.

On peut approcher ces situations,

- en les inventant ou réinventant de toute pièce, à partir du savoir actuel, mathématique, didactique et psychologique, par un agencement raisonné de conditions montrées nécessaires (ingénierie didactique,)
- en modélisant celles dont la pratique des mathématiques et la culture a montré l'utilité
- en répertoriant de façon presque naturaliste celles que l'enseignement a fait surgir.

b) Organisation en processus

Il s'agit alors de les articuler suivant un ordre ou de reconnaître dans leur agencement, si on se contente d'observer un processus, un ordre qui réponde à des critères épistémologiques et didactiques justifiés.

Par exemple :

- chaque étape doit rendre possible le déroulement optimal des suivantes (en leur fournissant les connaissances de base nécessaires et les motivations utiles),
- le sens créé doit être conforme aux usages mathématiques, scolaires, et culturels (?!)
- etc.

Ce n'est pas le lieu de discuter les fondements théoriques de ces critères, mais on peut au moins s'attendre à devoir justifier localement ou globalement, un des ordres habituels de la genèse des connaissances :

L'ordre ascendant : ce moyen est d'abord un instrument cognitif permettant de gérer des situations d'actions ou des raisonnements, avant d'être luimême identifié et de devenir un objet d'études. Les raisons de ce changement de statut, d'outil à objet d'étude, restent, bien sûr, à déterminer.

L'ordre descendant : la conception se construit par l'action de catégories plus générales déjà là et la reconnaissance par l'application de structures antérieures.

En fait, toute genèse d'une connaissance naît d'une dialectique appropriée entre ces deux ordres, déterminée localement par les propriétés ergonomiques des situations rencontrées[7].

7 On en trouve de bons exemples en particulier dans l'ouvrage d'Annie Berté : *"Mathématiques Dynamiques"* (Nathan).