Euclide, après avoir montré que des angles au centre égaux découpent sur des cercles égaux des arcs égaux (*Eléments* Livre III, Propositions 24, 26, 27), utilisait la théorie des proportions du Livre V pour montrer cette proportionnalité (Livre VI, Proposition 33)[51]. Nous verrons ci-dessous comment les auteurs des grands traités de géométrie ont résolu le problème de la proportionnalité des angles et des arcs d'une façon analogue à celle dont ils démontrent le théorème des lignes proportionnelles.

Legendre, le retour à l'ordre euclidien

1. *Sur quelques traités classiques*

On a vu que pour Arnauld la théorie de la mesure des grandeurs relève d'une arithmétique englobant nombres et grandeurs et que la théorie des proportions relève de cette arithmétique. Cette conception, qui remet en question l'ordre euclidien, sera reprise dans la plupart des grands traités de géométrie élémentaire ultérieurs ; dans ces traités le chapitre consacré aux lignes proportionnelles, qui devient le chapitre introductif à la mesure des grandeurs, s'appuie sur cette arithmétique préalable qui traite des raisons, mêlant arithmétique des nombres et arithmétique des grandeurs (le calcul numérique et le calcul spécieux de Viète) et précisant parfois, à la façon de Descartes, que le choix d'une unité permet d'*identifier* ces deux calculs ; on évite ainsi une définition précise des proportions, se contentant de les définir comme des égalités de rapports sans que la notion de rapport soit toujours explicitée, soit que l'auteur renvoie à un traité d'arithmétique, soit qu'il juge inutile de préciser une notion qui lui apparaît claire.

Citons, parmi ces traités, les *Eléments de Géométrie* [La] de Lamy, publiés en 1685 et plusieurs fois réédités tout au long du XVIII^{e} siècle, ouvrage proche de celui d'Arnauld dont il reprend certaines parties, parfois textuellement ; le projet de Lamy était de compléter l'ouvrage d'Arnauld en y ajoutant la géométrie solide, comme Lamy l'explique dans la préface de son ouvrage.

---

51 Notons la difficulté posée par la définition d'un multiple d'un angle ou d'un arc ; en effet, pour Euclide, la notion d'angle implique que celui-ci est moindre que deux droits, cependant Euclide peut être amené à considérer des sommes d'angles plus grandes que deux droits ; pour une discussion de ce problème, nous renvoyons à l'ouvrage cité de Heath [He1] (tome II, p. 275-276). Le point de vue d'Arnauld, qui utilise les parties, évite cette difficulté.

Lamy s'appuie sur la théorie des grandeurs qu'il a développé dans un ouvrage antérieur et dont il donne un extrait à la fin de ses *Eléments de Géométrie*[52].

Comme dans l'ouvrage d'Arnauld, la raison est *"la manière dont une grandeur contient ou est contenue dans celle avec laquelle on la compare"*[53], une proportion étant une égalité de raison. Si Lamy distingue raison de nombre à nombre et raison sourde, il n'explicite pas l'égalité de raison sourde.

Lamy introduit, comme Arnauld, la notion d'espace parallèle et démontre, utilisant les cas d'égalité des triangles rectangles, les deux lemmes suivants[54]:

> *"Les lignes également obliques des espaces parallèles dans des espaces égaux sont égales."*

> *"Les lignes également obliques dans des espaces parallèles inégaux sont inégales; plus grande si l'espace est plus grand, plus petite si l'espace est plus petit."*

Il peut alors énoncer le théorème:

> *"Ayant partagé un espace parallèle par deux ou plusieurs parallèles, la perpendiculaire de l'espace et la ligne oblique qui y sera, seront coupées proportionnellement"*

En fait Lamy ne démontre le théorème que dans le cas commensurable, se contentant de remarquer, sans autre précision, que si une division en parties égales de la perpendiculaire laisse une partie soit plus petite soit plus grande, la même propriété aura lieu pour la division définie sur l'oblique. Si ce raisonnement semble renvoyer à celui d'Arnauld, il reste incomplet dans la mesure où l'égalité de raison n'est pas définie.

Notons que si Lamy ne définit pas la raison comme un nombre, il lui associe ce qu'il appelle l'*exposant* de la raison, qu'il définit comme le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent, mais le quotient lui-même n'est pas défini; voici ce qu'écrit Lamy:

> *"Divisant l'un des deux termes d'une raison par l'autre terme, le quotient de cette division est appelé l'exposant de cette raison.*

52 Dans l'édition (posthume)de 1753, la théorie des grandeurs est intégrée dans les *Éléments de Géométrie.*

53 Lamy [La1], p. 338

54 ibid. p. 103

Parce qu'il expose et fait connaître la manière que l'un des deux termes contient l'autre ou en est contenu"[55]

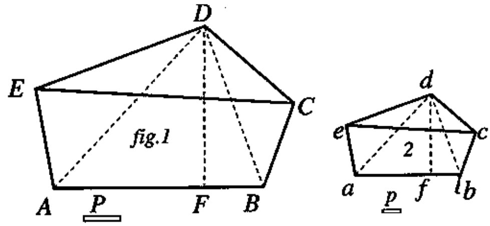
Dans les *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Arnauld avait défini l'exposant d'une raison de nombre à nombre ; pour une telle raison, l'exposant est représenté par la fraction irréductible qu'elle détermine[56]; deux raisons de nombre à nombre sont alors égales si et seulement si elles ont le même exposant. Arnauld précisait que cette dernière proposition ne peut s'étendre aux raisons sourdes, la notion d'exposant ne pouvant être définie dans ce cas[57].

Lamy ne semble pas prendre de telles précautions ; d'une certaine façon, l'exposant, même s'il n'est pas un nombre, se comporte comme un nombre. Tout cela nous montre l'ambiguïté de la mise en place d'une relation entre grandeurs et nombres, ambiguïté née du coup de force de Stevin, ambiguïté qui marque une étape obligée dans le développement de la notion de nombre comme nous le verrons avec les traités de Legendre et de Lacroix.

Les idées développées par Arnauld seront reprises tout au long du XVIIIe siècle, nous ne pouvons ici citer tous les ouvrages traitant de la théorie des proportions géométriques, nous arrêtant seulement à deux traités, les *Elémens de Géométrie* de Clairaut qui restent l'un des meilleurs ouvrages d'introduction à la géométrie écrit jusqu'à ce jour (ouvrage malheureusement ignoré par l'enseignement) et le *Traité Elémentaire de Géométrie* de Bossut pour la démonstration qu'il donne du théorème des lignes proportionnelles.

Dans la préface de son ouvrage, Clairaut précise ses conceptions quant à l'enseignement de la géométrie insistant sur la nécessité de construire cet enseignement à partir d'une problématique bien définie. C'est ainsi qu'il s'appuie sur la mesure des terrains, problématique qu'il a choisi dans la mesure où elle lui sert *"d'occasion pour faire découvrir les principales propriétés géométriques"*[58].

C'est la nécessité de représenter à l'échelle les terrains que l'on veut mesurer qui conduit Clairaut à introduire la notion de figures semblables.



55 ibid. p. 341

56 Arnauld [Arn1], p. 60 et Arnauld [Arn2], p. 92

57 Arnauld [Arn2], p. 102

58 Clairaut [Cl], p. xiv

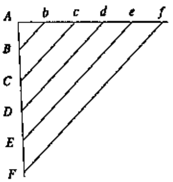
Deux figures *ABCDE* et *abcde* sont semblables si d'une part les angles *A, B, C, D, E* sont respectivement égaux aux angles correspondant a, *b*, *c*, *d*, *e*, et si chacun des cotés *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea* de la seconde figure contient une partie *p* autant de fois que chacun des côtés correspondants *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* contient une partie *P*[59]. C'est cette dernière condition qui définit, selon Clairaut, la proportionnalité[60].

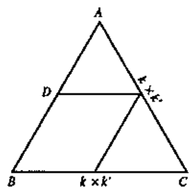
Dans un premier temps, Clairaut développe la théorie des figures semblables pour les seuls rapports commensurables ; il montre en particulier que deux triangles équiangles sont semblables, de façon précise si les triangles *ABC* et *abc* sont équiangles et si *ab* est égal à une fraction de *AB*, alors *ac* (resp: *bc*) est égal à la même fraction de *AC* (resp: *BC*)[61].

C'est seulement à la fin du livre II, consacré à des calculs d'aires, que Clairaut étudie le cas des rapports incommensurables en utilisant une méthode d 'approximation proche de celle d'Arnauld[62].

Le traité de Bossut a été rédigé à l'usage des candidats des concours d'entrée aux Ecoles militaires[63].

Dans la section de son traité relative aux lignes proportionnelles, Bossut montre d'abord que, si un côté d'un angle est divisé en parties égales et si l'on mène à partir des points de division des droites parallèles, elles découperont sur l'autre côté des parties égales (proposition I[64]). Il peut alors énoncer que dans un triangle *ABC*, une parallèle *DE* au côté *BC* partage les deux autres côtés en parties proportionnelles (proposition II[65]); lorsque *AB* et *AD* sont des grandeurs commensurables, Bossut divise *AB* en parties égales à une partie aliquote commune et la démonstration se réduit à un comptage, lorsque *AB* et *AD* sont des grandeurs incommensurables, Bossut divise le côté *AB* en *"une infinité de parties égales"*, les parallèles à *BC* menées par les points de division partagent le côté *AC* en parties égales, alors les points *D* et *E"tomberont ou seront censés tomber sur deux points de*





59 ibid. Livre I, Article XXXIII
60 ibid. Livre I, Article XXXV
61 ibid. Livre I, Article XXXIX
62 ibid. Livre II, Article XXVII
63 Taton et als [Tat]
64 Bossut [Bos], chapitre III, section I, p. 83
65 ibid. p. 86

division de AB et AC", ce qui implique la proposition.

On peut comprendre une telle démonstration si on la relie à la géométrie de l'infini telle que l'ont développée Wallis et plus tard Fontenelle, variante de la théorie des indivisibles, l'infini apparaissant comme un *"nombre"* supérieur à tous les entiers[66].

On pourrait alors poser le problème d'une mise en forme d'une telle démonstration dans le cadre d'une géométrie non-standard qui userait des méthodes proches de celles de l'analyse non-standard.

2. *Les "Elémens de Géométrie" de Legendre*

Avec l'ouvrage de Legendre[67], c'est un retour à Euclide qui se met en place ; nous n'analyserons pas ici l'ouvrage dans son ensemble, renvoyant à un article ultérieur[68], nous nous contenterons ici d'étudier la démonstration du théorème de Thalès et la relation entre le numérique et le géométrique sur laquelle elle s'appuie. Si Legendre revient à la méthode des aires pour retrouver la rigueur euclidienne (on verra en particulier l'utilisation de la méthode d'exhaustion), sa théorie de la mesure s'appuie sur une arithmétique préalable dont il rappelle les résultats au début de son ouvrage, et à laquelle il renvoie les notions de raison et de proportion, comme il l'explique dans la préface des premières éditions :

> *"Il est nécessaire, pour l'intelligence de cet ouvrage, que le lecteur ait la connaissance de la théorie des proportions, que l'on trouve expliquée dans les traités ordinaires d'arithmétique ou d'algèbre..."*[69]

Il peut ainsi mêler dans ses raisonnements, comme nous le verrons, les méthodes euclidiennes et les propriétés numériques.

Au début du livre III, intitulé *Les proportions des figures* Legendre remarque a propos des proportions :

> *"Si on a la proportion A:B :: C:D* (A est à B comme C est à D), *on sait que le produit des extrêmes $A \times D$ est égal au produit des moyens $B \times C$."*[70],

et il explique

> *"Cette vérité est incontestable pour les nombres; elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment ou*

66 cf. Wallis[We] et Fontenelle [Fo] ; cf. aussi Chevalier [Chl] et Michel Blay [Bl].

67 Legendre [Le]

68 Bkouche [Bk3]

69 Legendre [Le], préface de la troisième édition p. ii

70 ibid. p. 61

qu'on les imagine exprimées en nombres ; et c'est ce qu'on peut toujours supposer: par exemple, si A, B, C, D, sont des lignes, on peut imaginer qu'une de ces quatre lignes, ou une cinquième, si l'on veut, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité ; alors A, B, C, D, représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable, et la proportion entre les lignes A, B, C, D, devient une proportion de nombres."

mêlant ainsi, comme le veut la tradition cartésienne (Cf. ci-dessus), calcul numérique et calcul spécieux.

3. *La méthode des aires*

Notons d'abord que l'un des objectifs de Legendre est de démontrer le postulat des parallèles qu'il énonce sous la forme :

"Dans tout triangle, la somme des angles est égale à deux droits."

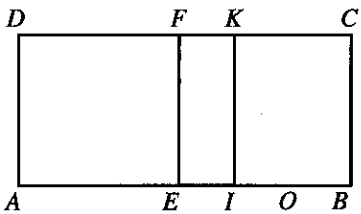
Les diverses éditions de son ouvrage correspondent aux différentes démonstrations qu'il donne de cette assertion, (notons que dans les neuvième, dixième et onzième éditions, devant les critiques, il renonce à cette démonstration jusqu'à ce qu'il en trouve une nouvelle qu'il publie dans la douzième édition), mais ce n'est pas le lieu d'en parler ici.

Une fois démontrée cette assertion, Legendre peut démontrer la proposition énoncée comme postulat par Euclide, puis l'égalité des angles correspondants et alternes-internes définis par deux droites parallèles coupant une autre droite. Au livre III de son ouvrage, Legendre montre d'abord, à la façon d'Euclide, que les parallélogrammes (resp. les triangles) ayant des bases égales et des hauteurs égales, sont équivalents (c'est-à-dire ont des aires égales), puis il énonce l'assertion (proposition 3) :

"Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases."

Lorsque les bases sont commensurables, l'assertion résulte d'un découpage convenable.

Lorsque les bases sont incommensurables, Legendre utilise la méthode d'exhaustion (c'est-à-dire la double réduction à l'absurde (cf. ci-dessus note 32))



On veut montrer que l'aire *ABCD* est à l'aire *AEFD* comme *AB* est à *AE*, on considère le point *O* défini par la proportion

aire *ABCD* : aire *AEFD* :: *AB* : *AO* l'existence du point O étant assurée par les propriétés arithmétiques des proportions numériques (en particulier le recours à l'arithmétique assure l'existence de la quatrième proportionnelle, dans la mesure où l'on admet que l'unité de longueur étant donnée, à tout nombre correspond une longueur).

On va montrer que O et E coïncident en prouvant que chacune des inégalités $AO > AE$ et $AO < AE$ conduit à une contradiction.

Supposons $AO > AE$, auquel cas le point O est entre E et B ; divisons AB en parties égales à une longueur inférieure à celle de EO, il existe alors un point de division I situé entre E et O, auquel cas, considérant le rectangle $AIKD$, on peut écrire

$$\text{aire } ABCD : \text{aire } AIKD :: AB : AI$$

et par conséquent,

$$\text{aire } AIKD : \text{aire } AEFD :: AI : AO$$

mais $AEFD$ est plus petit que $AIKD$ et AO est plus grand que AI, ce qui est contradictoire.

De même, on montre que l'hypothèse $AO < AE$ est contradictoire, ce qui prouve l'égalité $AO = AE$, donc les points O et E coïncident.

Les ingrédients de la démonstration du théorème de Thalès par la méthode des aires sont ainsi en place, mais le théorème apparaît seulement à la proposition 15 ; avant d'utiliser la méthode des aires, Legendre explique comment on peut dire que l'aire d'un rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur, en reliant cette formule au choix des unités. En fait, Legendre énonce la propriété suivante (proposition 4):

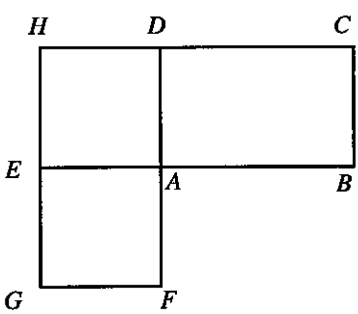
Deux rectangles quelconques $ABCD$, $AEGF$ sont entre eux comme les produits des bases multipliés par les hauteurs, de sorte qu'on a

$$\text{aire } ABCD : \text{aire } AEGF :: AB \times AD : AE \times AF$$

En effet, disposant les deux rectangles comme ci-dessous, on a les proportions

$$\text{aire } ABCD : \text{aire } AEHD :: AB : AE$$
$$\text{aire } AEHD : \text{aire } AEGF :: AD : AF$$

on obtient la proportion cherchée par multiplication.



Legendre remarque alors que *"l'on peut prendre pour mesure d'un rectangle le produit de sa base par sa hauteur, pourvu qu'on entende par ce produit celui de deux nombres qui sont le nombre d'unités linéaires contenues dans la* *base, et le nombre d'unités linéaires contenues dans la hauteur"*[71].

Legendre explique que cette mesure n'est pas absolue, mais qu'elle le devient si on prend comme unité de surface le carré dont le côté est l'unité de longueur.

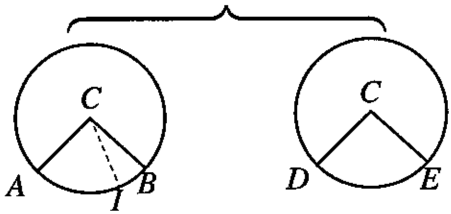
Cela étant dit, la méthode des aires devient une méthode de calcul et c'est ainsi qu'il l'utilise dans la suite, transformant en calcul le raisonnement euclidien, mêlant calcul numérique et calcul spécieux.

Legendre démontre ainsi plusieurs résultats des livres I et II des *Eléments* d'Euclide, dont le théorème de Pythagore (sa démonstration est celle d'Euclide), le théorème de Thalès est énoncé seulement à la proposition 15, l'énoncé et la démonstration sont ceux d'Euclide.

La suite du livre III est consacrée à l'étude des figures semblables. Il en déduit les classiques relations métriques dans un triangle. Ces relations portent, une fois l'unité choisie, sur les mesures de longueurs; les démonstrations se ramènent ainsi à un simple calcul (en cela Legendre se détache de la tradition euclidienne).

Notons que Legendre utilise la même méthode pour montrer la proportionnalité des angles au centre et des arcs[72]. Il montre d'abord, en utilisant le principe de superposition, la proposition suivante (Livre II, proposition 15):

"Dans le même cercle ou dans deux cercles égaux, les angles égaux **ACB, DCE** *dont les sommets sont au centre, interceptent sur la circonférence des arcs égaux* **AB, DE.**



Réciproquement, si les arcs **AB, DE** *sont égaux, les angles* **ACB, DCE** *seront aussi égaux."*

Legendre montre alors l'égalité des rapports des angles aux centres et des rapports des arcs qu'ils sous-tendent dans le cas commensurables (proposition 16), puis, utilisant une méthode analogue à celle qu'il utilisera pour la démonstration de la proposition 3 du Livre III (cf. ci-dessus), il montre l'égalité des rapports dans le cas incommensurable (proposition 17). Nous laissons au lecteur le plaisir d'écrire une telle démonstration, sachant que Legendre admet, comme Euclide, l'existence de la quatrième proportionnelle. Ici la démonstration est indépendante de tout recours au numérique.

71 ibid. p. 66

72 ibid., p. 43 et sqq

Lacroix entre l'empirisme et Port-Royal

On dit souvent que, jusqu'à la réforme dite des *mathématiques modernes*, l'enseignement de la géométrie en France a suivi l'ouvrage de Legendre, c'est en partie vrai[73], mais c'est oublier l'influence de Lacroix et à travers lui de Port-Royal. Lacroix s'appuie à la fois sur les logiciens de Port-Royal et sur l'empirisme des Lumières, en particulier le sensualisme de Condillac, comme il l'explique dans un long discours préliminaire publié dans certaines éditions de ses *Elémens de Géométrie*[74].

1. *Les "Elémens de Géométrie" de Lacroix*

Les Elémens de Géométrie de Lacroix constituent le troisième volume d'un cours élémentaire de mathématiques pures à l'usage des élèves de l'Ecole Centrale des Quatre-Nations[75], cours qui comprend un *Traité élémentaire d'Arithmétique*, des *Elémens d'Algèbre*, les *Elémens de Géométrie*, un *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique*, ainsi que des *Compléments des Elémens d'Algèbre*.

Dans le discours préliminaire qui introduit les *Elémens de Géométrie*, Lacroix exprime les principes généraux qui ont guidé l'ouvrage et qui reposent sur *le vrai ordre de la nature* et la correspondance entre cet ordre et l'ordre de la connaissance, *l'ordre des abstractions* pour utiliser le langage de Condillac. En fait, même si les logiciens de Port-Royal refusent l'empirisme[76], un empiriste comme Condillac partage avec eux le principe d'un ordre de la nature et le principe d'une correspondance entre l'ordre de la connaissance et l'ordre naturel. Ainsi Condillac écrit dans son *Essai sur l'origine des connaissances humaines*:

> *"La nature indique elle-même l'ordre qu'on doit tenir dans l'exposition de la vérité."*[77]

C'est ce souci du *"vrai ordre de la nature"* qui conduit Lacroix à reprendre, en ce qui concerne les propriétés des lignes proportionnelles, l'exposé d'Arnauld qui démontre ces propriétés en s'appuyant sur les lignes, évitant le détour euclidien par les aires, mais ce souci du vrai ordre de la

73 En particulier, la division en Livres du cours de géométrie est restée celle de l'ouvrage de Legendre jusqu'au milieu de notre siècle.

74 Lacroix [La3], discours préliminaire (publié dans la quatrième édition) ; pour une étude de l'influence de Port-Royal et des empiristes sur l'enseignement de la géométrie, nous renvoyons aux deux articles de Bkouche [Bk2] et [Bk3].

75 sur l'Ecole Centrale des Quatre Nations, cf. Taton [TaT], p...

76 Arnauld, Nicole [AN], p. 69-72

77 Condillac [Cn], p. 288

nature n'exclut pas la rigueur, et la rigueur est celle d'Euclide, comme l'explique Lacroix dans son discours préliminaire, se proposant de montrer *"qu'on peut accorder l'ordre et la rigueur"*[78], l'ordre de la nature et non l'ordre artificiel de la construction euclidienne, et la rigueur euclidienne trop oubliée dans les ouvrages du XVIII^e siècle.

Nous noterons cependant l'usage de la méthode d'exhaustion dans la démonstration du théorème des lignes proportionnelles, même si Lacroix utilise la méthode des limites pour d'autres questions, méthode qui nous semble plus proche du point de vue d'Arnauld; mais c'est que la relation entre le géométrique et le numérique se heurte encore à la question de la définition des nombres, question qui ne sera résolue que par la construction des réels dans la seconde partie du siècle. Lacroix hésite dans son exposé entre une méthode d'exhaustion qui reste la méthode rigoureuse, même si elle apparaît comme un détour peu naturel, et une méthode des limites plus naturelle mais encore floue. Nous verrons ci-dessous comment Lacroix, à propos des incommensurables qu'il ne sait pas définir rigoureusement, évite la question dans ses *Elémens d'Algèbre* et, pour rendre rigoureux son discours géométrique, admet implicitement, comme le fait Legendre, l'existence d'une quatrième proportionnelle; par contre, pour éviter les difficultés du calcul sur les grandeurs, il exprime, via la mesure, les relations métriques comme des relations numériques. Nous verrons plus loin quelle fut son influence sur les traités de géométrie élémentaire des XIX^e et XX^e siècle.

2. *Les proportions*

Les *Elémens de Géométrie* s'appuient sur la connaissance préalable de l'arithmétique dont relève la théorie des proportions; notons que le *Traité d'Arithmétique* ne traite que des rapports entiers ou fractionnaires[79], de même le supplément d'arithmétique placé au début des *Elémens de Géométrie*, qui traite du calcul des proportions. Les nombres irrationnels apparaissent dans les *Elémens d'Algèbre* avec le calcul des racines carrées; Lacroix y montre que la racine carrée d'un entier n'est en général pas un entier mais ajoute:

> *"Cependant on sent qu'il doit exister une quantité qui, multipliée par elle-même, produise un nombre quelconque..."*[80]

---

78 Lacroix [La3], discours préliminaire, p. xxii; Lacroix se réfère à l'exemple donné par Bertrand qui a plublié en 1778 un ouvrage intitulé. *Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques,* ouvrage souvent cité à l'époque.

79 Lacroix [La 1], n° 108-120

80 Lacroix [La 2], n° 99

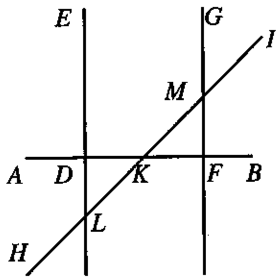
ce qui le conduit à distinguer deux sortes de nombres, les nombres rationnels qui sont commensurables avec l'unité et les nombres irrationnels qui sont incommensurables, avant d'exposer la méthode arithmétique de calcul approché des racines carrées.

En ce qui concerne la géométrie, il explique dans les premières pages de son ouvrage comment trouver la commune mesure de deux droites, méthode analogue à la recherche du p.g.c.d. de deux nombres, distinguant deux cas suivant que l'opération s'arrête ou non[81].

3. *Les lignes proportionnelles*

Nous ferons d'abord quelques remarques sur la théorie des parallèles ; celles-ci étant définies comme des droites d'un même plan qui ne se rencontrent pas, Lacroix admet l'axiome qui dit que *"une droite perpendiculaire à une autre, est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre"*[82]; rappelons qu'un axiome est, pour Lacroix comme pour Legendre, *"une propriété évidente par elle-même"*.

Il peut alors montrer l'égalité des angles correspondants et alternes-internes en utilisant les cas d'égalité des triangles rectangles[83]:



Soit la droite *HI* coupant les parallèles *DE* et *FG* en deux points *L* et *M* et soit *K* le milieu de *LM*, on mène de *K* la perpendiculaire aux deux parallèles données, alors les triangles rectangles *DLK* et *FMK* sont égaux, ce qui implique les égalités cherchées.

Lacroix peut alors énoncer et démontrer le théorème :

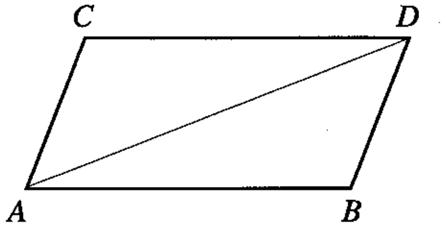
> *"Les parties AC et BD de deux droites parallèles interceptées entre deux droites parallèles, sont égales entre elles, et réciproquement."*[84]

81 Lacroix [La 3], n° 3-4

82 ibid. n° 39

83 ibid. n° 47-47

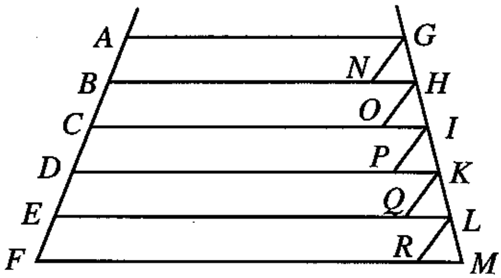
84 ibid. n° 55



Il suffit de remarquer que les triangles *ABD* et *ACD* sont égaux. On en déduit que deux parallèles *"sont partout également éloignées l'une de l'autre"*[85].

Lacroix peut alors énoncer et démontrer le théorème:

> *"Si deux droites quelconques AF et GM sont coupées par un nombre quelconque de parallèles, AG, BH, CI, etc. menées par des points pris à des distances égales sur la première, les parties GH, HI, IK, etc. de la seconde, seront aussi égales entre elles."*[86]



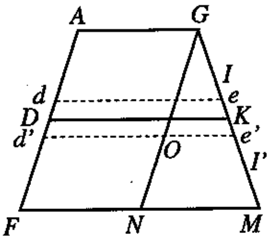
Il suffit de remarquer, d'abord que les droites *GN, HO, IP*, etc. sont égales, puis que les triangles *GNH, HOI, IPK*, etc. sont égaux.

On montre alors le théorème :

> *"Trois parallèles AG, DK, FM, coupent deux droites quelconques AF et GM en parties proportionnelles."*[87]

85 ibid. n° 55
86 ibid. n° 56
87 ibid. n° 58

Si AD (Cf. figure ci-contre) est commensurable avec AF, c'est une conséquence du théorème précédent. Lorsque AD et AF sont incommensurables, Lacroix utilise la méthode d'exhaustion, admettant implicitement, comme nous l'avons déjà dit, l'existence d'une quatrième proportionnelle.



Soit I le point de la droite GM tel que

$$AF : AD :: GM : GI$$

on va montrer que les points I et K coïncident.

Supposons $GI < GK$, et divisons AF en parties égales suffisamment petites de sorte qu'il existe un point de division d tel que la parallèle menée par d à AG rencontre GM en un point e situé entre I et K, alors

$$AF : Ad :: GM : Ge$$

et par conséquent

$$Ad : AD :: Ge : GI$$

or $Ad < AD$ et $Ge > GI$, ce qui est contradictoire.

De même si on suppose $GI > GK$, on obtient une contradiction, par conséquent $GI = GK$, autrement dit I et K coïncident.

Notons que ce même raisonnement d'exhaustion est employé dans la suite de l'ouvrage pour montrer la proportionnalité entre angles et arcs[88], c'est aussi, nous l'avons vu, la méthode qu'emploie Legendre dans ses *Elémens de Géométrie.*

Une fois démontré le théorème des lignes proportionnelles, Lacroix étudie la similitude et en déduit les relations métriques usuelles dans les triangles ; comme chez Legendre, ces relations portent sur les mesures des grandeurs considérées. C'est ainsi que Lacroix énonce le théorème de Pythagore :

> *".. les trois côtés d'un triangle rectangle étant rapportés à une mesure commune, la seconde puissance du nombre qui exprime la longueur de l'hypoténuse, est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés."*[89]

En fait il montre d'abord le théorème :

> *"Si de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, qu'on appelle hypoténuse,*
> *1°. cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui*

88 ibid. n° 109

89 ibid. n° 75

seront semblables, et qui le seront par conséquent entre eux.
2°. elle divisera l'hypoténuse en deux parties ou segments, tels que chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent et l'hypoténuse entière.
3°. La perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse."[90]

Dans l'énoncé et dans la démonstration de ce théorème, Lacroix travaille sur les lignes, mais pour effectuer les calculs qui conduisent au théorème de Pythagore, il utilise les mesures, se ramenant à un calcul purement numérique ; en cela il se distingue de Legendre qui, comme on l'a déjà remarqué, mêle calcul numérique et calcul spécieux.

Enfin notons que l'ouvrage de Lacroix marque l'abandon dans les traités d'enseignement de la méthode des aires.

La théorie des proportions à la lumière des nombres réels

1. *Sur quelques ouvrages de géométrie élémentaire*

Tout au long du XIXe siècle et dans la première partie du XXe siècle[91] on retrouve plusieurs points communs dans la démonstration du théorème des lignes proportionnelles (qui deviendra le théorème de Thalès), lesquels se rattachent essentiellement au point de vue de Lacroix[92].

D'un point de vue géométrique, on abandonne définitivement la méthode des aires et on utilise essentiellement la démonstration de Lacroix, que l'on énonce le théorème pour un triangle ou pour la figure formée par deux droites coupées par des parallèles. Nous n'insisterons pas sur ce point.

En ce qui concerne les rapports de grandeurs, les auteurs s'appuient sur une arithmétique préalable, soit qu'ils renvoient à d'autres ouvrages, soit qu'ils explicitent cette arithmétique préalable dans leur ouvrage.

Les rapports de grandeurs sont définis via la mesure des grandeurs dont on admet qu'elle est possible (rejoignant ainsi le point de vue de Legendre (cf. ci-dessus)).

Voici par exemple la définition donnée en 1883 par Amiot dans ses *Eléments de Géométrie* (rédigés d'après les programmes de l'enseignement scientifique des lycées) :

---

90 ibid. n°74

91 nous ne parlerons pas dans cet article des ouvrages de la réforme de 1970 et des contre-réformes qui ont suivi.

92 on peut noter ici une continuité depuis le point de vue développé par Arnauld et les Philosophes de Port Royal.

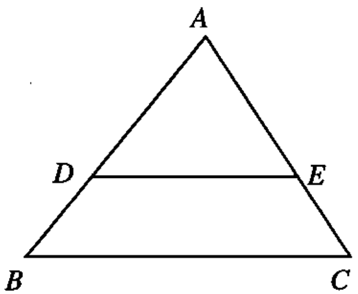
> *"Le rapport de deux grandeurs de même espèce est le nombre qui exprimerait la mesure de la première si on prenait la seconde pour unité."*[93]

Amiot distingue alors entre rapports de grandeurs commensurables et rapport de grandeurs incommensurables ; dans le premier cas, le rapport est un nombre entier ou fractionnaire, dans le second cas, *"il est impossible de mesurer la première en prenant la seconde comme unité"*.[94]

Amiot remarque alors que deux grandeurs *A* et *B* incommensurables étant données, on peut trouver une grandeur *A'* commensurable à *B* *"qui diffère de A aussi peu que l'on veut"*, et il précise : *"dans les applications numériques, on remplace* A *par A', et lorsqu'on parle du rapport de A à B, il faut entendre celui de A' à B*[95].

L'égalité des rapports se ramène ainsi, sans que Amiot l'explicite plus, à l'égalité des rapports commensurables.

Dans un ouvrage antérieur, le *Cours de Géométrie élémentaire* (à l'usage des Lycées et Collèges et de tous les établissements d'instruction public) publié en 1859, Guilmin , après avoir énoncé le théorème :



"Toute ligne parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles"[96]

et démontré celui-ci dans le cas ou *AB* et *AD* sont commensurables, expliquait :

"Ce raisonnement démontre le théorème pour tous les cas où il y a une commune mesure, si petite qu'elle soit, entre les segments AD, DB du même côté de AB, ce théorème est donc vrai en général."[97]

On rencontre de telles explications encore au XX^{e} siècle. Ainsi dans les *Eléments de Géométrie* de Vacquant et Macé de Lépinay (à l'usage des classes de sciences des lycées), les auteurs écrivent, après avoir donné une

---

93 Amiot [Am], p. 55

94 Ainsi, la question se pose encore de savoir si un rapport incommensurable peut être représenté par un nombre.

95 Amiot [Am], p. 56

96 Guilmin [Gu], p. 77

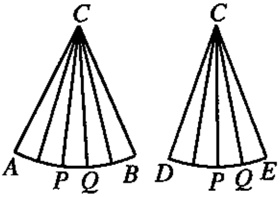
97 Guilmin [Gu], p. 78

démonstration de l'égalité des rapports des arcs et des angles qui les sous-tendent en utilisant des approximations rationnelles des rapports incommensurables,

> *"Pour le commençant, il convient de terminer comme il suit la démonstration (donnée dans le cas commensurable) : le théorème étant vrai quelque soit la commune mesure entre les arcs, il est encore vrai quand les arcs sont incommensurables."*[98]

La démonstration donnée par Vacquant et Macé de Lépinay met l'accent sur les problèmes de l'incommensurabilité d'une façon qui, si elle reste insuffisante du point de vue canonique (les nombres réels ne sont pas définis), met en valeur les points essentiels du problème; nous indiquons ici les grandes lignes de la démonstration[99].

> *"Si, des sommets de deux angles comme centre, on décrit deux arcs de cercle d'un même rayon, le rapport des angles est égal au rapport des arcs compris entre les côtés de chacun des deux angles."*



Les auteurs démontrent d'abord le théorème dans le cas ou les arcs *AB* et *DE* ont une commune mesure; c'est alors un simple exercice de comptage.

Dans le cas où les arcs *AB* et *DE* sont incommensurables, on partage *DE* en un certain nombre de parties égales, soit n ; supposons que *AB* soit supérieur à m de ces parties mais inférieur à m+1 d'entr'elles, les auteurs raisonnent de la façon suivante :

> *"Les nombres m/n et $(m + 1)/n$ sont les valeurs approchées par défaut et par excès, à moins de $1/n$, du rapport des arcs* AB *et* DE. *Or si nous menons les rayons par les points de division des arcs* AB *et* DE, *l'angle* DCE *se trouve partagé en n parties égales, et l'angle* AOB *est supérieur à m de ces parties et inférieur à m + 1. Les nombres m/n* et *$(m + 1)/n$ sont donc aussi les valeurs approchées, par défaut et par excès, à moins de $1/n$, du rapport des angles* AOB *et* DCE. *Les valeurs approchées à moins de $1/n$ des deux rapports étant égales, quelque soit n, les rapports sont égaux."*

L'argument renvoie à une propriété énoncée au début de l'ouvrage à propos de la mesure des grandeurs.

98 Vacquant et Macé de Lépinay [VM], p. 81, note 1.

99 ibid. p. 80-81 ; en ce qui concerne le théorème de Thalès (ainsi appelé dans l'ouvrage), les auteurs renvoient à cette démonstration, cf. p. 134.

Vacquant et Macé de Lépinay y appelle *"**rapport** de deux grandeurs de même espèce, rangées dans un certain ordre, le nombre qui est la **mesure** de la première quand on prend la seconde pour unité"*[100].

La mesure est définie soit par un nombre entier ou fractionnaire lorsque les grandeurs sont commensurables, soit comme limite de valeurs approchées lorsqu'on compare la première grandeur à une grandeur commensurable à la seconde (la valeur approchée par défaut à moins de $1/n$ près du rapport de A à B est le nombre m/n tel que A contienne m fois la n-ième partie de B mais soit contenu dans $m + 1$ fois cette partie). Cette limite (dont l'existence est admise) est appelée un *"nombre incommensurable"*.

Vacquant et Macé de Lépinay expliquent alors que, quatre grandeurs de même espèce étant données, le rapport de A à B et le rapport de C à D sont égaux si ces rapports ont même valeur approchée à moins de $1/n$ près pour toute valeur de n. On peut y voir une forme plus élaborée de la définition d'Arnauld.

On trouve ici la trace de la construction des réels élaborée dans la seconde partie du XIX^e siècle et la mise en place d'une théorie de la mesure s'appuyant sur cette construction, même si les auteurs, s'adressant à des élèves de lycées s'en tiennent à un niveau intuitif. En fait, il s'agit moins de donner une construction rigoureuse que d'indiquer les grandes lignes de ce que serait cette construction en précisant la notion d'approximation, celle-ci restant liée à l'opération même de mesure, et l'existence du nombre défini par l'opération de mesure étant admise[101].

On voit ici, par rapport aux ouvrages du siècle précédent, un effort de rigueur dans la définition des rapports incommensurables ; en particulier, la mesure n'est plus un simple donné auquel on renvoie comme le fait Legendre, elle est au coeur de la construction et l'arithmétique préalable s'inscrit dans le géométrique[102]. On peut comprendre alors que les auteurs demandent, dans une première lecture, de passer outre et d'admettre le pseudo-raisonnement qu'ils proposent au commençant.

2- *Constructions des nombres réels et mesure des grandeurs*

Nous avons déjà cité dans le paragraphe précédent des ouvrages s'appuyant, implicitement ou explicitement, sur la notion des nombres réels

100 ibid. p.5-7

101 On trouve une démonstration analogue (toujours à propos de la mesure des arcs et des angles dans le Cours de Géométrie de Neveu et Bellanger à l'usage des écoles primaires supérieures [NB] (1ère année, p. 152-156). La démonstration du théorème de Thalès (2ème année, p. 17) renvoie à cette démonstration.

102 Il faut toutefois noter que les nombres ont ici une existence propre indépendante de la géométrie

telle qu'elle s'est élaborée dans la seconde moitié du XIX^e siècle. C'est l'aspect géométrique (ou plus généralement l'aspect mesure des grandeurs) qui est mis en valeur. Mais la notion de grandeur n'est pas absente de la construction des réels même si cette construction se réduit à des considérations purement arithmétiques (ce que l'on a appelé *l'arithmétisation de l'analyse*), l'arithmétique jouant ici le rôle d'un principe unificateur des mathématiques avant que ce rôle ne soit dévolu à la théorie des ensembles.

Le lien entre arithmétique et géométrie est souligné par Dedekind dans son cours d'analyse lorsqu'il développe la construction des nombres réels par les coupures[103].

Même si la problématique de Dedekind relève de l'analyse (comment fonder le calcul différentiel[104]), c'est la géométrie qui va guider la construction (la *création* dit Dedekind) des nombres réels ; c'est pour établir une correspondance biunivoque entre les nombres et les points de la droite et assurer ainsi la continuité des nombres que Dedekind fabrique les nombres réels ; en retour, la construction *arithmétique* des nombres réels, indépendamment de tout recours à la géométrie, permet de préciser ce qu'on entend par continuité de la droite[105]. En ce sens, c'est la construction du continu arithmétique qui permet de redéfinir le continu géométrique.

Ce n'est pas ici le lieu de raconter l'histoire des nombres réels, celle-ci ne nous intéresse que par ses relations avec la mesure des grandeurs. Une construction purement arithmétique du numérique permet une nouvelle définition de la mesure des grandeurs, définition qui, nous le verrons, est plus proche de la pratique de la mesure (associer un nombre à une grandeur) que la construction d'Eudoxe, tout en apportant du point de vue de la rigueur le fondement qui manquait aux méthodes d'approximations développées aux XVII^e et XVIII^e siècles[106].

C'est une telle construction de la mesure des grandeurs que développe Jules Tannery dans ses *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, ouvrage

103 Ce cours eut lieu en 1862-1863, mais ne sera publié qu'en 1872. Il constitue la première partie de l'édition anglaise : *Essay on the theory of numbers* [Ded]. Pour une étude de cet ouvrage, nous renvoyons à l'ouvrage de P. Dugac [Dug].

104 Dedekind [Ded], p. 1.

105 Comme l'explique Dedekind, la continuité de la droite *«n'est autre qu'un axiome»* (ibid, p.12) l'existence d'un espace n'impliquant pas qu'il soit continu. Une fois les nombres réels construits, c'est un axiome géométrique qui précisera la correspondance biunivoque entre les nombres réels et les points de la droite, ce que l'on a appelé *l'axiome de Cantor-Dedekind* (voir par exemple : Valiron [Va], p. 3 et l'article de Enriques dans l'*Encyclopédie des Siences Mathématiques* [Enr], p. 34-36).

106 Bourbaki [Bou], p. 184-185.

qui s'inscrit dans une collection à l'usage de la classe de Mathématiques[107], collection qui comprend entre autres les *Leçons de Géométrie* de Hadamard.

Les trois derniers chapitres qui *"s'adressent aux lecteurs qui veulent pousser plus loin leurs études scientifiques"*[108] exposent la construction des nombres réels (chapitre XII), la théorie de la mesure des grandeurs (Chapitre XIII) et une introduction à la théorie des nombres (chapitre XIV).

Après avoir construit les nombres réels par la méthode des coupures de Dedekind, Tannery définit la mesure des grandeurs comme correspondance entre grandeurs et nombres.

Les nombres ayant été construits de façon autonome (c'est-à-dire indépendamment de toutes considérations de grandeurs), Tannery se propose de mettre en forme la définition classique

> *"On appelle grandeur ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution."*[109]

Tannery élimine d'abord de son étude les grandeurs discrètes (dont la mesure ne relève que du comptage) et s'intéresse aux grandeurs satisfaisant la propriété suivante :

> *"Si l'on compare deux états A, A' quelconques, mais distincts, il y a au moins un état intermédiaire A"*[110].

autrement dit, si $A < A'$, il existe A'' tel que $A < A'' < A'$; Tannery remarque alors qu'il y a une infinité d'états intermédiaires.

Il peut alors établir la correspondance suivante :

> *"Etant donné deux états* A, A' *de la grandeur* (G) *et supposons qu'on ait* A < A' (...) *imaginons qu'on fasse correspondre aux états* A et A' *deux nombres entiers,* 10 *et* 20 *par exemple, en ayant soin de faire correspondre le plus petit entier* 10 *à la plus petite des grandeurs* A, A'.
>
> *Aux différents nombres entre* 10 *et* 20, *nous allons faire correspondre des états intermédiaires à* A *et* A' *en observant la condition suivante que j'appellerai la condition fondamentale, si aux nombres distincts* b, c, *on fait correspondre les états distincts* B, C, *on aura* B < C *ou* B > C *suivant que* b < c *ou* b > c. *A des nombres égaux, on fera correspondre les mêmes états de grandeur.*

---

107 Il s'agit de la classe terminale plus tard appelée classe de *mathématiques élémentaires*, devenue après la réforme Fouchet de 1965, la TC (Terminale C).

108 Tannery [TanJ], préface de la première édition (1894), p.vi de l'édition citée. On peut voir, à la lecture de ces ouvrages, que ceux-ci ne se réduisent pas à de simples manuels.

109 Tannery [TanJ], p. 470.

110 ibid., p. 471

Aux nombres entiers compris entre 10 *et* 20 *faisons correspondre, d'après une loi déterminée mais d'ailleurs arbitraire, des états intermédiaires à* A *et* A', *en observant la graduation précédente.*

On a ainsi établi une certaine échelle des graduations entre A *et* A'."[111]

On peut alors affiner l'échelle en ajoutant des nombres fractionnaires entre 10 et 20, cet affinement pouvant être mené aussi loin qu'on le veut; on peut ainsi associer à tout nombre rationnel (ici compris entre 10 et 20) un état de la grandeur considérée (G).

Tannery remarque alors qu'un état B de la grandeur (G) est alors soit numéroté par un rationnel, soit n'est pas numéroté. Dans ce dernier cas, il est clair que B détermine une coupure donc un nombre irrationnel; à tout état B de la grandeur (G) intermédiaire à A et A', on associe ainsi un nombre réel compris entre 10 et 20. On peut dire que la grandeur (G) est *continue* si à tout nombre réel b compris entre 10 et 20 correspond un état B de la grandeur (G).

La construction se précise lorsque la grandeur (G) est additive, c'est-à-dire si l'on sait associer à deux états A et B de la grandeur (G) une grandeur $A + B$, l'opération d'addition satisfaisant aux propriétés suivantes[192]:

i) si A et A' sont égales, si B et B' sont égales, alors $A + B$ et $A' + B'$ sont égales.

ii) l'addition est commutative et associative.

iii) il existe une grandeur nulle, c'est-à-dire telle que l'addition de cette grandeur à une grandeur donnée ne change pas cette dernière.

iv) si C n'est pas la grandeur nulle, alors $A + C > A$.

v) si $A > B$, il existe une grandeur C telle que $A = B + C$.

vi) A et B étant données toutes deux non nulles, il existe un entier m tel que $mA > B$ (axiome d'Archimède).

vii) étant donné un entier m, pour toute grandeur B, il existe une grandeur A telle que $B = mA$, autrement dit on peut diviser une grandeur en m parties égales.

Ce sont les propriétés nécessaires pour construire une correspondance additive entre états d'une grandeur et nombres. Tannery montre ensuite

111 ibid, p. 471-472

112 ibid, p.447; noter que Tannery ne considère que des grandeurs positives ou, comme on dit aussi, des *grandeurs arithmétiques*. Les propriétés iv et v expriment alors le lien entre l'ordre et le calcul: "*$A > B$ si et seulement si il existe C tel que $A = B + C$*" (pour une étude historique de ce lien, cf. Sinaceur [Si]).

quelques propriétés qu'on pourrait énoncer ainsi :

$$m(A + B) = mA + mB$$
$$(m + n)A = mA + nA$$
$$(mn)A = m(nA)$$

m et n étant des entiers.

Tannery peut alors définir la mesure d'une grandeur, une unité A_1 étant choisie.

Un état de la grandeur A_1 ayant été choisi comme état unité, on peut définir une graduation de (G) associant à tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ la grandeur $A = \frac{p}{q} A_1$; $\frac{p}{q}$ est appelé la mesure de A lorsqu'on a choisi A_1 comme unité, c'est aussi par définition le rapport de A à A_1.

Un état B de la grandeur (G), s'il n'est pas une fraction de A_1 définit de façon évidente une coupure dans l'ensemble des nombres rationnels, donc un nombre réel (nécessairement positif dans le cas qui nous intéresse ici); ce nombre réel a est appelé la mesure de B lorsqu'on a choisi A_1 comme unité, c'est aussi le rapport de B à A_1.

Ainsi la classique définition du rapport de deux grandeurs comme le nombre qui mesure la première quand on a choisi la seconde comme unité prend tout son sens.

Tannery montre que la mesure ainsi définie est additive, cela est évident pour les nombres rationnels et résulte de la définition de l'addition des nombres réels dans le cas général.

L'étude des changements d'unité montre que le rapport de deux grandeurs est égal, une unité ayant été choisie, au rapport de leurs mesures. La démonstration, facile, est laissée au plaisir du lecteur.

Enfin une grandeur est *continue* si, une unité ayant été choisie, tout réel (ici il s'agit de réels positifs) est la mesure d'un état; cette propriété est évidemment indépendante de l'unité choisie[113].

113 cf. note 105 ci-dessus. On peut rapprocher cette définition des grandeurs continues du dernier groupe d'axiomes de la construction hilbertienne, lequel exprime la propriété de *continuité* de la géométrie (Hilbert [Hi], p. 40-45) ; ce groupe contient deux axiomes, l'axiome de la mesure ou d'Archimède et l'axiome d'intégrité, ce dernier axiome assure l'existence d'une correspondance biunivoque conservant l'ordre entre l'ensemble des points d'une droite et l'ensemble des nombres réels (Hilbert [Hi], p. 88-89) ; en un certain sens, cet axiome définit une construction géométrique des nombres réels. Notons que l'axiome d'intégrité est lié à la propriété que IR est *le plus grand* corps ordonné archimédien (Hilbert [Hi], p. 40-45).

3- *Les grandeurs proportionnelles.*[114]

La proportionnalité concerne les grandeurs additives. Nous en rappelons la définition

> *Etant données deux espèces de grandeurs additives* (G) *et* (G'), *une correspondance entre* (G) *et* (G') *est dite proportionnelle si, étant donnés deux états* A *et* B *de la première grandeur et les états correspondants* A' *et* B' *de la deuxième grandeur, les rapports* A/B *et* A'/B' *sont égaux.*

Tannery établit alors la propriété que l'on peut énoncer de la façon suivante :

> *Considérons une correspondance entre deux espèces de grandeurs* (G) *et* (G') *telle que :*
> *i) à deux grandeurs égales de l'espèce* (G) *correspondent deux grandeurs égales de l'espèce* (G')
> *ii) la correspondance est additive, c'est-à-dire qu'à la somme de deux grandeurs de l'espèce* (G) *correspond la somme des grandeurs correspondantes de l'espèce* (G')
> *alors la correspondance considérée est proportionnelle.*[115]

Tannery montre d'abord qu'à la grandeur nulle de (G) correspond la grandeur nulle de (G') ; en effet la grandeur nulle est la seule qui, ajoutée à une autre grandeur, donne la même grandeur.

En outre, la définition de la soustraction implique que la correspondance conserve l'ordre[116].

En effet, soit A et B deux états de la grandeur (G) tels que A soit inférieur à B, on notera A' et B' les états de (G') correspondant à A et B ; puisque $A < B$, il existe un état C tel que $B = A + C$. Notons C' l'état correpondant à C, alors $B' = A' + C'$, ce qui prouve $A' < B'$.

Considérons alors deux grandeurs A et B d'espèce (G) et les grandeurs correspondantes A' et B' d'espèce (G'),

i) si B/A est un nombre rationnel, l'additivité implique l'égalité des rapports A/B et A'/B'.

ii) si B/A est un nombre irrationnel, la conservation de l'ordre implique que

---

114 ibid, p.483 et sqq

115 On peut rapprocher la proposition de Tannery du classique du théorème : *Soit f une application monotone et additive de IR dans IR, alors, f est une application linéaire.* ce dernier énoncé fait apparaître le lien entre proportionnalité et linéarité.

116 Rappelons que l'on ne considère que des grandeurs positives.

B/A et *B'/A'* déterminent la même coupure, par conséquent $B/A = B'/A'$. ce qui achève la démonstration.[117].

Le critère de proportionnalité énoncé par Tannery permet d'obtenir les théorèmes de proportionnalité de la géométrie élémentaire : proportionnalité des angles et des arcs, théorème des lignes proportionnelles (théorème de Thalès), calculs d'aires. C'est ainsi que dans ses *Leçons de Géométrie*, Hadamard renvoie au critère de Tannery[118] même si, pour des raisons de cohérence interne de l'ouvrage, il indique le principe de la démonstration, remarquant qu'il ne fait que reproduire la démarche de Tannery[119].

4- *La mesure des grandeurs et la proportionnalité dans quelques traités de géométrie*

La méthode de Tannery s'appuie sur une construction explicite des nombres réels, ici la méthode des coupures de Dedekind. D'autres auteurs vont travailler directement sur les grandeurs, les nombres irrationnels étant introduits pour mesurer les grandeurs n'ayant pas de commune mesure avec l'unité.

Nous citerons ainsi le classique *Traité de Géométrie* de Rouché et Comberousse[120].

La notion de nombre entier étant considérée comme connue, le propos de Rouché et Comberousse est de définir la mesure des grandeurs. Les auteurs précisent d'abord ce qu'il faut entendre par grandeur en écrivant :

> *"On ne considère, en mathématiques, que des grandeurs dont on peut définir d'une manière précise l'égalité et l'addition".*

On peut alors définir multiples et parties aliquotes d'une grandeur. Deux grandeurs sont alors dites *commensurables* si elles sont des multiples d'une même grandeur, laquelle est appelée une *commune mesure*; si les grandeurs données n'ont pas de commune mesure, on dit qu'elles sont *incommensurables*.

Une unité étant choisie, mesurer une grandeur commensurable avec l'unité, c'est chercher combien cette grandeur renferme d'unités ou de parties aliquotes de l'unité. Les auteurs expliquent alors que, suivant que la

117 En fait, Tannery ne parle pas en terme de coupures, mais renvoie à la notion de graduation telle que définie auparavant.

118 Rappelons que les ouvrages de Hadamard et de Tannery font partie d'une même collection à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques (cf. note 107 ci-dessus).

119 Hadanard [Ha], p. 19-20, 198-199, 239

120 Rouché Comberousse [RC], Première Partie : Géométrie Plane, Note I, p. 411-419.

grandeur que l'on mesure est un multiple de l'unité ou un multiple d'une partie aliquote de l'unité, le nombre qui la mesure est un nombre entier ou fractionnaire (un rapport d'entier). La mesure des grandeurs commensurables avec l'unité renvoie ainsi à l'arithmétique.

Lorsque la grandeur que l'on mesure est incommensurable avec l'unité, Rouché et Comberousse introduisent la notion de valeur approchée.

Soient U la grandeur unité et A une grandeur incommensurable avec l'unité, un nombre entier ou fractionnaire n étant donné, *la valeur approchée par défaut à moins de* $1/n$ est égale à m/n où m est le nombre entier qui mesure le plus grand multiple de U/n contenu dans A ; autrement dit, A contient m fois U/n avec un reste moindre que U/n. Le nombre $(m + 1)/n$ est appelé *la valeur approchée par excès à moins* de $1/n$.

Notant pour tout nombre n ,a_n la valeur approchée par défaut à moins de $1/n$, a'_n la valeur approchée par excès à moins de $1/n$, Rouché et Comberousse définissent alors la mesure de A comme *la limite vers laquelle tendent les valeurs approchées par défaut à moins de* $1/n$ *lorsque n croît indéfiniment.*

Le problème se pose alors de justifier cette définition en montrant l'existence et l'unicité de la limite (rappelons que les seuls nombres définis sont les entiers et les nombres fractionnaires).

Les auteurs remarquent d'abord que a_n n'augmente pas toujours avec n[121], de même a'_n ne diminue pas toujours lorsque n augmente; pour définir la limite, ils définissent alors *les valeurs principales* par défaut et par excès à moins de $1/n$ d'une grandeur A, respectivement notée a_n et a'_n.

La valeur principale par défaut à moins de $1/n$ est la plus grande des valeurs approchées par défaut à moins de 1/n pour n non supérieure à n. De même la valeur principale par excès à moins de 1/n est la plus petite des valeurs approchées par excès à moins de 1/n pour n non inférieure à n.

Il est alors clair que a_n augmente (ou du moins ne diminue pas) et a'_n diminue (ou du moins n'augmente pas) lorsque n augmente; comme les a_n sont majorés par les a'_n et comme $a'_n - a_n$ est moindre que la fraction $1/n$, laquelle tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, on *"voit de suite"* que a_n et a'_n ont une limite commune qui n'est autre que la mesure cherchée.

On voit ici les problèmes que posent un tel raisonnement; comment se justifie l'existence de la limite et quel est le statut de ce nombre limite ? La réponse est donnée par la définition des nombres incommensurables.

121 ainsi, si A est la diagonale du carré de côté égal à l'unité, on montre $a_n = 14/10$ et $a_{n+1} = 15/11$ (cf. Rouché Comberousse [RC], p. 413, note 1).

Voici la définition donnée par Rouché et Comberousse :

> *"Un nombre est dit* ***commensurable*** *ou* ***incommensurable*** *suivant que la grandeur dont il exprime la mesure est commensurable ou incommensurable avec l'unité adoptée. Les nombres commensurables sont les entiers et les fractions".*

Reste à définir les opérations sur les nombres incommensurables :

> *"Par définition, le résultat d'une opération sur les nombres incommensurables est la limite du résultat de la même opération sur leurs valeurs approchées à moins de 1/n, lorsque n croît indéfiniment".*

Il faut alors démontrer l'existence et l'unicité de la limite, ce que les auteurs font pour chacune des opérations arithmétiques[122].

Cela fait, on peut définir le rapport de deux grandeurs comme le nombre par lequel il faut multiplier la première pour avoir la seconde ; les auteurs démontrent alors que le rapport de deux grandeurs est égal au nombre qui mesure la première lorsque l'on prend la seconde comme unité.

Enfin, après avoir défini des grandeurs proportionnelles comme des grandeurs (qui peuvent être de nature différente) qui se correspondent de telle façon que le rapport de deux valeurs de la première soit égal au rapport des valeurs correspondantes de la seconde, Rouché et Comberousse démontrent le théorème

> *"Deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre si, à deux valeurs quelconques, mais égales, de la première grandeur répondent deux valeurs égales de la seconde, et si, de plus, à la somme de deux valeurs quelconques de la première répond une valeur qui soit la somme des deux valeurs correspondantes de la seconde".*

La démonstration utilise ici les propriétés des valeurs approchées.

Ce théorème est alors utilisé dans le cours de l'ouvrage pour démontrer les théorèmes usuels de proportionnalité (arcs et angles[123], lignes proportionnelles[124], calculs d'aires[125])

Il reste que malgré un souci de rigueur dans les démonstrations (en particulier les problèmes d'existence), il manque dans cet exposé une définition *numérique* de la notion de nombre en ce sens que les nombres ne sont définis

---

122 Rouché Comberousse [RC], p. 414-416

123 Rouché Comberousse [RC], p. 63

124 Rouché Comberousse [RC], p. 111

125 Rouché Comberousse [RC], p. 310

que comme mesure de grandeurs[126]. En outre, la notion de limite de grandeurs reste intuitive et c'est l'intuition d'icelle qui conduit à définir la limite de nombres, c'est ainsi que les auteurs admettent, sans précaution aucune, que la suite des valeurs principales par défaut, dans la mesure où elle est majorée, a une limite. On doit admettre alors, pour démontrer le théorème sur les grandeurs proportionnelles, que deux grandeurs de nature différente étant données, si, des unités convenables étant choisies, une grandeur de la première espèce et une grandeur de la seconde espèce ont les mêmes valeurs approchées, elles sont mesurées par le même nombre, ce qui est effectivement admis par les auteurs.

Le cours de *Géométrie Plane* de Niewenglowski et Gérard, publié en 1898, propose une présentation axiomatique de la mesure des grandeurs[127], qu'il relie à la théorie des nombres irrationnels pour laquelle les auteurs renvoient au *Cours d'Algèbre* de Niewenglowski[128].

Un système de grandeur de même espèce est un ensemble d'êtres pour lesquels on a défini l'*égalité* et l'*addition*. On entend par là, précisent les auteurs, que l'on a indiqué dans quel cas deux de ces êtres doivent être considérés comme *égaux*, et que l'on a indiqué un procédé au moyen duquel, étant donné deux quelconques de ces êtres, A et B, on peut en trouver un troisième C que l'on appellera *somme* de A et B et que l'on notera $A + B$[129]. L'addition permet de définir une notion d'ordre : on dit que la grandeur A est plus grande que la grandeur B s'il existe une grandeur C telle que $A = B + C$.

On suppose alors que l'égalité et l'addition satisfont aux axiomes suivants[130] (que l'on peut comparer aux axiomes de Tannery) :

i) L'égalité doit être réflexive, symétrique, transitive

ii) L'addition doit être univoque, commutative et associative

iii) Entre deux grandeurs quelconques, A et B, du système, il doit y avoir une des trois relations

126 Il s'agit ici moins d'une définition explicite que de l'hypothèse implicite assurant que, une unicité étant choisie, toute grandeur est mesurée par un nombre ; la définition de la mesure par les valeurs approchées et la notion de nombre incommensurable qui la représente ne font alors qu'exprimer la correspondance, dont l'existence est admise, entre grandeurs et nombres.

127 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 316-335

128 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 4-21

129 Ces précisions nous montrent que le point de vue métrologique n'est pas absent de la notion de mesure des grandeurs, c'est un tel point de vue qui guide la construction de Tannery (cf. ci-dessus). Cet aspect métrologique nous semble inséparable de la notion de mesure des grandeurs, nous y reviendrons dans la seconde partrie de cet article.

$$A = B, \qquad A > B, \qquad A < B$$

et chacune de ses relations doit être incompatible avec les deux autres.

Ces axiomes étant posés, on peut alors définir les multiples entiers d'une grandeur. La notion de sous-multiple (partie aliquote) est définie si l'on admet que *"étant donnés une grandeur quelconque* A *du système et un entier quelconque n, on peut trouver une autre grandeur* X *du système, telle que* nX = A"[131]. On montre aisément, tenant compte de l'axiome iii, l'unicité de X. On peut alors définir les multiples fractionnaires d'une grandeur.

Niewenglowski et Gérard énoncent alors l'axiome d'Archimède.

Pour achever la théorie de la mesure des grandeurs, il reste d'une part à expliciter la notion de limite, d'autre part à définir le produit d'une grandeur par un nombre irrationnel.

La notion de limite est définie pour les grandeurs : une suite illimitée de grandeurs, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ étant donnée, on dit que "l*a suite a pour limite la grandeur* L *lorsque n augmente indéfiniment, si, à toute grandeur* G, *on peut faire correspondre une grandeur* n, *tel que, pour n >* n, l*a différence entre* A_n et L *soit moindre que* G"[132].

On vérifie aisément l'unicité de la limite.

Niewenglowski et Gérard énoncent alors les deux axiomes qui relient les notions d'ordre et de limite :

Axiome 1- *Si la grandeur* A_n *croît avec n, mais reste toujours inférieure à une grandeur déterminée* B, *nous admettons qu'elle tend vers une certaine limite* L.

Axiome 2- *Si la grandeur* A_n *décroît quand n augmente, mais reste toujours supérieure à une grandeur déterminée* B, *nous admettons qu'elle tend vers une certaine limite* L.

Reste à définir le produit par un nombre irrationnel.

Les auteurs renvoient au *Cours d'Algèbre* de Niewenglowski déjà cité.

Un nombre irrationnel est défini par la donnée de deux suites illimitées de nombres rationnels

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$
$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$$

vérifiant les inégalités

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a'_n < \ldots < a'_2 < a'_1$$

130 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 316-317

131 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 318

132 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 321

et tels que la différence $a'_n - a_n$ tende vers 0 lorsque n augmente indéfiniment, c'est-à-dire, précisent les auteurs, qu'à tout nombre rationnel positif δ, on puisse faire correspondre un entier v tel que, pour $n > v$, on ait $a'_n - a_n < \delta$.

Niewenglowski et Gérard distingue et alors deux cas.

Il existe un nombre rationnel a supérieur à tous les a_n et inférieur à tous les a'_n, alors, une grandeur A étant donnée, la grandeur aA est supérieure à toutes les grandeurs a_nA et inférieure à toutes les grandeurs a'_nA et c'est la seule grandeur vérifiant cette propriété.

Il n'existe aucun nombre rationnel supérieur à tous les a_n et inférieur à tous les a'_n, dans ce cas *"on convient de dire que les deux suites définissent un nombre irrationnel a"*[133]; il existe alors une grandeur et une seule supérieure à toutes les grandeurs a_nA et inférieure à toutes les grandeurs a'_nA (cela résulte des axiomes sur les limites), c'est cette grandeur notée αA que Niewenglowski et Gérard appellent le produit de la grandeur A par le nombre irrationnel α.

On montre aisément (la démonstration est laissée au lecteur) les propriétés suivantes :

Soient A une grandeur, α et β deux nombres (rationnels ou irrationnels), alors

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

Soient A et B deux grandeurs, α un nombre (rationnel ou irrationnel), alors

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

Soient A et B alors deux grandeurs de même espèce, il existe un nombre et un seul x tel que $A = xB$; c'est le *rapport* de A à B ou la *mesure de* A *quand on prend* B *pour unité.* (la démonstration est classique, nous laissons au lecteur le plaisir de l'écrire dans le contexte de l'ouvrage de Niewenglowski et Gérard).

Niewenglowski et Gérard montrent alors que, quatre grandeurs étant données, A et B d'une même espèce et A' et B' d'une même espèce, les rapports de A à B et de A' à B' sont égaux si et seulement *si, quelle que soit la fraction f, les différences* A - *f*B *et* A' - *f*B' *sont de même signe*, cette dernière expression signifiant que si A est supérieure (resp. inférieure) à fB alors A'

133 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p. 232 ; dans son Cours d'Algèbre, Niewenglowski explicite, à partir de cette construction, la condition d'égalité de deux nombres irrationnels, la relation d'ordre sur les nombres ainsi que les opérations arithmétiques ([N], tome 1, p. 5-11) ; le lecteur pourra, à titre d'exercice, expliciter ces diverses constructions dans le contexte proposé par Niewenglowski.

est supérieure (resp. inférieure) à fB'. (on laisse au lecteur le soin de vérifier cette assertion)[134].

Etant donné deux systèmes de grandeurs, elles sont proportionnelles si elles se correspondent de telle sorte que le rapport de deux grandeurs du premier système est égal au rapport des grandeurs correspondantes de la seconde espèce ; Niewenglowski et Gérard montrent alors le théorème

> *"Pour que les grandeurs de deux systèmes soient proportionnelles, il faut et il suffit que: 1°) à deux grandeurs égales du premier système correspondent deux grandeurs égales du second; 2°) à la somme de deux grandeurs quelconques du système corresponde la somme des grandeurs correspondantes du second."*[135]

Nous indiquons ici les idées essentielles de la démonstration de Niewenglowski et Gérard: il suffit de montrer qu'une correspondance satisfaisant les propriétés 1° et 2° est une correspondance proportionnelle.

Soient **A** et **B** deux grandeurs de la première espèce, A' et B' les grandeurs correspondantes de la seconde espèce, supposons que $B = \frac{m}{n}A$, on montre aisément, à partir des propriétés 1° et 2° que $B' = \frac{m}{n}A'$.

Lorsque $B = \alpha A$ où α est un nombre irrationnel, on va montrer que, quelle que soit la fraction $\frac{m}{n}$., les différences $B - \frac{m}{n}A$ et $B' - \frac{m}{n}A'$ sont de même signe.

Si $B > \frac{m}{n}A$, alors $B = \frac{m}{n}A + C$ et par conséquent $B' = \frac{m}{n}A' + C'$, où C' est la grandeur du second système qui correspond à C, ce qui implique $B' > \frac{m}{n}A$.

Si $B < \frac{m}{n}A$, un raisonnement analogue montre que $B' < \frac{m}{n}A$.

On en déduit l'égalité des rapports A/B et A'/B'.

Notons que Niewenglowski et Gérard n'utilisent pas cette dernière proposition dans le cours du texte ; en fait ils montrent que deux rapports A/B et A'/B' sont égaux en vérifiant que, une fraction $\frac{m}{n}$. étant donnée, l'inégalité

---

134 On peut comparer cette remarque de Niewenglowski et Gérard avec la théorie des proportions d'Eudoxe-Euclide et avec la théorie exposée par Jules Tannery à partir de la notion de coupure.

135 Niewenglowski B. et Gérard L. [NG], p.333

$A > \frac{m}{n} B$ $\left(\text{resp. } A < \frac{m}{n} B\right)$ implique l'inégalité $A > \frac{m}{n} B$ $\left(\text{resp. } A < \frac{m}{n} B\right)$[136].

BIBLIOGRAPHIE

AMIOT A. [Am], *Eléments de Géométrie*, Delagrave, Paris 1883

ARCHIMEDE [Arc], "La mesure du cercle", in *Oeuvres* (texte établi et traduit par Charles Mugler) Les Belles Lettres, Paris 1970; tome I, p. 135-143

ARNAULD Antoine [Arn1], *Nouveaux Elémens de Géométrie* , Paris 1667

ARNAULD Antoine [Arn2], *Nouveaux Elémens de Géométrie* (3ème édition), La Haye 1693, publiée in *Oeuvres Complètes*, Paris1771

ARNAULD Antoine, NICOLE Pierre [AN], *La Logique de Port-Royal* (première édition 1667), Flammarion, Paris 1970

BARBIN Evelyne [Ba], "La démonstration mathématique, signification épistémologique et questions didactiques" *Bulletin APMEP* n°366, décembre 1988

BKOUCHE Rudolf [Bk1], "De la géométrie et des transformations", *Repères-IREM* n°4, 1991

BKOUCHE Rudolf [Bk2], "Variations autour de la réforme de 1902/1905" in Hélène Gispert Hélène et als : *La France mathématique* Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société de Mathématiques de France 1991

BKOUCHE Rudolf [Bk3], "Sur quelques grands traités de géométrie élémentaire" (à paraître)

BLAY Michel, "Du Système de l'Infini au Statut des Nombres incommensurables dans les éléments de la Géométrie de Fontenelle" in *Le Labyrinthe du continu*, édité par Jean-Michel Salanski et Hourya Sinaceur, Springer-Verlag France, Paris 1992 ; Actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie, Brest 1992 (à paraître)

BOSSUT [Bos], *Traité élémentaire de Géométrie*, Paris 1775

BOURBAKI Nicolas [Bou], *Eléments d'Histoire des Mathématiques*, Hermann, Paris 1974

BOURLET Carlo [Bourl], *Cours abrégé de Géométrie*, Hachette, Paris 1905

CAVEING Emile [Ca], *La constitution du type mathématique de l'idéalité*, Publications de l'Université de Lille

CHEVALIER Anne [Ch1], Actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie, Brest 1992 (à paraître)

CHEVALIER Anne [Ch2], "Rapports de grandeur et propositions dans les «Nouveaux Eléments de Géométrie» d'Antoine Arnauld" (à paraître)

---

136 Niewenglowski B. et Gérard L [NG], (arcs et angles) p. 79-81, (lignes proportionnelles) p. 125-127, (aire d'un rectangle) p. 286.

CLAIRAUT Alexis-Claude [Cl], *Elémens de Géométrie* (1743), Gauthier-Villars, Paris 1992
COMBETTE [Com], *Cours de Géométrie élémentaire* (Félis Alcan, Paris 1882
CONDILLAC [Con], *Essai sur l'origine des connaissances humaines* (1746), Editions Galilée, Paris 1973
COUSQUER Eliane [Cou1], "Le calcul vectoriel" in *La rigueur et le calcul,* CEDIC, Paris 1982
COUSQUER Eliane [Cou2], *Histoire du concept de nombre,* IREM de Lille 1992
D'ALEMBERT Jean Le Rond [Da], *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986
DEDEKIND Richard [Ded], *Essay on the theory of numbers* (translated by W.W.Beman), Dover, New York 1963
DESCARTES René [Des] : "La Géométrie" in *Le Discours de la Méthode,* Fayard, Paris 1986, livre premier, p. 333
DHOMBRES Jean [Dh], *Nombres, mesure et continu : épistémologie et histoire*, Cedic-Nathan, Paris 1978
DUGAC [Du], *Richard Dedekind et les Fondements des Mathématiques* (Préface de Jean Dieudonné), Vrin, Paris 1976
DUMONT Jean-Paul et als [Dum], *Les Ecoles Présocratiques*, Gallimard, Paris 1991
Encyclopédie Méthodique [Enc] : "Mathématiques", Panckoucke, Paris 1784, réédition ACL Editions, Paris 1987
ENRIQUES Federigo [Enr], "Principes de la Géométrie" in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées* (édition française), Tome III, Article 1, Gauthier-Villars, Paris et Teubner, Leipzig, 1911 ; réédition Jacques Gabay, Paris 1991
FONTENELLE Bernard de [Fo], *La Géométrie de l'Infini*, Paris 1757
GONSETH Ferdinand [Go], *Philosophie néo-scolastique et philosophie ouverte*, l'Age d'Homme, Lausanne 1973
Groupe Inter-IREM Epistémologie [GIIE], *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, Paris 1987
GULMIN A. [Gu], *Cours de Géométrie élémentaire*, Durand, Paris 1859
Hadamard Jacques [Ha], *Leçons de Géométrie élémentaire*, Armand Colin, Paris 1898/1947, réédition de la dernière édition Jacques Gabay, Paris 1989
HEATH Thomas L. [He1], *The thirteen book of Elements of Euclid* (translation, introduction and commentaries) (1908/1925), Dover Publications, New-York 1956
HEATH Thomas L. [He2], *A History of Greek Mathematics* (1921), Dover Publications, New-York 1981

HILBERT David [Hi], *Les Fondements de la Géométrie* (1899) (édition critique avec introduction et compléments préparés par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971
KLEIN Felix [Kl], *Le Programme d'Erlangen*, (1972) (traduction française Padé), Gauthier-Villars, Paris 1974
KNORR Wilbur Richard [Kn], *The Evolution of Euclidean Elements*, Reidel Publisching Company, Dodrecht, Boston 1975
LACROIX Sylvestre [Lac 1], *Traité élémentaire d'Arithmétique*
LACROIX Sylvestre [Lac 2], *Elémens d'Algèbre*
LACROIX Sylvestre [Lac 3], *Elémens de Géométrie*, quatrième édition, Paris 1804
LAMY [Lam], *Les Elémens de Géométrie*, Paris 1685
LEGENDRE Adrien-Marie [Le], *Elémens de Géométrie* (douzième édition), Firmin Didot, Paris 1823
LE GOFF Jean-Pierre [LeG], "De la méthode d'exhaustion, Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)" in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Colloque Inter-IREM Epistémologie (Besançon 1989), IREM de Besançon-IREM de Lyon 1990
NEVEU H. et BELLANGER H. [NB], *Cours de Géométrie* (8ème édition), Masson, Paris 1925
NIEWENGLOSKI B. [N], *Cours d'Algèbre* (troisième édition), Armand Colin, Paris 1893
NIEWENGLOSKI B. et GÉRARD L. [NG], *Cours de Géométrie élémentaire : Géométrie plane*, Gauthier-Villars, Paris 1898
PASCAL Blaise [Pa], "De l'esprit géométrique et de l'art de persuader", in *Œuvres complètes* (éditées par Lafuma), Le Seuil, Paris 1963
PEYRARD [Pe], *Les Œuvres d'Euclide*, 2 volumes (1819), Blanchard, Paris 1966
PLANE Henry [Pl], Actes du Colloque Inter-IREM Géométrie, Limoges 1992
ROUCHÉ Eugène, Comberousse Charles de [RC], *Traité de géométrie* (2 volumes), 6ème édition, Gauthier-Villars, Paris 1981
SINACEUR Hourya [Si], "La construction Algébrique du Continu : Calcul, Ordre, Continuité" in *Le Labyrinthe du continu*, édité par Jean-Michel Salanskis et Hourya Sinaceur, Springer-Verlag France, Paris 1992
SOUSSAN M'hammed [Sou], *Le traitement des proportions entre Eudoxe et Euclide (la théorie alternative de Knorr)*, mémoire de DEA, Université Charles de Gaulle, Villeneuve d'Ascq 1993 (à paraître)
TANNERY Jules [TanJ], *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique* (7ème édition), Armand Colin, Paris 1917
Tannery Paul [TanP], *La Géométrie Grecque*, Gauthier-Villars, Paris