Une invention française du XX^e siècle :

le théorème de Thalès

Henry PLANE

En Droit, celui qui découvre un objet non réclamé en est dit l'inventeur. Les enseignants français, du début du XX^e siècle semblent donc être inventeurs...

Pour notre tradition occidentale, les mathématiques sont dites nées au VI^e siècle avant notre ère lorsque, à partir d'un ensemble de résolutions de problèmes pratiques s'est édifié un corps de réflexions abstraites. Certes, tout le patrimoine d'alors, au Moyen Orient, en étant adopté par la Grèce n'a pas totalement suivi cette transformation. A côté de la «Géométrie à philosopher» demeure une «Géométrie intéressée» dans les entreprises de la science, dans la vie. Notre théorème vit de ces deux géométries.

C'est le nom de Thalès que l'histoire associe le premier à cette transformation et, lorsque la notion de proportion est mise en avant, l'élève du XX^e siècle évoque, en France, un certain théorème et l'homme de Milet.

Mais de l'œuvre de THALES, que savons-nous ?

Nous ne disposons que de témoignages sur le personnage et sur ses travaux. PLUTARQUE dans «le banquet des sept sages» rapporte l'exploit de la mesure d'une pyramide à l'aide d'un bâton et des ombres. Mais exploit de qui ? de THALES ou des Egyptiens chez qui il avait été étudier ? De plus, ce témoignage du début du II^e siècle qu'on trouve chez PLINE à peu près à la même époque, est incomplet. HIÉRONYME DE RHODES (– IV^e siècle), contemporain de Platon, précise, lui, que l'opération se faisait lorsque *«notre ombre nous est égale»*. Détail non négligeable qui ajoute un voile d'incertitude sur le rôle joué par «l'école de Milet» dans le chapitre «proportions et paral-

***Document n°1**(traduction de PEYRARD - 1804)*

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

DÉFINITIONS

I. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont des angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

PROPOSITION PREMIÈRE

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

***Document n°2** (Peyrard, traduction 1804)*

PROPOSITION II.

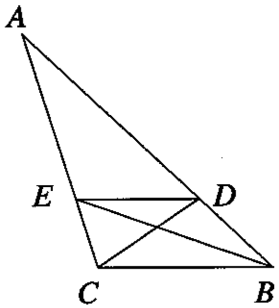
THÉORÈME

Si l'on conduit une droite qui soit parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si deux côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Que l'on mène la droite DE (fig. 122) de manière qu'elle soit parallèle à un des côtés du triangle ABC : je dis que CE est à EA comme BD est à DA.

Menez les droites BE, CD.

Le triangle BDE est égal au triangle CDE (prop.3-1), parce qu'ils ont la même base et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles. Mais deux quantités égales ont la même raison avec une même quantité (prop.-5) : donc le triangle CDE est au triangle ADE comme le triangle BDE est au triangle ADE. Mais le triangle BDE est au triangle ADE comme BD est à DA : car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point E sur la base AB, sont entr'eux comme leurs bases (prop.1.6). Par la même raison le triangle CDE est au triangle ADE comme CE est à EA : donc BD est à DA comme CE est à EA (prop. II.5).



PROPOSITION III.

THÉORÈME

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les autres côtés de ce triangle; et si les segmens de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite qui est menée du sommet de la section partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales.

Soit le triangle ABC (fig.125), que l'angle BAC soit partagé en deux parties égales par la droite AD : je dis que BD est à DC comme BA est à AC.

lèles» et conduirait à s'en tenir à EUDOXE de CNIDE (– IVe siècle) comme initiateur de ce chapitre.

Quant à PAPPUS (IVe siècle) et PROCLUS (Ve siècle), quels théorèmes attribuent-ils à THALES ?

- Le diamètre partage le cercle en deux parties égales,
- Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux,
- Les angles opposés par le sommet sont égaux,
- Un triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle.

Alors, pour cette recherche de paternité, fouillons un peu le passé.

Comment EUCLIDE (fin – IVe siècle) aborde-t-il le sujet ?

Après étude des rapports de grandeurs, c'est au Livre VI qu'on trouve sa définition et les proportions qui nous intéressent. *- **Documents 1 et 2** -* (on a utilisé les deux traductions de PEYRARD, celle de 1804 offre l'avantage d'user de l'alphabet latin). Dans la définition, on soulignera le *«et dont les côtés...»* On notera aussi que la proposition 2 comporte la réciproque et on notera surtout sa démonstration par l'intermédiaire d'un *rapport d'aires égal à un rapport de longueurs de segments*, pour user de notre terminologie.

Il est enfin à signaler que cette propriété n'est pas spécialement mise à part dans ce livre IV. La suivent immédiatement : la propriété du pied de la bissectrice, ce que nous nommons les cas de similitude des triangles, et l'étude du triangle rectangle coupé par sa hauteur en deux triangles qui lui sont semblables et ce, avec l'apparition de moyennes proportionnelles.

La proposition 10 - ***Document 3*** - est un problème. Sous ce vocable, il s'agit toujours de constructions, problème pratique donc géométrie «intéressée» et non «à philosopher».

PROPOSITION X.

Partager une droite donnée qui n'est point partagée de la même manière qu'une autre droite donnée est partagée.

Soit AB (fig.150) la droite donnée qui n'est point partagée et AC la droite donnée qui est partagée : il faut partager la droite AB qui n'est pas partagée de la même manière que la droite AC est partagée.

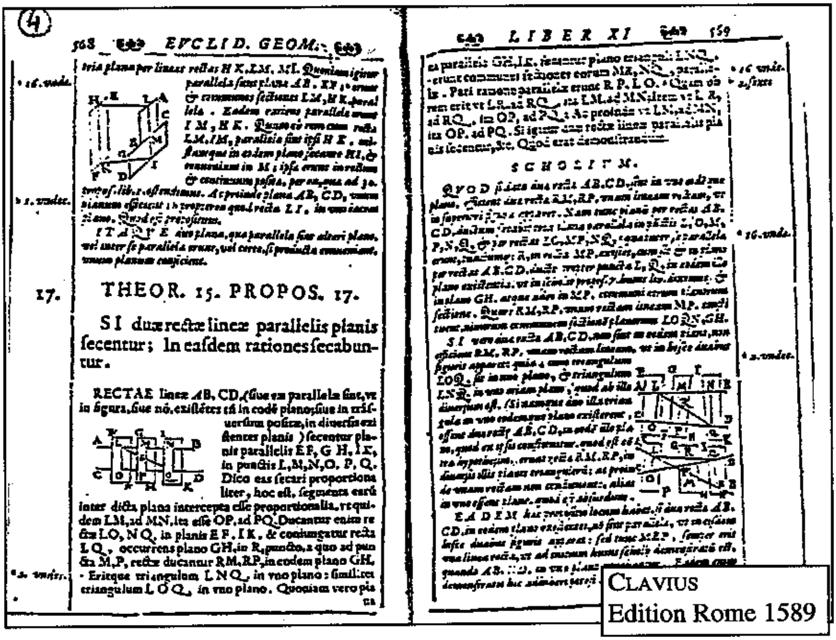
Que la droite AC soit partagée aux points D, E, et que les droites AC, AB soient placées de manière qu'elles comprennent un angle quelconque. Conduisez la droite BC, et par les points D, E, conduisez les droites DF, EG parallèles à la droite BC (prop.51.I), et par le point D conduisez la droite DHK parallèle à la droite AB.

Les figures FH, HB sont des parallélogrammes, et par conséquent la droite DH est égale à la droite FG et la droite HK égale à la droite GB (prop.54.I) ; et puisqu'on a conduit la droite HE parallèle à un des côtés du triangle DKC, savoir, au côté KC, la droite CE sera à la droite ED comme la droite KH est à la droite HD (prop.2.6) ; mais puisque la droite KH est égale à la droite BG et que la droite HD est égale à la droite GF, la droite CE est à la droite ED comme la droite BG est à la droite GF. De plus, puisqu'on a conduit la droite FD parallèle à un des côtés du triangle AGE, savoir au côté EG, la droite ED sera à la droite DA comme la droite GF est à la droite FA. Mais on a démontré que la droite CE est à la droite ED comme la droite BG est à la droite GF : donc la droite CE est à la droite ED comme la droite BG est à la droite GF, et la droite ED est à la droite DA comme la droite GF est à la droite FA.

Donc la droite donnée AB, qui n'est partagée, a été partagée de la même manière que la droite AC ; ce qu'il fallait faire. (Traduction Peyrard 1804)

En ce qui concerne l'espace, la question sera abordée au livre XI, propriété 17, sous un autre aspect : *«Si deux droites sont coupées par des plans parallèles, elles seront coupées proportionnellement».*

Si Clavius, dans ses célèbres commentaires d'Euclide de 1574 s'arrête sur ce théorème, mais dans le suivi du Grec, la propriété est au milieu d'autres, sans prolongement. - ***Document 4*** - . Cette propriété sera souvent omise dans nombre d'ouvrages traitant de l'espace.



(4)

568 EVCLID. GEOM.

17. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue nō, existētes in eodē plano; siue in trāsuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earū inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH. Erit que triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam vero pla-

LIBER XI 569

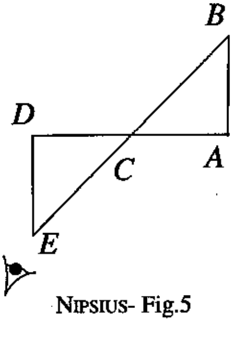
SCHOLIVM.

CLAVIUS
Edition Rome 1589

Toujours est-il que dans le plan, ce sont les figures semblables qui jouent le grand rôle.

Poursuivons notre quête à la suite des âges.

Marcus Jonius Nipsius, arpenteur romain du Ier siècle, donne le procédé suivant pour mesurer une distance AB lorsque seul le point A peut être atteint. Dans notre style, nous dirions (figure 5): «sur la perpendiculaire en A à (AB), prendre deux points C et D tels que C soit le milieu de $[AD]$. Sur la perpendiculaire en D à (AD), déterminer le point E tel que E, C et B



Nipsius- Fig.5

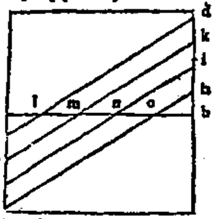
Document n°7

CAROLI BOVILLI SAMAROBRINI LIBELLVS DE MATHEMATICIS SVPPLEMENTIS AD STVDIOSISSIMVM VIRVM REMVNDVM BOVCHERIVM IVRISPERITVM.

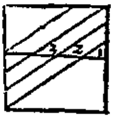
Rectam lineam in quotlibet partes equales diuidere.

Quo pacto rectā lineā liceat in duo equa partiri: demōstrat Euclides. Quo autem modo fit quotlibet equalium partium numero, diuid[e]ndas hactenus quod norim proposuit demonstrauitq; nemo. huius tamē sciencia: haud parum Geometricis conducet disciplinis. Nam frequentiuscule in geometricis demonstrationibus: expetitur recte linee quātalibet sectio atq; diuisio. Sit igitur recta linea a b: in quinq; partes equas diuidenda.

Super puncta a et b: educo in diuersam partē: duas perpendiculares: cuiuscūq; quātitatis (Nā nil differt: debent tamen esse inter se equales) a c et b d, que super lineā a b: creant rectos angulos coalternos c a b et a b d. Partior deinde ambas lineas a c et b d: in quattuor partes equales a c in punctis e f g: b d vero punctis h i k. Et duco lineas quattuor: c h, e i, f k, et g d, quib[us] pposita linea a b: erit in quinq; partes equales secta atq; diuisa: in punctis l. m. n. o. Huius enī rationē facile collige per lineas equidistantes et coalternos angulos. Erunt enim linee c h, e i, f k, et g d: inuicem equidistantes. quare et coalterni anguli qui ab ipsis super lineam a b: in punctis l m n o facti fuerunt equales: et intercepte inter equidistātes linee a l, l m, m n, n o, et o b: angulorum coalternorum latera inter se equalia.



Et eodem modo procedes in quātalibet, recte linee partitione factis super eam diuersa ex parte rectis angulis coalternis eorūq; lateribus vno minore numero equaliter sectis: q[uo]d sit proposite linee expetita diuisio. Si enim diuidenda est proposita linea ternario: partire coalternorum angulorū perpendicularia super datā lineā latera binario. Si in quattuor eam partiri volueris: eadē latera in tria sunt partienda. Si in septē data linea est diuidenda: latera eadem diuide senario. Et ita deinceps.



Carolus BOVILLUS
Charles de Bouelle
ou Bouvelles.
Né aux environs d'Amiens (samarobrina) en 1470.
Enseigna et mourut à Noyon (1553)

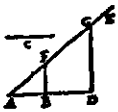
Document n° 8

CONSTRVCT. DE DIVERS PROB. 113

Probleme XLVI.

Couper vne ligne droicte donnee en parties, qui soient entr'elles selon vne raison donnee.

Soit la ligne droicte donnée AD, qu'il faut couper en deux parties, qui ayent telle raison entr'elles que AF à C.



Soit coniointe AF auec AD, faisant l'angle DAF tel qu'on voudra, & icelle AF, estant prolongée iusques en E indeterminément, soit prise FG, egale à C; & ayant mené DG, soit menée FB, parallele à GD; & elle coupera AD en B, selon la raison de AF à FG, c'est à dire C, comme il est manifeste: ce qu'il falloit faire. 2. p. 6

SCHOLIE.

Le mesme se fera aussi auec le compas de propo. transferant la raison donnee sur l'vne des iambes, & posant à l'ouuerture de l'extremité d'icelle la ligne AD, & l'ouuerture de l'extremité de AF, donnera le segment AB.

Probleme XLVII.

D'vn angle d'vn triangle rectiligne, mener vne ligne droicte, qui diuise le triangle selon vne raison donnee.

Soit le triangle donné ABC, & il faut de l'angle B mener vne ligne droicte, qui diuise le triangle selon la raison de D à E.

Soit par le prob. preced. coupé AC costé opposite à l'angle B en F, selon la raison de D à E, puis soit menée BF; & icelle diuisera le triangle selon le requis: ce qui est manifeste.

1. p. 6

soient alignés (visée optique). Alors $DE = AB$ les angles en C sont égaux».

Ici, on peut se demander pourquoi des perpendiculaires ? Pour nombre de géomètres, deux droites sont parallèles si elles sont perpendiculaires à une même droite.

Plus proche de ce que nous recherchons est le témoignage de FLAVIUS VEGETIUS RENATUS qui, dans sont «Epitome rei militaris», au début du Ve siècle, donne comment mesurer les hauteurs de murailles dont on ne peut aller qu'au pied. ***(Document 6).***

Après une première méthode très pratique, il prescrit : *«Lorsque le soleil oblique projette l'ombre des murailles sur la terre, on mesure la longueur de celle-ci. Simultanément, on plante la perche de 10 pieds et on mesure son ombre. Ce dernier nombre noté, nul ne doute de trouver à partir de l'ombre de la perche la hauteur des murailles dont on sait qu'il en est autant de cette hauteur que de l'ombre».*

Nous dirions que le rapport de la muraille à son ombre est le même que celui de la perche à la sienne. Il est bien question de similitude évidente : *«nemo dubitat»* nul ne doute.

Mensura autem colligitur duplici modo. Aut enim linum tenue expeditum uno capite necitur in sagitta : quae cum ad muri fastigia directa pervenerit ex mensura lini murorum altitudo deprehenditur. Aut certe, cum sol obliquus umbram turrium murorumque jaculatur in terram, tunc, ignorantibus adversariis umbræillius spatium mensuratur ; itemque decempeda figitur ex umbra ipsius similiter mensuratur : quoi collecto numero, nemo dubitat ex umbra decempedae inveniri altitudinem civitatis, cum sciatur quanta altitudo quantum umbrae emittat in longum.

VEGECE Ve siècle

Il y a deux façons de mesurer.

Ou bien un peleton de fil est noué par un bout à une flèche. Losque celle-ci parvient au droit du baut du mur de la longueur du fil on déduit la bauteur.

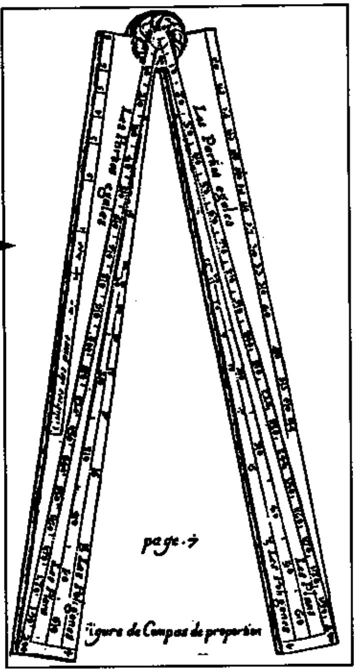
Ou bien lorsque le soleil...

La géométrie dite «faux BOECE» du Xe siècle n'aborde pas ce sujet, non plus que Gerbert — le pape de l'an 1000 - dans ce dont nous disposons de sa correspondance. Mais il lui est attribué plusieurs procédés de mesure à distance comme il en est pour Heron d'Alexandrie (– IIe siècle ?).

Si BOUELLE dans son «Art pratique de géométrie» (1509) donne un moyen de partager en n parties un segment de droite, il ne cite pas d'autre nom que celui d'EUCLIDE. Mais peut-être y a-t-il une autre idée dans ce texte. (***Document 7***). Et le *«ita deinceps»* amorce-t-il une récurrence ?

Pour rester dans le domaine des constructions (les "problèmes" des anciens), voyons l'ouvrage de HENRION intitulé : «La géométrie pratique» (1623) (***Document 8***) . Parmi de nombreux problèmes, le XLVI : *«Couper une ligne droite donnée en parties qui soient entr'elles selon une raison don-*

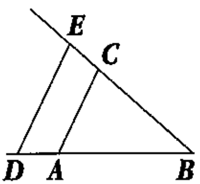
née». *B* coupe (*AD*) selon la raison de *AF* à *FG* **comme il est manifeste**. Et de renvoyer aussi pour résoudre au “compas de proportions”. Cet instrument, outil de base jusqu’à la Révolution qui lui, repose, en fait, sur l’égalité des rapports $\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}=\dots$ ***(Document 9)***



Et DESCARTES ? En première page de sa “Géométrie” (1637) : *«Comment se font géométriquement la multiplication et la division....Je n’ai qu’à tirer la parallèle»* ***(Document 10)***. Pas de démonstration : Elémentaire, mon cher Schooten!

LA GEOMETRIE

Soit par exemple AB l'vnité, & qu'il faille multiplier BD par BC, ie n'ay qu'à ioindre les points A & C, puis tirer DE parallèle à CA, & BE eſt le produit de cette Multiplication.



Ou bien s'il faut diuifer BE par BD, ayant ioint les points E & D, ie tire AC parallèle a DE, & BC eſt le produit de cete diuifion

Document 10

XVII^e - XVIII^e siècles, multiplication des ouvrages.

Il y a les fidèles d’EUCLIDE qui respectent son ordonnance : rapport d’aires, figures semblables avec le cas du triangle coupé par une parallèle à l’un des côtés. On y trouvera les Jésuites, sans doute sur “ordre” du Collège Romain : DESCHALLES - ses “Eléments d’Euclide” (1660) ont souvent été réédités, après révision par OZANAM, jusqu’en 1740 et PARDIES aussi avec sa “méthode courte” (1678 rééditée jusqu’en 1749). Curieusement, DESCHALLES au début de son livre, parle pour mesurer une distance inaccessible et du procédé relevé chez NIPSIUS, et de mesurer en “rapportant un triangle sur papier”...,“avec une échelle proportionnée”, mais sans démonstration. Toujours le balancement entre géométries “intéressée” ou “à philosopher”.

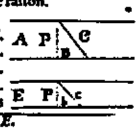
Et les autres ?

Ces “Messieurs de Port Royal”, à côté de leur “Logique” et de leur “Grammaire” avaient besoin d’une géométrie. Pascal en avait parlé, un soir, qui maintenant avait des regards d’un autre “ordre”… C’est donc Arnauld (Antoine) qui va publier en 1667, les “Nouveaux élémens de géométrie”. C’est un tout autre abord du sujet. Dans la préface, l’auteur écrit qu’il *«ne considère pas tant la géométrie que l’usage qu’on en peut faire»*. Il veut *«réduire les pensées à un ordre naturel»*.

On a alors une nouvelle proposition fondamentale au livre X, qui concerne les lignes proportionnelles ***(Document 11** ci-dessous).*

PROPOSITION FONDAMENTALE
DES LIGNES PROPORTIONELLES.

LORS que deux lignes ſont également inclinées en deux differens eſpaces paralleles, elles ſont entr'elles comme les perpendiculaires de ces eſpaces, & leurs éloignemens du perpendicule ſont auſſy en même raiſon.



Soient deux eſpaces A & E.
Soient appellées dans l'eſpace *A*.
La perpendiculaire, *P*.
L'oblique, *C*.
L'éloignement du perpendicule *B*.
Et ſoient de même appellées dans l'eſpace, *E*.
La perpendiculaire *p*.
L'oblique *c*.
L'éloignement du perpendicule *b*. Je dis que

Pp :: *Cc* :: *Bb*.

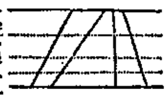
Et en voila la preuve tres naturelle, dont je ne croy pas que jamais perſonne ſe ſoit aviſé.

Soit *p* diviſée en quelques aliquotes que l'on voudra, 10. 20. 500. 6000. 10000. &c. & ces aliquotes quelconques de *p* ſoient appellées *x*.

Si on tire par tout les points de cette diviſion telle qu'elle ſoit des paralleles à l'eſpace *A*, cet eſpace ſera diviſé en autant de petits eſpaces paralleles qu'*x* ſera dans *p*, & ces petits eſpaces ſeront égaux par le 2ᵉ Lemme, parce qu'ils auront tous *x* pour perpendiculaire.

Et de là il s'enſuit que *C* ſera auſſy diviſé en aliquotes pareilles à celles de *P*, parce que les portions de *C*, qui ſe trouvent entre chacun de ces petits eſpaces égaux y eſtant également inclinées par le 9. Lemme, y ſont égales par le 8.

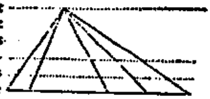
PREMIER COROLLAIRE.



PLUSIEURS lignes eſtant diverſement inclinées dans le même eſpace parallele, ſi elles ſont toutes coupées par des paralleles à cet eſpace, elles le ſont proportionellement, c'eſtadire que chaque toute eſt à chacune de ſes parties, telle qu'eſt la 1ʳᵉ, ou la 2ᵉ, ou la 3ᵉ &c. comme chaque autre toute a la même partie 1ʳᵉ, ou 2ᵉ, ou 3ᵉ &c.

C'eſt une ſuitte manifeſte du precedent Theoreme, puiſque d'une part toutes les toutes ſont dans le même eſpace, qui eſt l'eſpace total. Toutes les premieres parties dans le 1ᵉʳ eſpace partial, les 2ᵈᵉˢ dans le 2ᵉ, & ainſy des autres. Et que de l'autre chaque toute & chacune de ſes parties ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace par le 9ᵉ Lemme. Donc la 1ʳᵉ toute eſt à ſa 1ʳᵉ partie comme la ſeconde toute à ſa 1ʳᵉ partie.

SECOND COROLLAIRE.



SI pluſieurs lignes ſont menées d'un même point ſur une même ligne, elles ſont coupées proportionellement par toutes les lignes paralleles à celle qui les termine.

C'eſt la même choſe que le precedent Corollaire, puiſque tirant par le point commun à toutes ces lignes une ligne parallele à la ligne qui les termine, elles ſe trouveront toutes dans le même eſpace parallele, & par conſequent les paralleles à cet eſpace les doivent toutes couper proportionellement.

Nouveaux éléments de Géométrie - Livre X.

paru sans nom d'auteur chez Charles Savreux à PARIS M. DC. LXVII

avec privilège du Roy

L’ordre naturel fait traiter des lignes avant d’user des surfaces. On ne s’appuiera pas sur le rapport des secondes pour établir celui des premières. Conséquence : il faut traiter, à ce stade de l’exposé, le cas de la raison (le rapport) lorsqu’elle n’est ni entière ni quotient d’entiers, et souvent les successeurs escamoteront cette question. On use de parties aliquotes commune assez fines. CAVALIERI et les “indivisibles” sont, sans doute, là dans l’ombre. Une question : cette idée des bandes parallèles était peut-être en germe chez BOUELLE ? ARNAULD n’évoque ni réciproque, ni l’espace.

En ce qui concerne les collèges dirigés par les Oratoriens, il y a les "Elémens" du Père LAMY (1685, réédités jusqu'en 1731) ***(Document 12ci-contre).*** Ceux-ci sont rédigés dans l'esprit de l'ouvrage d'ARNAULD. Deux triangles sont dits semblables lorsque leurs côtés font des angles égaux ; la définition ne parle plus du rapport des côtés. Le cas de l'espace est étudié également chez cet auteur.

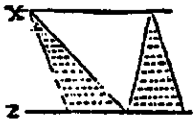
Mêmes idées dans l'ouvrage de l'abbé LA CAILLE (1744) et apparaît là une nouvelle figure sur ce sujet ***(Document 13 ci-dessous).***

Elements de Geometrie.

Livre II. Section V.

Cette methode que nous expliquons ici s'appelle la methode des indiviſibles ; parce qu'on ſuppoſe des lignes qui ont une largeur indiviſible à cauſe de ſa petiteſſe.

On peut employer cette même methode pour prouver l'égalité des triangles qui ſont ſur une même baſe, & qui ont la même hauteur ou qui ſont entre deux paralleles ; car ſi on ſuppoſe que deux lignes égales ont le même mouvement, & qu'elles ſe diminuent proportionnellement, il faut que dans le même temps elles faſſent des ſurfaces égales.



Si auſſi on conçoit deux ſurfaces ſur deux baſes égales, compoſées d'un égal nombre de lignes indiviſibles, qui ſont diminuées proportionnellement ; de ſorte que toutes ſoient égales chacune à chacune, il faut que ces deux ſurfaces qui ſont deux triangles ſoient égales.

En général toutes les propriétés que nous avons démontrées ſur les quantités proportionelles, conviennent aux lignes qui le ſont. Ainſi nous ſuppoſerons toujours la démonſtration de ces propriétés. Au reſte, il ne s'agit ici que de proportions & progreſſions géométriques ; & c'eſt la partie la plus eſſentielle des Elements de Geometrie.

430. Pour la traiter avec ordre, ſuppoſons d'abord que ſur la droite AB on prenne des parties égales AD, DG, GI, &c, & que l'on mene les paralléles DF, GH, IK, &c, ſur la droite AC, il eſt clair que les parties AF, FH, HK, de cette droite ſeront égales entre elles : car ſi on mene parallélement à AC les lignes DE, GR, IS, les triangles ADF, DGE, GIR ſeront égaux. Donc AF = DE = GR = FH = HK = &c. 41.

On aura donc AD : AF :: DG : FH :: GI : HK ; & par conſéquent AP ſomme de tous les antécédents eſt à AQ ſomme de tous les conſéquents (241), comme un ſeul antécédent AD eſt à ſon conſéquent AF, comme un nombre quelconque de parties de AB eſt au même nombre de parties de AC ; par exemple :: AG : AH :: AI : AK :: DI : FK, &c.

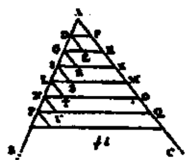
431. Donc 1°, *Si deux droites* AE, AD *ſont coupées par deux ou par un plus grand nombre de paralléles* ED, CB, *leurs parties* CE, BD *ſeront proportionelles aux lignes entieres* AE, AD. 42.

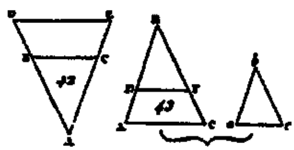
432. 2°, Si deux triangles ABC, *abc* ſont ſemblables, tous leurs côtés homologues ſont proportionels. 43.

Car ſi l'angle B = *b*, & ſi on prend ſur AB la partie DB égale au côté homologue *ab*, en menant DF parallele à AC, le triangle BDF ſera égal au triangle *abc*.

Or AB : BC :: BD : BF. Donc AB : BC :: *ab* : *bc*.

Des Lignes proportionelles.





Encore les "espaces parallèles" d'ARNAULD chez Rivard lequel dédie son ouvrage en 1732 au recteur de l'Université de Paris !... Il semble, en France au moins, qu'un nouveau point de vue prenne rang ; on le retrouve également dans l'ouvrage de MAZEAS (1770) au collège de Navarre. Le fond du problème est alors soulevé et c'est CLAIRAUT qui écrit : *«Euclide avait à convaincre* *des sophistes obstinés qui se faisaient gloire de se refuser aux réalités les plus évidentes... Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte»* (Préface des "éléments de Géométrie" - 1743). C'est pourquoi *«Afin de suivre une route semblable à celle des inventeurs, il s'attache d'abord à faire découvrir aux commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des terrains»*. Il importe donc d'avoir un moyen qui supplée à la construction des figures en vraie grandeur. *«Ce moyen s'offre comme de lui-même. Il vient à l'esprit de faire une figure semblable dans laquelle les pouces remplacent les toises[*(proposition 33) *«Les figures semblables ne sont différenciées que par les échelles sur lesquelles elles sont construites»* (proposition 48).

Ce point de vue sera couronné par LAPLACE dans son "Exposition du système du monde" (An IV). Il écrit : *«La proportionnalité est un postulat bien plus naturel que celui d'Euclide»*.
Pour ces derniers, c'est donc proportionnalité qui engendre mêmes angles donc parallélisme - l'ordre est retrouvé -.

Et BÉZOUT ?

Dans ses "Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine" (1765-1770 et nombreuses rééditions), ne déclare-t-il pas : *«transportons aux lignes les connaissances que nous avons tirées des nombres sur les proportions»* ? Certes, on retrouve la figure inaugurée par LA CAILLE et donc les parallèles avant les triangles semblables, mais l'idée de rapports de mesures donc de nombres vient apporter un autre éclairage que d'aucuns voient en germe chez ARNAULD. Poursuite de cet autre éclairage également dans une réédition du "Cours de mathématiques" de BÉZOUT faite par REYNAUD, examinateur à l'école Polytechnique, en 1836. Au chapitre de la similitude des triangles, on lit : *«Ces principes sont la base de toutes les parties des mathématiques théoriques ou pratiques. Nous insisterons un peu sur leurs usages...»*. Or, après quelque exemple, *«nous ne nous arrêterons pas plus longtemps parce que la trigonométrie nous fournira des moyens plus expéditifs...»*. En effet, la trigonométrie fait maintenant partie des ouvrages de géométrie. S'il a existé, dès le XVI^e^ siècle, des ouvrages complets de trigonométrie, ceux-ci étaient distincts de ceux-là.

Mais nous sommes entrés dans le XIX^e^ siècle.

Et LEGENDRE ?

C'est le retour à Euclide. Les "Eléments de géométrie de LEGENDRE" régneront sur l'enseignement des mathématiques de 1794 à 1823 (12 éditions de son vivant) tout en reprenant la démonstration et l'ordre du Grec. Ceux qui vont vivre de cette "Géométrie de Legendre", REYNAUD puis BLANCHET n'innovent pas. On ne compte plus les rééditions jusqu'en 1881... Et puis comme PEYRARD, en 1814 et 1819, publie sa nouvelle traduction d'Euclide à partir de textes anciens retrouvés, on ne regarde que de ce côté.

Toutefois DUPIN, dans son "Cours au Conservatoire des Arts et Métiers" (1826-28) - mathématiques intéressées-, reste fidèle à l'esprit de CLAIRAUT, donc aux bandes parallèles. Ensuite on trouve deux ouvrages qui furent discutés, leurs auteurs passant alors pour fort peu conformistes. Ils maintenaient la séparation entre les propriétés des parallèles et celles des triangles semblables. Ces auteurs sont :

- CATALAN (1ère édition : 1843 ; 2ème édition : 1866 ...). Il étudie d'abord les segments *«de deux droites quelconques déterminés par trois parallèles sont proportionnels»* puis les réciproques, puis le cas de *n* parallèles et, après seulement, les figures semblables. Il traite l'espace sous le titre : quadrilatère gauche.
- MERAY (1ère édition : 1874 ; 2ème édition : 1905 ...). Il étudie à la fois plan et espace, parle de "bandes" et de "murs parallèles", sépare les rapports, alors étudiés des figures semblables, évoque la notion de projection et use de rapports algébriques.

Par ailleurs, on relèvera que, dans leurs "essais sur la géométrie", ni CHASLES (1937) ni HOÜEL (1867) ne s'attarderont sur le sujet et ne citent Thalès à cette occasion.

Et les manuels scolaires ? Et les programmes ?

En effet, le XIXe siècle vit éclore ces nouvelles entités agissant plus ou moins les unes sur les autres.

Si l'on se plonge dans ces ouvrages "scolaires", aucune mention de THALES n'apparaît d'abord. Ni dans les multiples géométries d'après LEGENDRE qui régnèrent longtemps dans ce siècle, ni chez CIRRODE (1844) qui pourtant reprend l'idée d'ARNAULD, ni chez MACÉ de LESPINAY, ni chez VACQUANT (1866) - nous retrouverons ces noms plus tard - ni chez ANDRÉ (1895) ni chez GIROD (1881 et 1897) pour citer les plus répandus. Silence également après la réforme des programmes de 1905 et, toujours parmi les plus diffusés, on citera BOREL (1905) SAINTE LAGUE (1913) qui use de lignes proportionnelles avec sens, NIEWENGLOSKY et GÉRARD qui parlent de MÉNÉLAÜS et de CÉVA (1918), HADAMARD (1922) qui parle de "Théorème fondamental" avec la figure de LA CAILLE, Illovici et Robert qui usent de vecteurs et d'homothétie (1939), et même LECOMTE (1942).

Mais quand apparaît donc THALES ?

Dans "Eléments de géométrie" de Rouche et Comberousse (Réédition de 1883), au livre III : Figures semblables, on lit cette scolie : *«Dans le triangle, l'égalité des angles entraîne la proportionnalité des côtés. Cette propriété fondamentale, dont la découverte est due à Thalès (639-548), ne subsiste pas pour les polygones quelconques».*

Curieuse entrée en scène. Mais et *le* "Théorème" ?

Il existe un ouvrage édité chez Mame à Tours, avec pour nom d'auteur J.F. mais sans date d'impression (Dans les dernières années du XIX[e] siècle certaines maisons d'édition ne mettaient pas de date pour, semble-t-il, des raisons d'imposition fiscale…). Cet ouvrage comporte un "Théorème de Thalès" ***(Document 14)***.

Théorème de Thalès

221. ***Toute parallèle menée à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.***

Soit ABC un triangle quelconque, et DE une parallèle au côté BC. Il faut prouver que les deux triangles ADE et ABC ont les angles respectivement égaux, et les côtés homologues proportionnels.

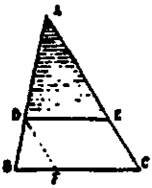


Fig. 164.

1° L'angle A est commun ; les angles D et B sont égaux comme correspondants, ainsi que E et C.

2° Menons DF parallèle à AC. La figure DECF est un parallélogramme, et ainsi DE = FC (n° 100). A cause des parallèles DE et BC on a (n° 213) : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

Les parallèles DF et AC donnent également :

$\frac{AD}{AB}=\frac{FC \text{ ou } DE}{BC}$ **d'où** $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ **Donc…**

Document 14
Cours par F.J. (vers 1895?) page 96
Mame éditeur

Dans "Exercices de Géomé-trie" par F.G.M., encore chez Mame (4[ème] édition : 1907), on lit d'utiles compléments historiques.

Enfin, la date la plus ancienne , "Cours de géométrie élémentaire", par E. Combette professeur au Lycée Saint-Louis . Alcan éditeur, 1992 Théorème de Thalès : *«On étudie un triangle coupé par une parallèle un des côtés…»*

§ III. — Similitude et homothétie.

206. ***Similitude.*** **L'étude des *figures semblables* repose principalement sur le *théorème de Thalès*, relatif aux triangles semblables. (G., n° 221.)**

Pour résoudre un problème à l'aide de la similitude ou de l'homothétie, on construit une figure semblable à la figure demandée, et on compare une dimension à son homologue donnée. On opère surtout ainsi lorsque le problème proposé, ou le problème plus simple auquel on a pu le ramener, ne dépend que d'une ligne donnée.

206 a. Note. Le nom d'*homothétie* est dû à CHASLES, mais l'étude des *figures homothétiques* est de PONCELET.

Actuellement l'étude de l'*homothétie* précède celle de la *similitude*, ou des *figures semblables*.

*** THALES, un des sept sages de la Grèce (639 à 548 av. J.-C.), alla s'instruire en Égypte ; il mesura la hauteur des pyramides par le moyen de leur ombre ; aussi lui attribue-t-on les théorèmes relatifs aux triangles semblables. THALES s'établit ensuite à Milet, et y fonda l'École ionienne. Il eut la gloire de compter PYTHAGORE au nombre de ses disciples.**

Exercices par F.G.M (1907)
4ème édition, page 96.
Ce livre comporte beaucoup
de notes historiques

Quelques curiosités et variétés

Barbarin : “Géométrie rationnelle” (ouvrage inspiré de Hilbert) (1911) énonce : *«Théorème fondamental (Thalès). Si deux sécantes coupent des parallèles...»*

Chamman et Rebouis -Classes de 2de et 1ère (édition 1925) (***Document 15**, ci-dessous*)suivent scrupuleusement les programmes officiels et donc n’en parlent pas, mais dans une édition de 1912 de la même collection, Géométrie dans l’espace :

Chamman et Rebouis (1925)

§ 3. — LIGNES PROPORTIONNELLES

264. *Théorème fondamental. — Des droites parallèles déterminent sur des sécantes quelconques des segments proportionnels.*

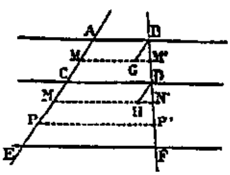
Soient les droites parallèles AB, CD, EF et les sécantes AE et BF; il faut démontrer que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}.$$

265. REMARQUE. — On peut écrire aussi :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}},$$

266. *Théorème. — Toute droite parallèle à l’un des côtés d’un triangle détermine sur les deux côtés qu’elle rencontre des segments proportionnels.*



«Trois plans parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments proportionnels en vertu du théorème de Thalès.» Pour la réciproque, ces auteurs évoquent orientation et signe. Donc ici, c’est Thalès dans l’espace...

Même aventure chez Chenevier: 1931 classe de Seconde, il est question de bandes parallèles, il y a une réciproque mais pas de nom propre. Par contre, 1925 : classes de 4ème et 3ème, *«Théorème de Thalès: dans un triangle coupé par une parallèle à un des côtés...»*

Donc, dans les ouvrages où figure un théorème de Thalès, celui-ci apparaît sous des formes différentes, dans des chapitres différents. En gros, deux grandes familles se dessinent quant à la géométrie plane :

- Triangle coupé par une parallèle à un des côtés dans le cadre de figures semblables, sans pour cela toujours reprendre la démonstration par les aires (famille d’Euclide). Nous y avons rencontré F.J. et F.G-M et Combette. Il y a également déjà notés, Vacquant, mais dans l’édition de 1908 et Macé de Lespinay dans l’édition de 1917. Ces deux auteurs citent maintenant Thalès. Et encore Boucheny et Gardinet (1920) Beche (1920) et plus tard Chenevier.
- Bandes parallèles et sécantes dans le cadre des lignes proportionnelles avec

parfois évocation de projection (famille d'Arnauld ?). Figurent là Barbarin, Brachet et Dumarquet, Maillard, Lebossé et Hemery, Lespinard et Pernet etc… Dans cette famille, Foulon (1937) fait de la propriété un théorème fondamental de Thalès et introduit les rapports algébriques pour unicité et réciproque.

La variété d'énoncés demeurera dans la seconde moitié du XX[e] siècle d'autant que Thalès est maintenant cité dans les programmes. Vers 1990, la famille euclidienne paraît dominer dans les ouvrages scolaires sans que s'éclipse l'autre. On voit même apparaître "figures de Thalès" et "configuration de Thalès" (Terracher), et il y a aussi $k(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$, mais ceci est une autre histoire…

Et au-delà de "l'Hexagone" ?

Sur le sujet qui nous occupe, encore au milieu du XX[e] siècle, pas de trace de Thalès. Témoins ces livres en anglais ou en allemand. Silence donc sauf, tardivement, dans des ouvrages d'inspiration française.

(Documents 16,17,18).

§ 3. Teorema lui Thales

TEOREMA IX.3. **Fie A un vector în planul Π prevăzut cu o origine O şi vectorul A' = λA. Fie încă d_1, d_2 două axe care trec prin originea O. În aceste condiţii are loc relaţia :**

$$\mathbf{A}'_1 = \lambda \mathbf{A}_1$$

sau, altfel spus :

$$(\lambda \mathbf{A})_1 = \lambda \mathbf{A}_1.$$

I. Să facem deocamdată ipoteza $\lambda > 0$ (fig. IX, 9).

a) Să presupunem $\lambda = p$ — întreg. În acest caz fie $B, C, \ldots$ puncte pe $\partial(O, A)$, aşa ca $\rho(O, A) = \rho(A, B) = \rho(B, C) = \ldots \rho(L, A')$. După teorema lui Thales sub forma slabă avem :

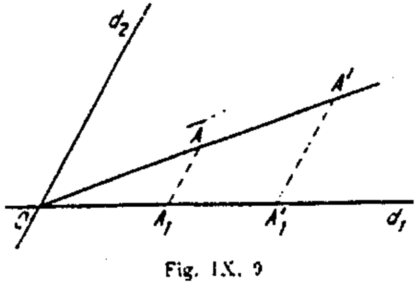


Fig. IX. 9

$$\rho(O, A_1) = \rho(A_1, B_1) = \ldots = \rho(L_1, A'_1),$$

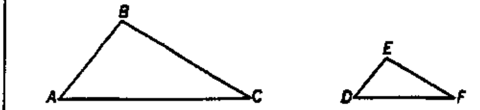
şi deci :

$$\rho(O, A'_1) = p\,\rho(O, A_1),$$

Document 16
Geometrie a planului
Bucuresti (1968)

Ratio in geometry

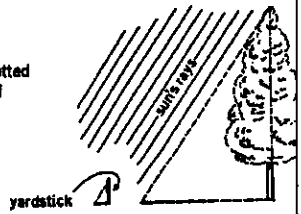
When two triangles (or polygons) are similar, their sides can be paired so that the ratios are equal. In the example below, the two triangles are similar and the ratio of their sides is 2 : 1.



The ratio of $\overline{AB}$ to $\overline{DE}$ is 2 : 1.
The ratio of $\overline{BC}$ to $\overline{EF}$ is 2 : 1.
The ratio of $\overline{AC}$ to $\overline{DF}$ is 2 : 1.

EXERCISES —

The two triangles shown by the dotted lines are similar. If the shadow of the yardstick is 2 feet and the shadow of the tree is 16 feet, how tall is the tree?



ahlensatz

Document 17
Elementary School
Mathematics (6)
EICHOLZ
Addison-Wesley London
1964

25. Der Strahlensatz

1. Trägt man auf dem Schenkel a eines Winkels (Fig. 210) **gleich lange** Strecken $SA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$ auf und zieht man durch die Endpunkte dieser Strecken parallele Gerade, so sind auch die auf dem zweiten Schenkel b durch die parallelen Geraden ausgeschnittenen Strecken SB_1, B_1B_2, B_2B_3, ... gleich lang.

Verschieben wir nämlich irgendeine der Teilstrecken auf dem Schenkel b, etwa B_1B_2, in Richtung des Schenkels a nach $B_1'B_2'$ und dann diese Strecke in Richtung der Parallelen nach B_3B_4, so ist $B_1B_2 = B_1'B_2'$, $B_1'B_2' = B_3B_4$, also auch $B_1B_2 = B_3B_4$.

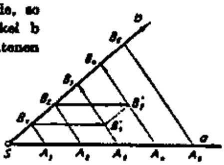


Fig. 210

2. a) Wir tragen nun auf dem Schenkel a des Winkels **zwei verschieden lange** Strecken SA_1 und A_1A_2 auf (Fig. 211) und ziehen wieder durch deren Endpunkte parallele Gerade, die auf dem zweiten Schenkel b die Strecken SB_1 und B_1B_2 ausschneiden.

Haben nun die Strecken SA_1 und A_1A_2 das gemeinsame Maß e, so gilt:

$$\begin{array}{r} SA_1 = p \cdot e \\ A_1A_2 = q \cdot e \\ \hline SA_1 : A_1A_2 = p : q \end{array}$$

Dabei sind p und q ganze Zahlen (in Fig. 211 ist $p = 4$, $q = 7$).

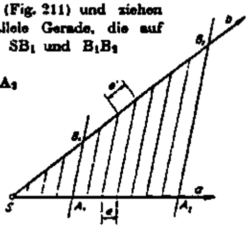


Fig. 211

Tragen wir nun das gemeinsame Maß e auf der Strecke SA_1 p-mal, auf der Strecke A_1A_2 q-mal auf, und ziehen wir auch durch die Teilungspunkte parallele Gerade zu den gegebenen Parallelen, so wird nach Absatz 1 die Strecke SB_1 in p, die Strecke B_1B_2 in q gleiche Teile e' geteilt. Daher gilt:

$$\begin{array}{r} SB_1 = p \cdot e \\ B_1B_2 = q \cdot e' \\ \hline SB_1 : B_1B_2 = p : q \end{array}$$

Aus den beiden Proportionen folgt:

$$SA_1 : A_1A_2 = SB_1 : B_1B_2$$

Document 18
Lehrbuch der Mathematik für
die 3 und 4 Klasse der
Mittelschulen
LAUB - Wien 1966

Mais alors ?

C. Boyer dans "A history of mathematics" écrit : *«Au contraire des Egyptiens, les anciens Babyloniens étaient familiers avec le fait qu'un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit, proposition généralement connue comme étant le théorème de Thalès»*... Et voilà! Autres témoins outre-Manche, outre-Rhin, le disciple énonce : *«Théorème de Thalès : un angle inscrit dans un demi-cercle est droit.»* ***Documents 19-20.***

Theorem of Thales—

an angle inscribed in a semi-circle is a right angle

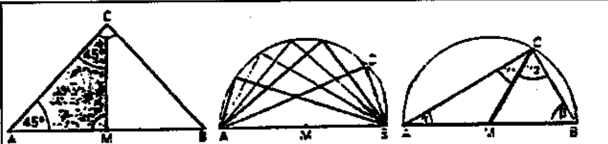
Et, au Brésil...

• O ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.

Jedes Dreieck über einem Durchmesser in einem Halbkreis ist rechtwinklig.
Satz des Thales

Document 19
Gamma 7
Mathematik Gymnasium

Der Satz des Thales



Satz: a) Wenn bei einem Dreieck ABC die Ecke C auf dem Halbkreis über AB liegt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.
b) Wenn ein Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat, dann liegt C auf dem Halbkreis über AB
Kurz: Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter

Document 20
Mambacker
Schweitzer
(1983 - Stuttgart)

Un collègue d'Helvétie questionné sur cette alternative associait, lui, le nom de l'homme de Milet à la propriété de la hauteur du triangle rectangle qui partage l'hypoténuse en deux segments qui...

L'Europe de l'enseignement aura à se pencher sur cet excès de théorèmes de Thalès, sinon *«Vérité en deça des Pyrénées, erreur au-delà»*.

Enfin, pourquoi un nom en France, vers à la fin du XIX^{e} siècle.

Une hypothèse peut être avancée. Vers les débuts de la Troisième République, le programme de l'agrégation de mathématiques stipulait que les candidats devaient faire montre de connaissances en histoire de la discipline. On peut alors penser que, devenus maîtres, ceux-ci eurent à cœur d'user de leurs acquis en la matière et d'introduire des noms propres dans leurs cours. En effet, nombre de propriétés figurant dans des ouvrages antérieurs n'y avaient pas le parrainage de Pythagore, Euler ou Pascal comme cela va devenir fréquent par la suite.

Les programmes français de la fin du XX^{e} siècle, en évoquant la "dimension historique" sont dans la ligne de ces efforts de montrer que, derrière les mathématiques, il y a des hommes. Ce petit travail a voulu y contribuer.

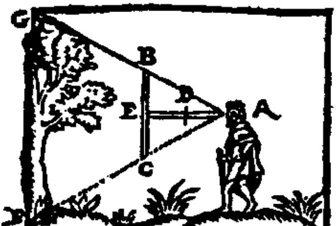
ANNEXE

Variæ

Dans “*Récréations mathématiques*” sans nom d'auteur - Rouen 1629).
- maçons et charpentiers useront longtemps encore du procédé -

des Recrea. Mathe. 17

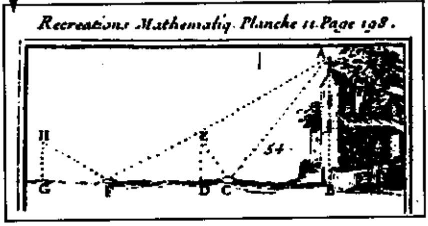
PROBLEME 12.



Mesurer la hauteur d'une Tour ou d'un Arbre, par le moyen de deux petits bastons ou de deux pailles, sans autre formalité.

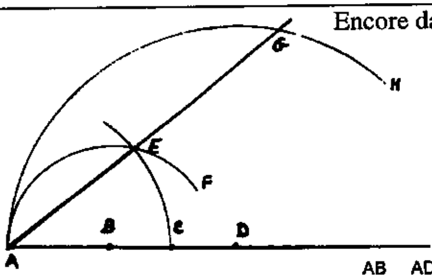
FAut auoir deux bastons tellement proportionnez, que EB. soit esgal de DE. & DE. de DA. alors posant le poinct A. proche de l'angle de l'œil, & fermant l'autre, faut se reculer ou s'aduancer iusques à ce que les rayons visuels descouurent le poinct de hauteur G. & de profondeur ou de racine si c'est vn arbre F. Alors mesurez la distance qu'il y a de vostre pied aupres de l'arbre, & vous aurez la hauteur d'iceluy: ce qui est requis.

Dans “*Récréations mathématiques*” d'OZANAM (1694)



- On peut aller à la base B, on place un miroir en C et de E, on vise le reflet de A.
- On ne peut aller en B, on fait une seconde visée avec miroir en F et du haut du même balcon (HG = ED) déplacé en H.

Encore dans le même ouvrage d'OZANAM



Trouver à trois lignes données une quatriéme proportionnelle.

POur trouver aux trois lignes données AB, AC, AD, une quatriéme proportionnelle, décrivez des deux extremitez B, D, de la premiere & de la troisiéme ligne donnée, par l'extremité commune A, les deux arcs de Cercle AEF, AGH, & ayant appliqué sur le premier AEF la ligne AE égale à la seconde ligne donnée AC, prolongez cette ligne AE jusqu'à ce qu'elle rencontre le second arc AGH, en quelque point, comme en G, & toute la ligne AG sera la quatriéme proportionnelle qu'on cherche.

$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AG}$ sans qu'apparaisse le mot parallèle...